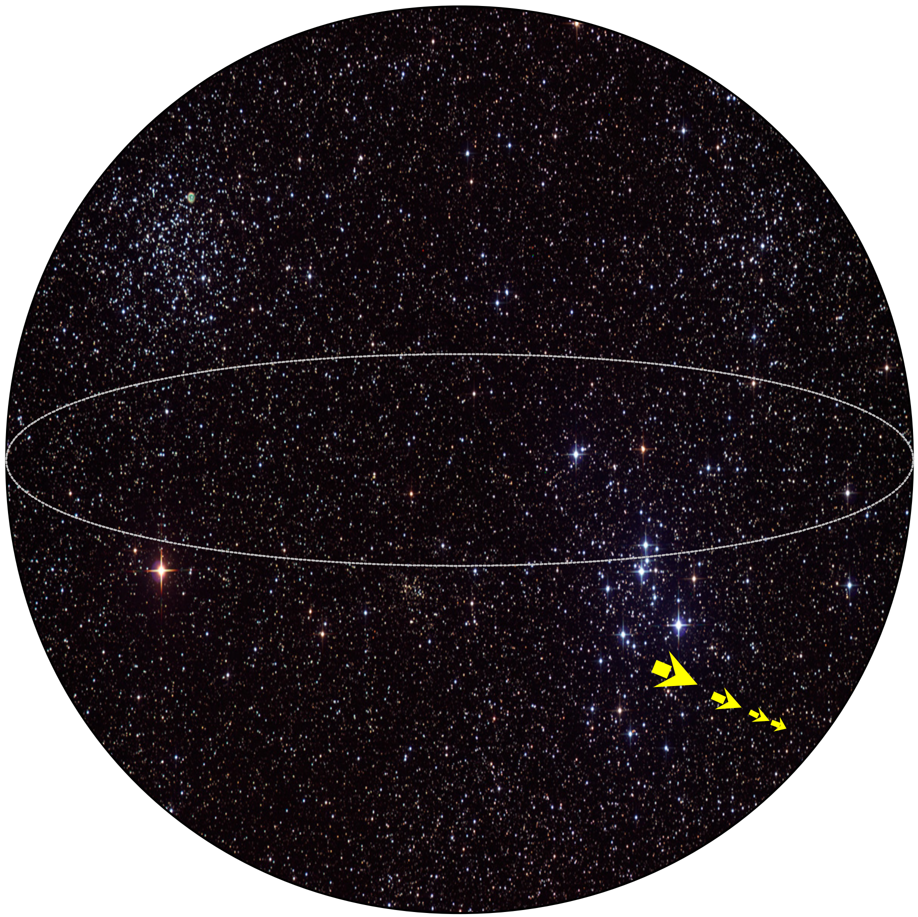
3-variedades

Max Neumann Coto
Instituto de Matemáticas UNAM
Cuernavaca

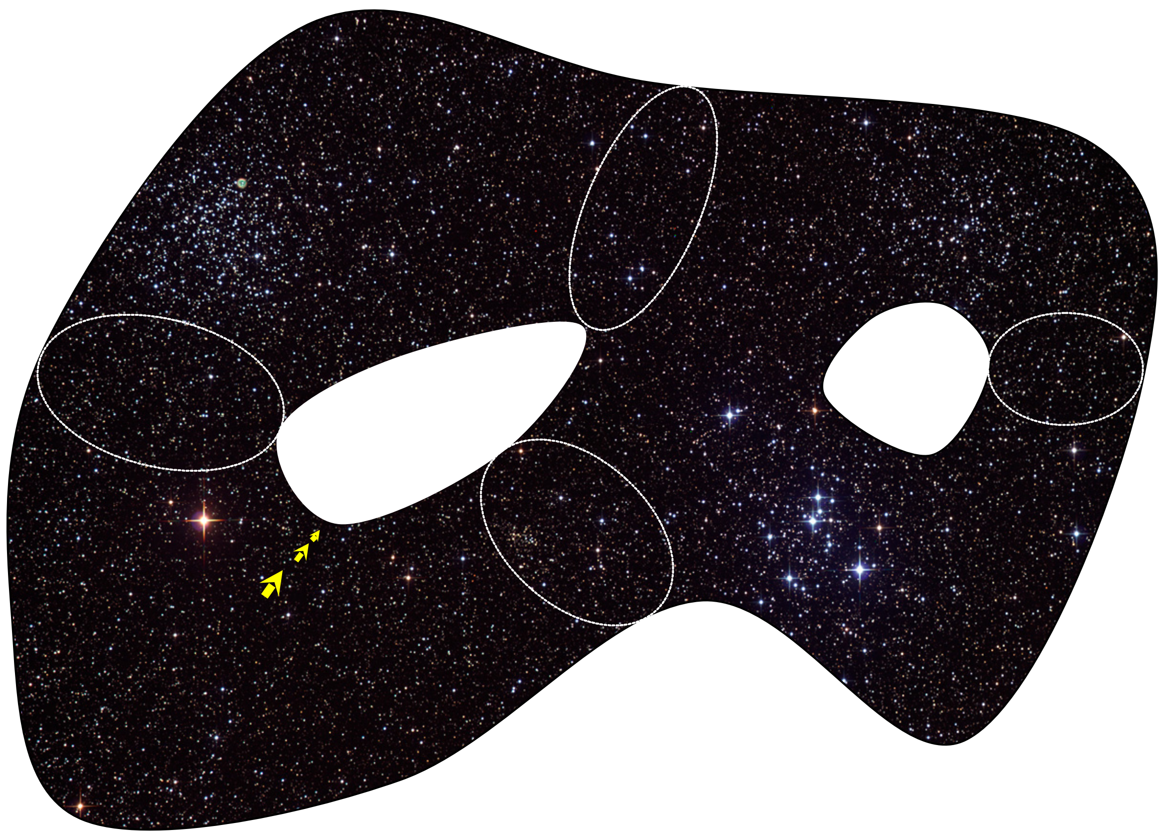
3. Homologia

¿Cómo podríamos saber si el espacio es así?



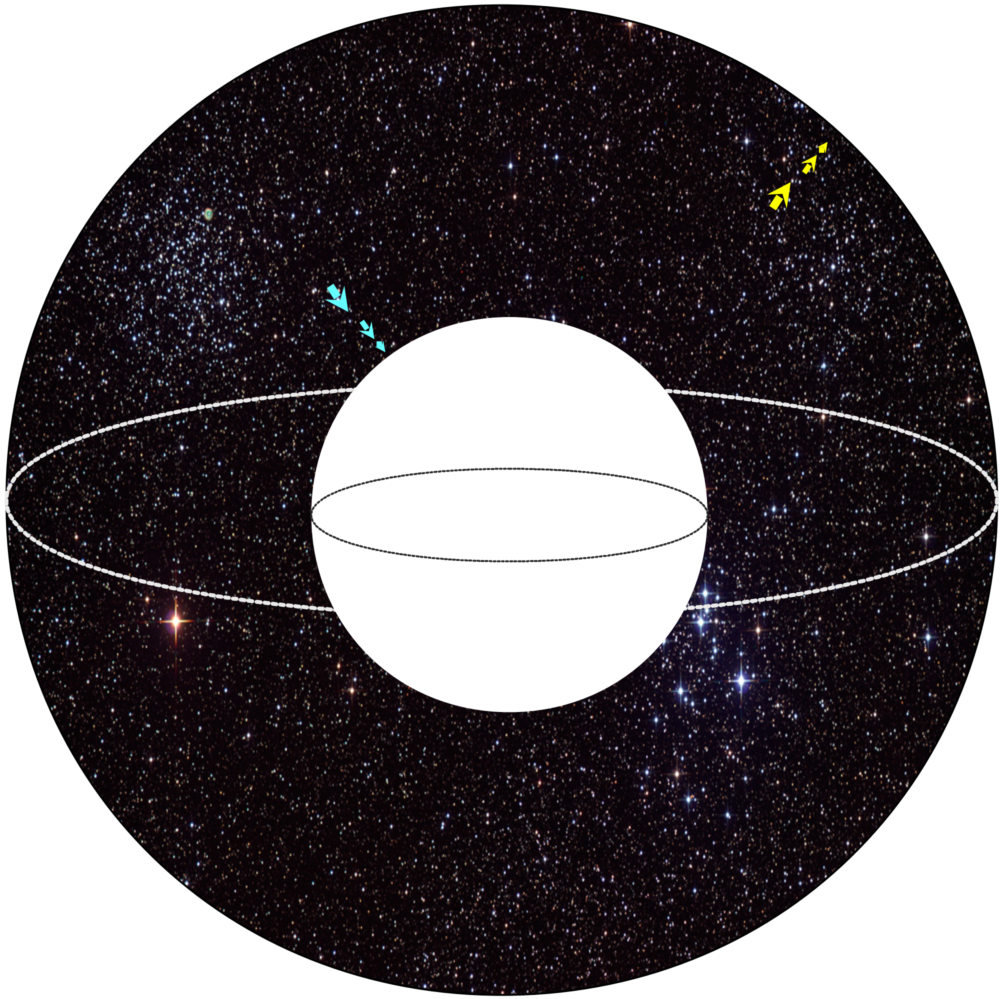
R^3

¿O así?



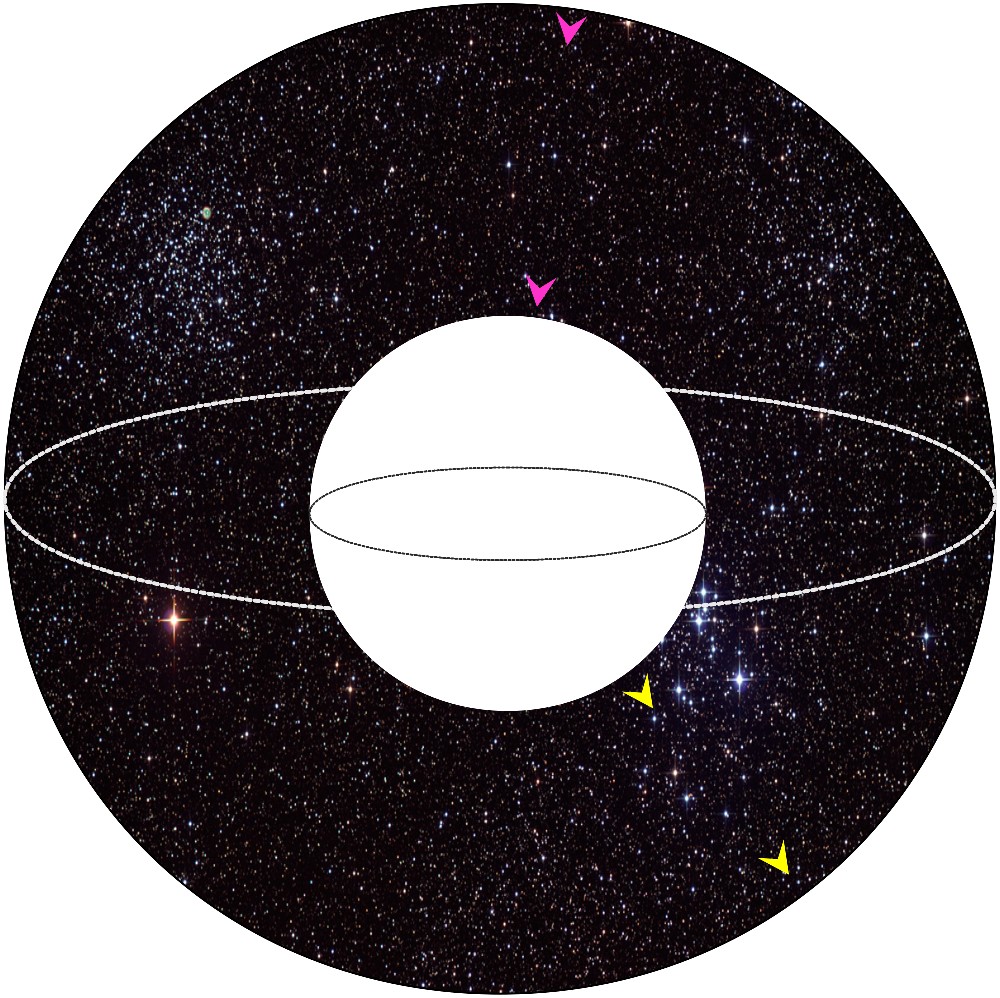
(un cubo con asas infinito)

¿O así?



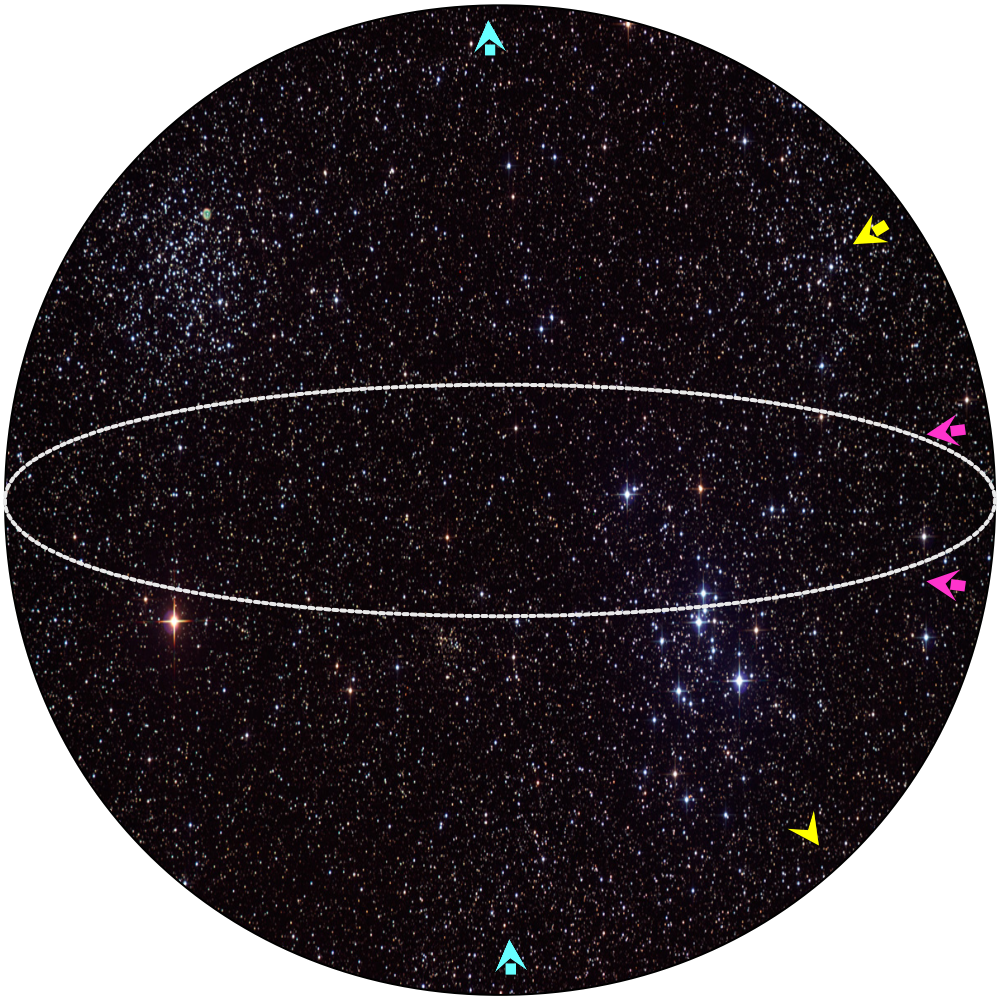
$S^2 \times R$

¿O así?



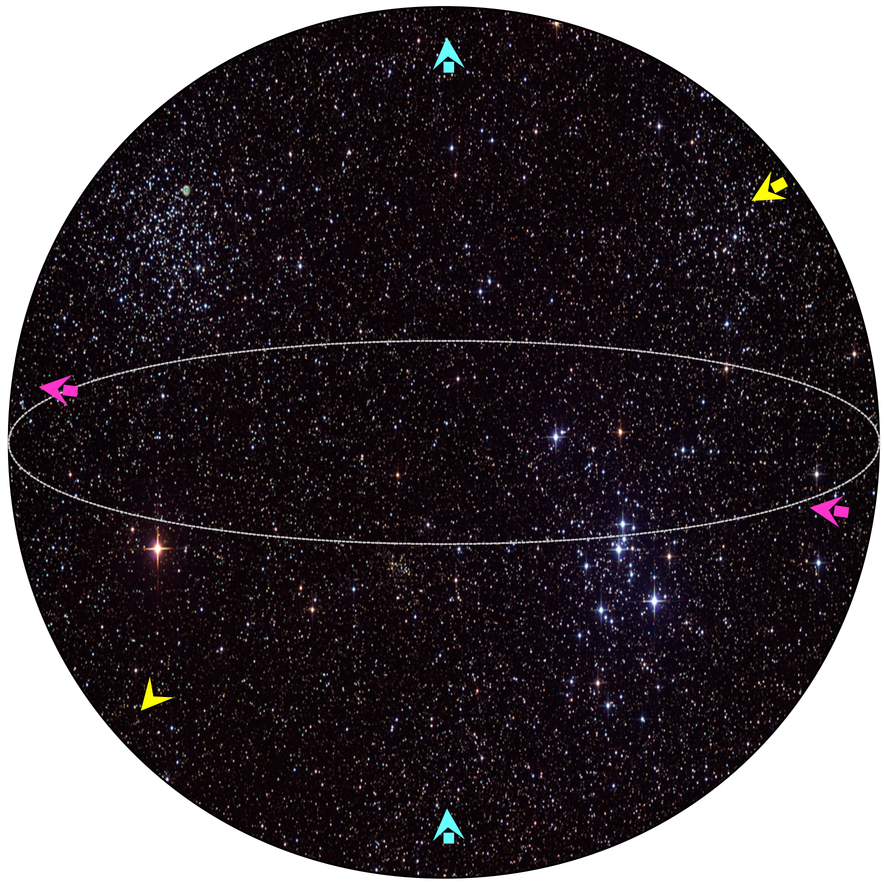
$S^2 \times S^1$

¿O así?



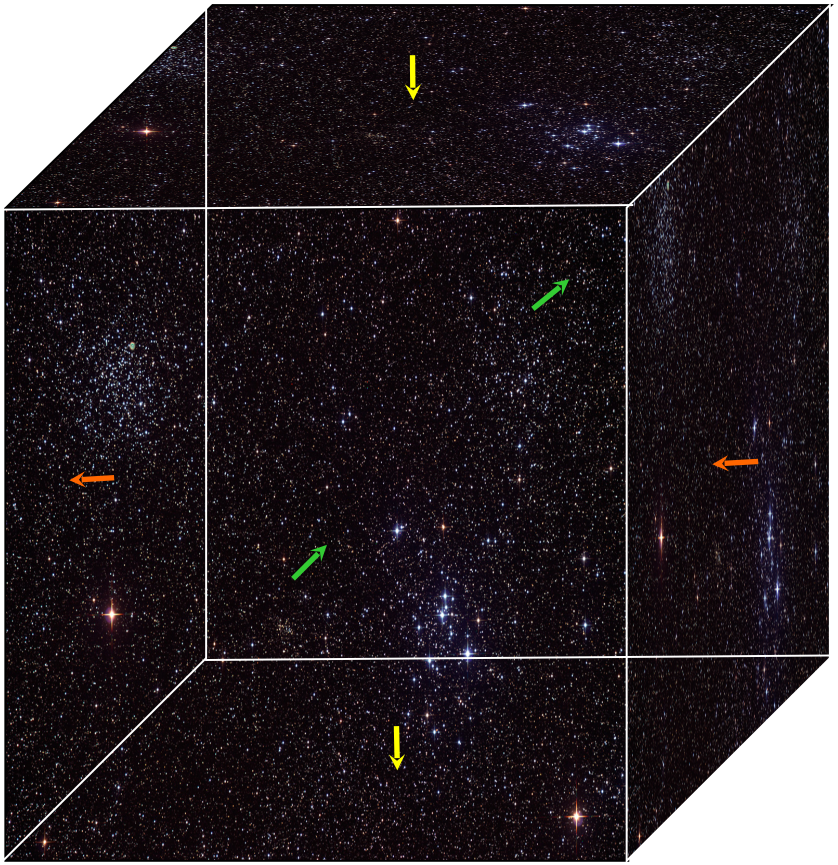
S^3

¿O así?



RP^3

¿O así?



T^3

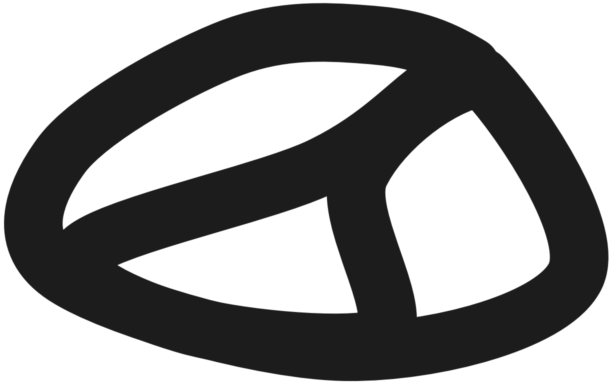

¿O así?
El exterior de un nudo en S3

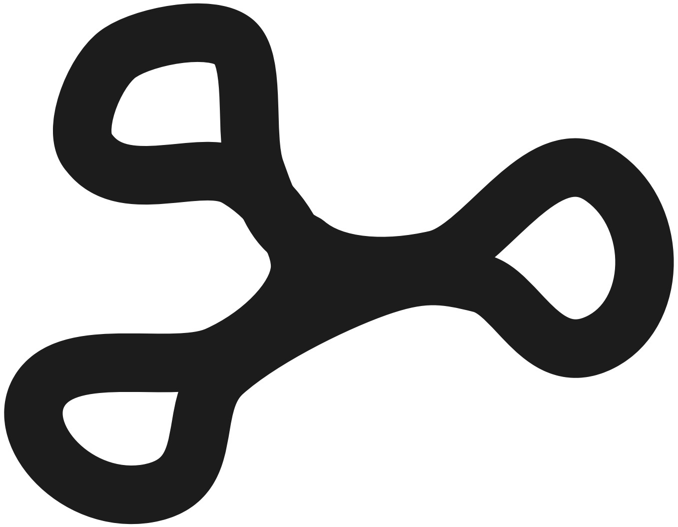
¿Cómo podrías saber si vives en un espacio asi?

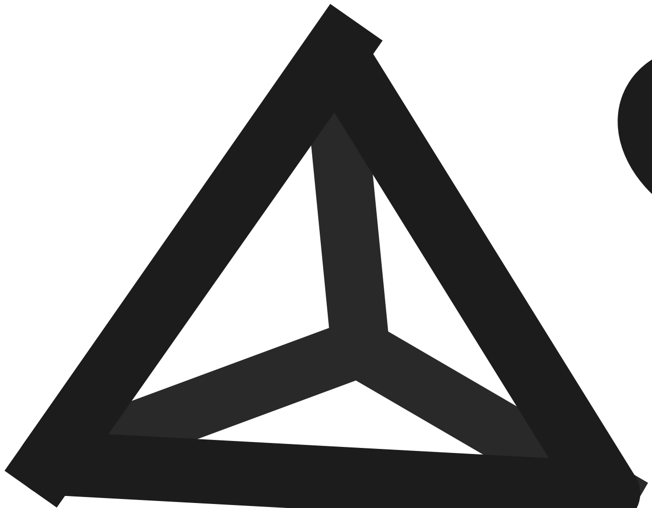
¿Cómo podrías saber si vives en un espacio asi?

Este espacio tiene “hoyos” y R^3 no los tiene

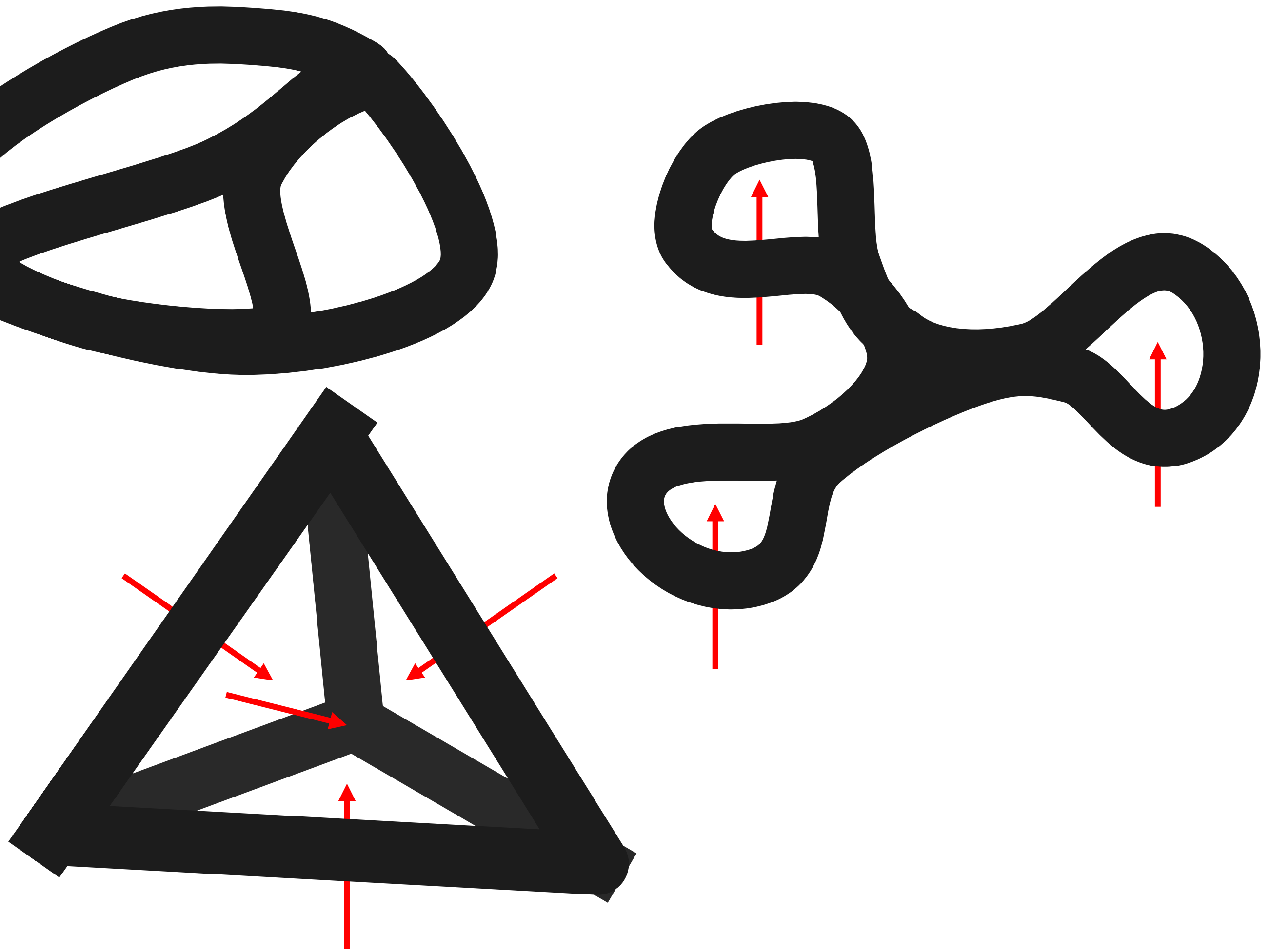
¿Cuántos “hoyos” tienen estos espacios?







¿Cuántos “hoyos” tienen estos espacios?



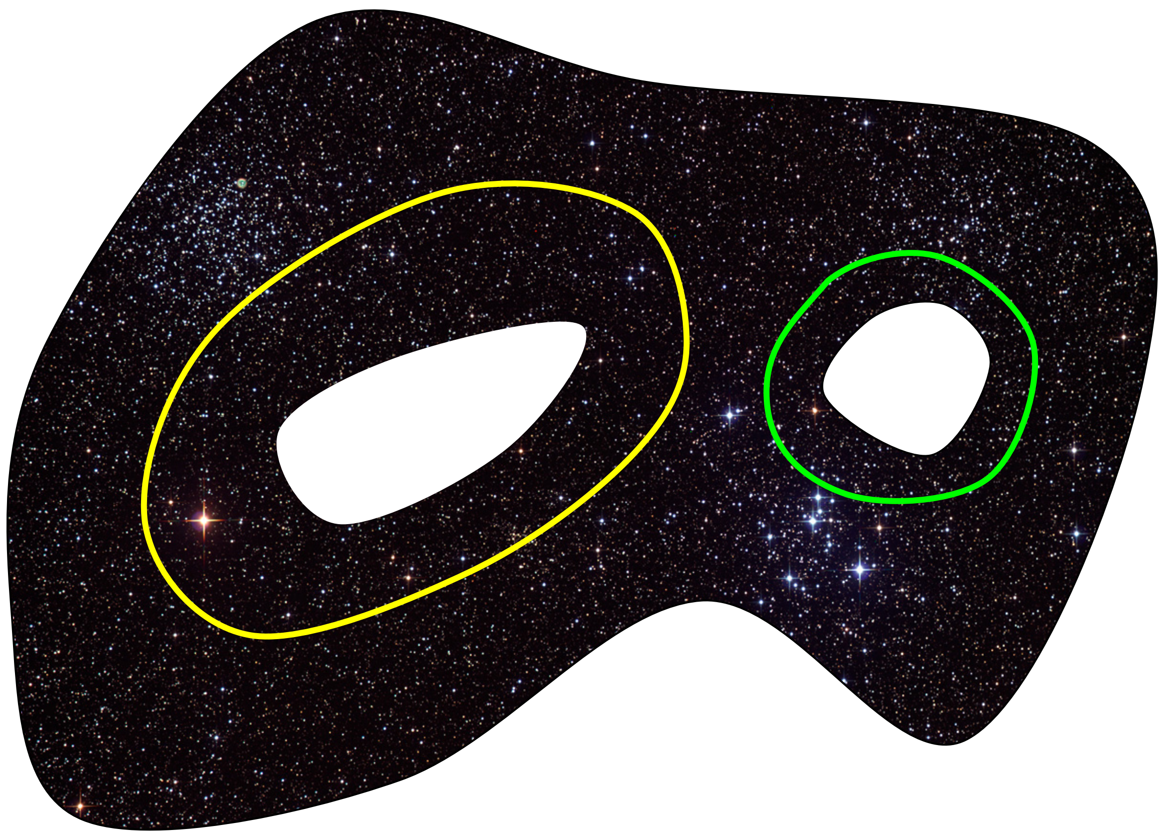
¿Qué son los hoyos?

¿podremos verlos desde adentro?

¿Qué son los hoyos?

Un hoyo

¿Qué son los hoyos?



2 hoyos

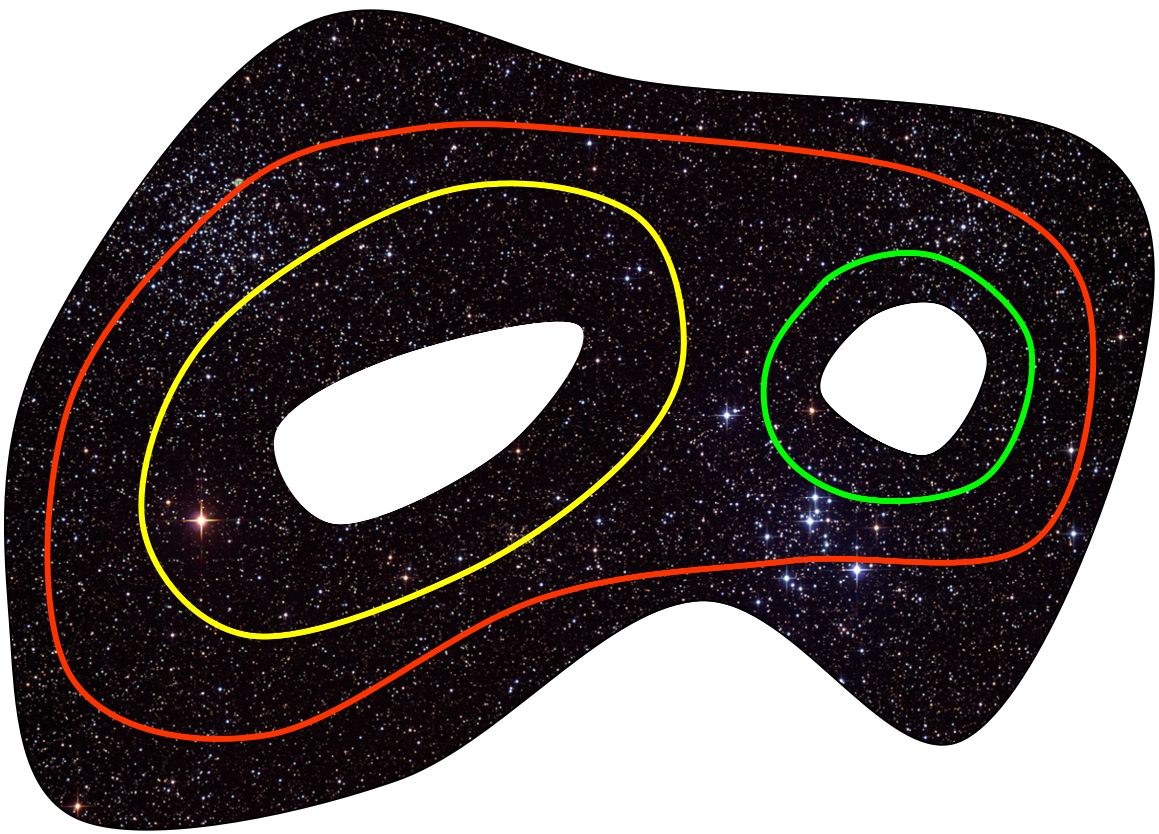
¿Qué son los hoyos?

mismo hoyo

¿Qué son los hoyos?

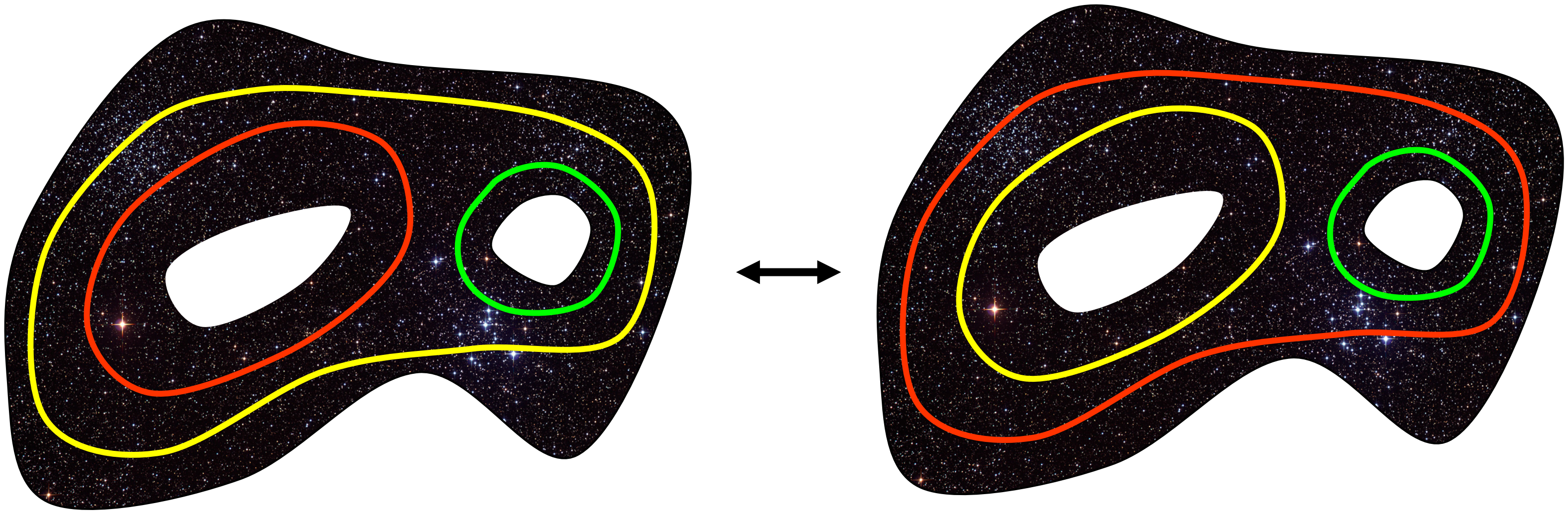
mismo hoyo

¿Qué son los hoyos?



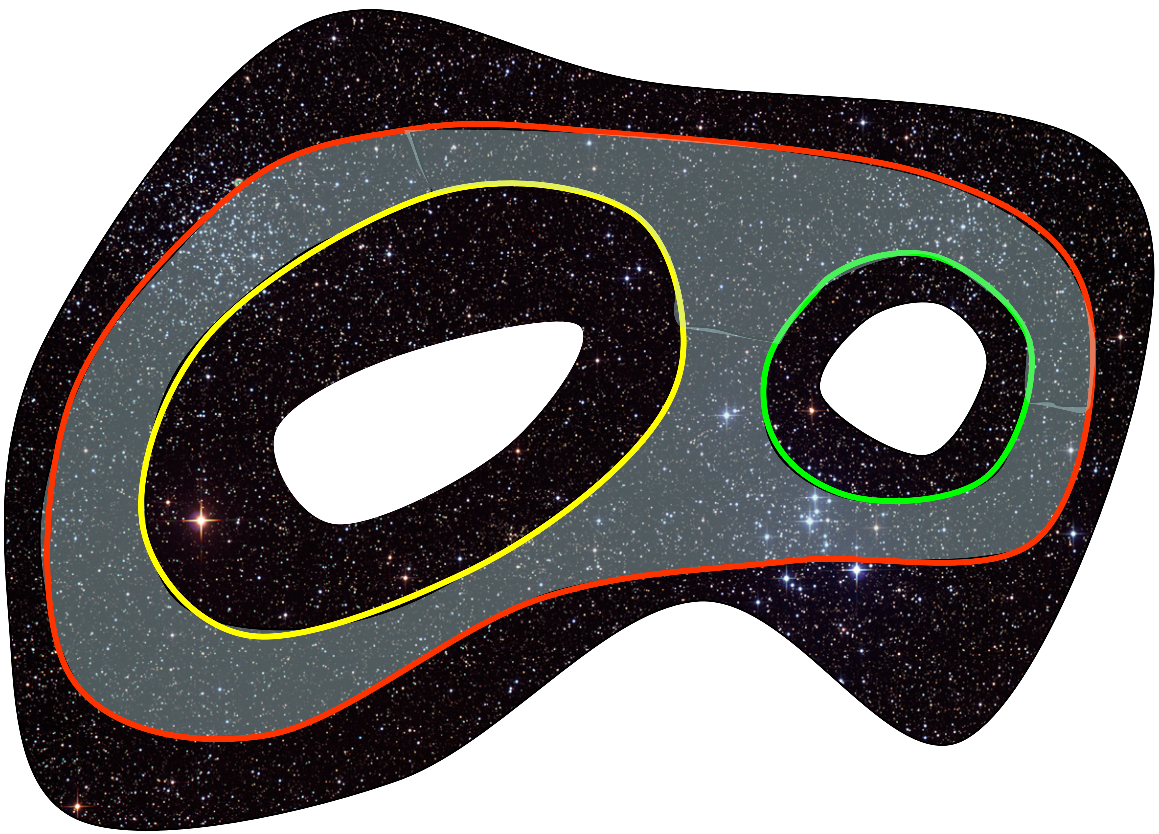
¿2 o 3 hoyos ?

¿Qué son los hoyos?



¿3 hoyos ?

¿Qué son los hoyos?

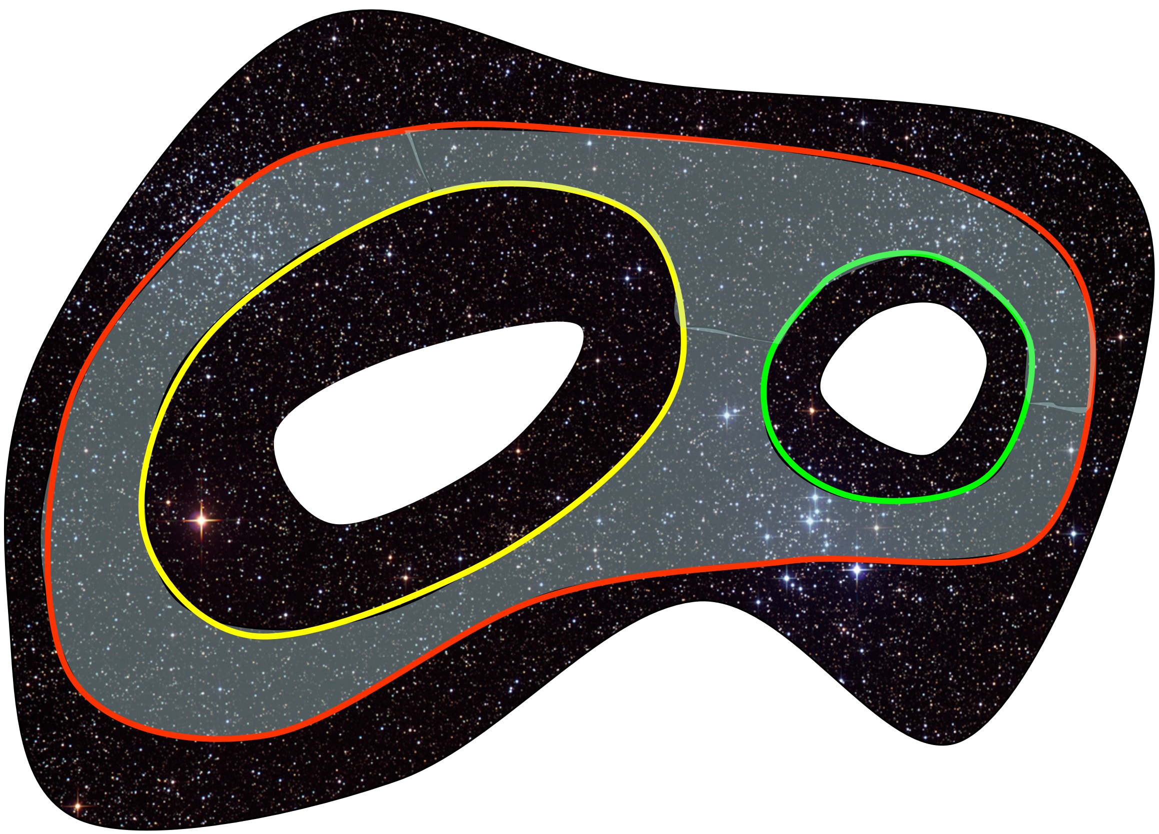


El hoyo rojo es la “suma” del hoyo verde y el amarillo

La curva amarilla es *homologa* a la naranja

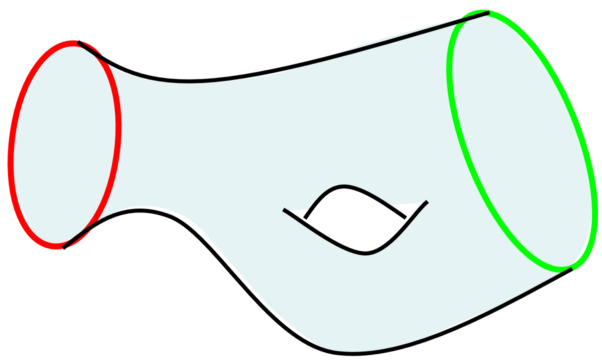
un hoyo puede verse como una clase de homología

La curva roja es homóloga a la
“suma” de la verde y la amarilla



Homología

Dos curvas en una variedad son *homologas* si pueden conectarse por medio de una superficie dentro de la variedad

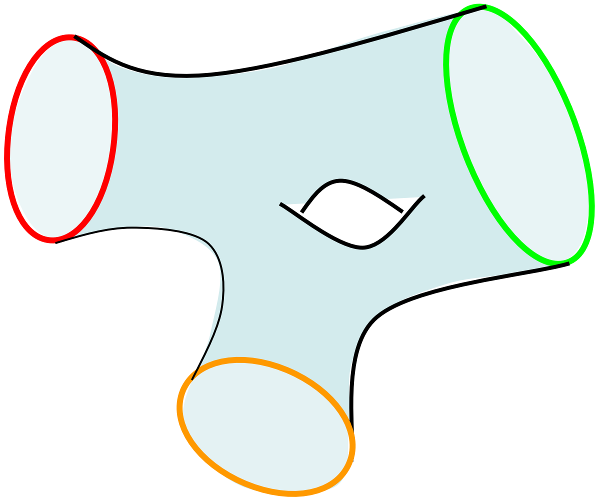


El ser homólogas es una relación de equivalencia entre curvas

Las clases de equivalencia son las *clases de homología.*

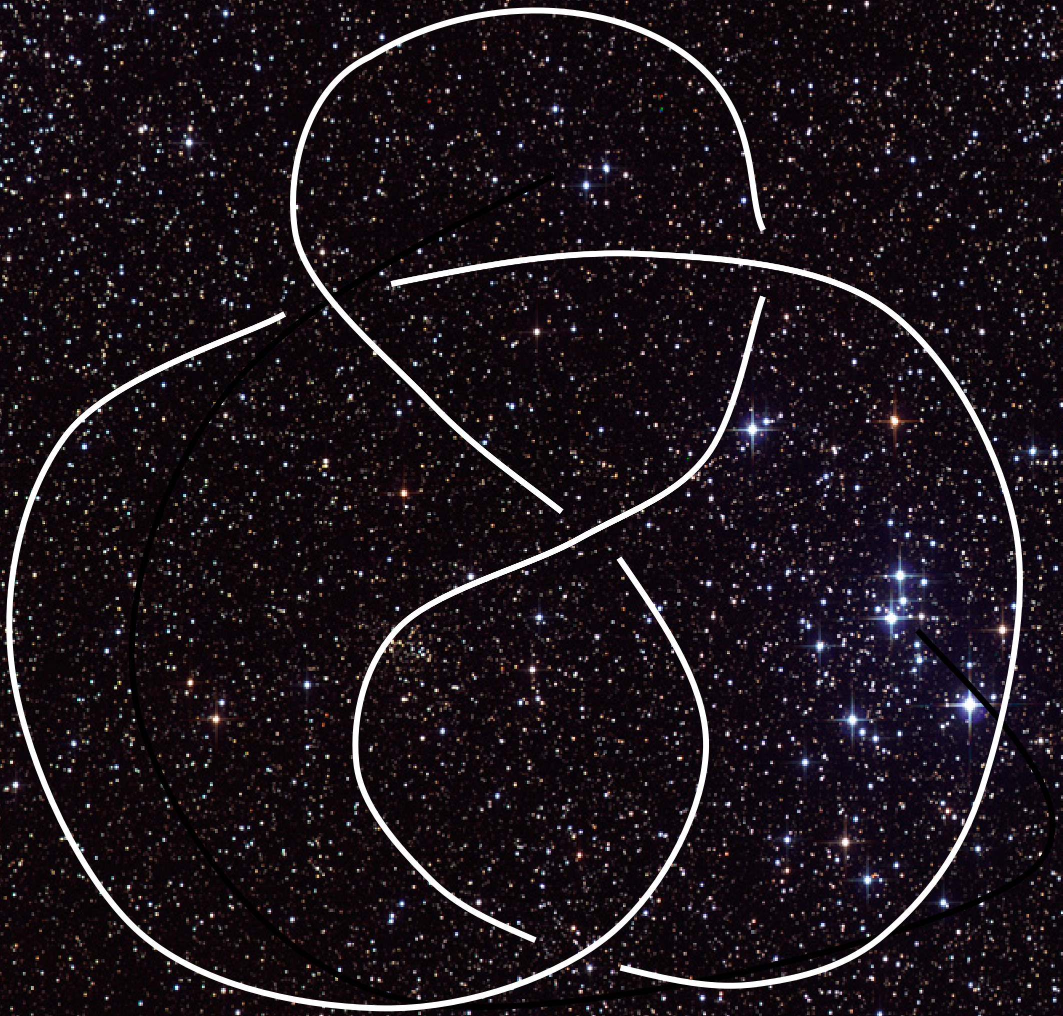
Homología

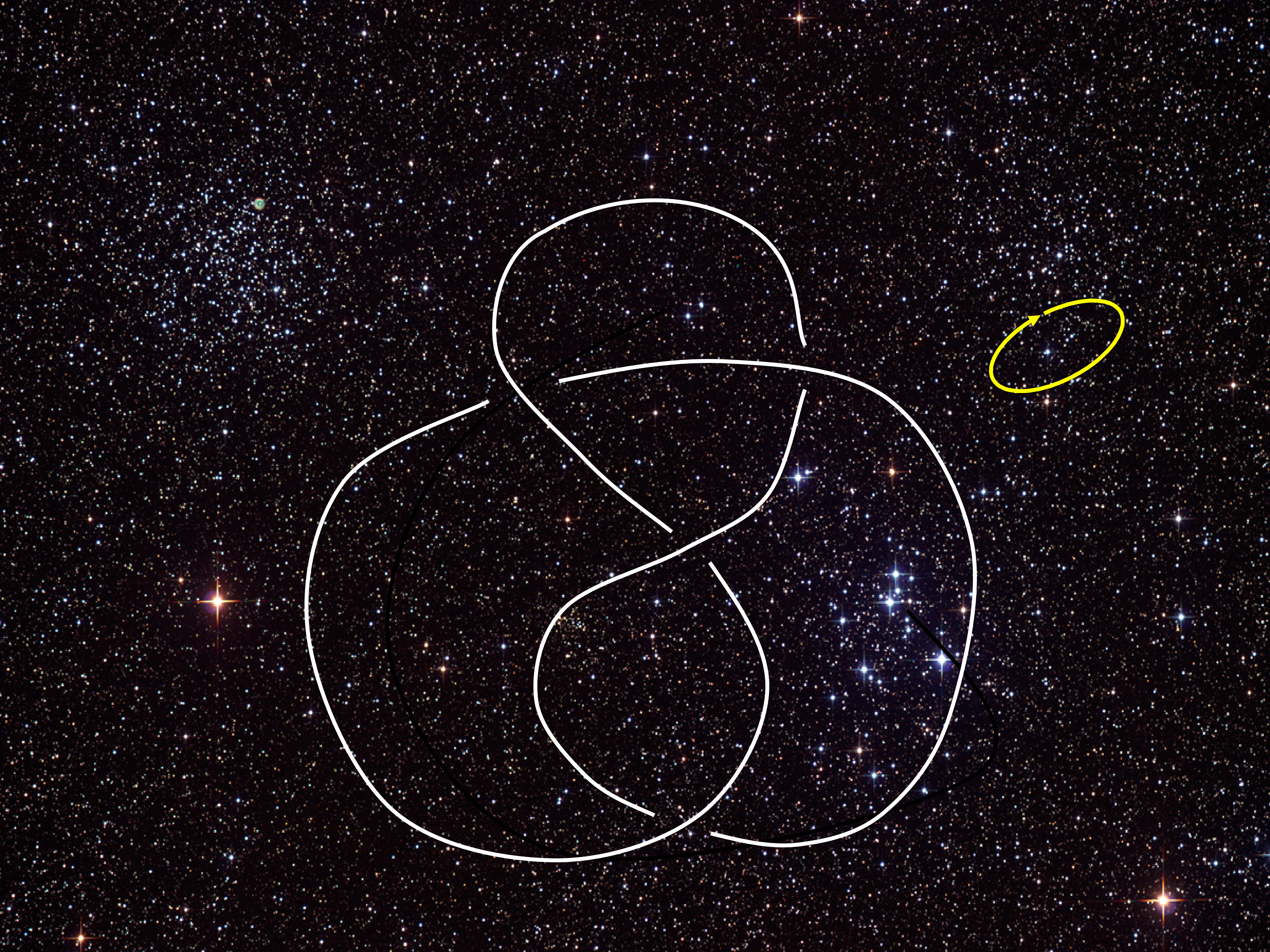
Las clases de homología se pueden sumar



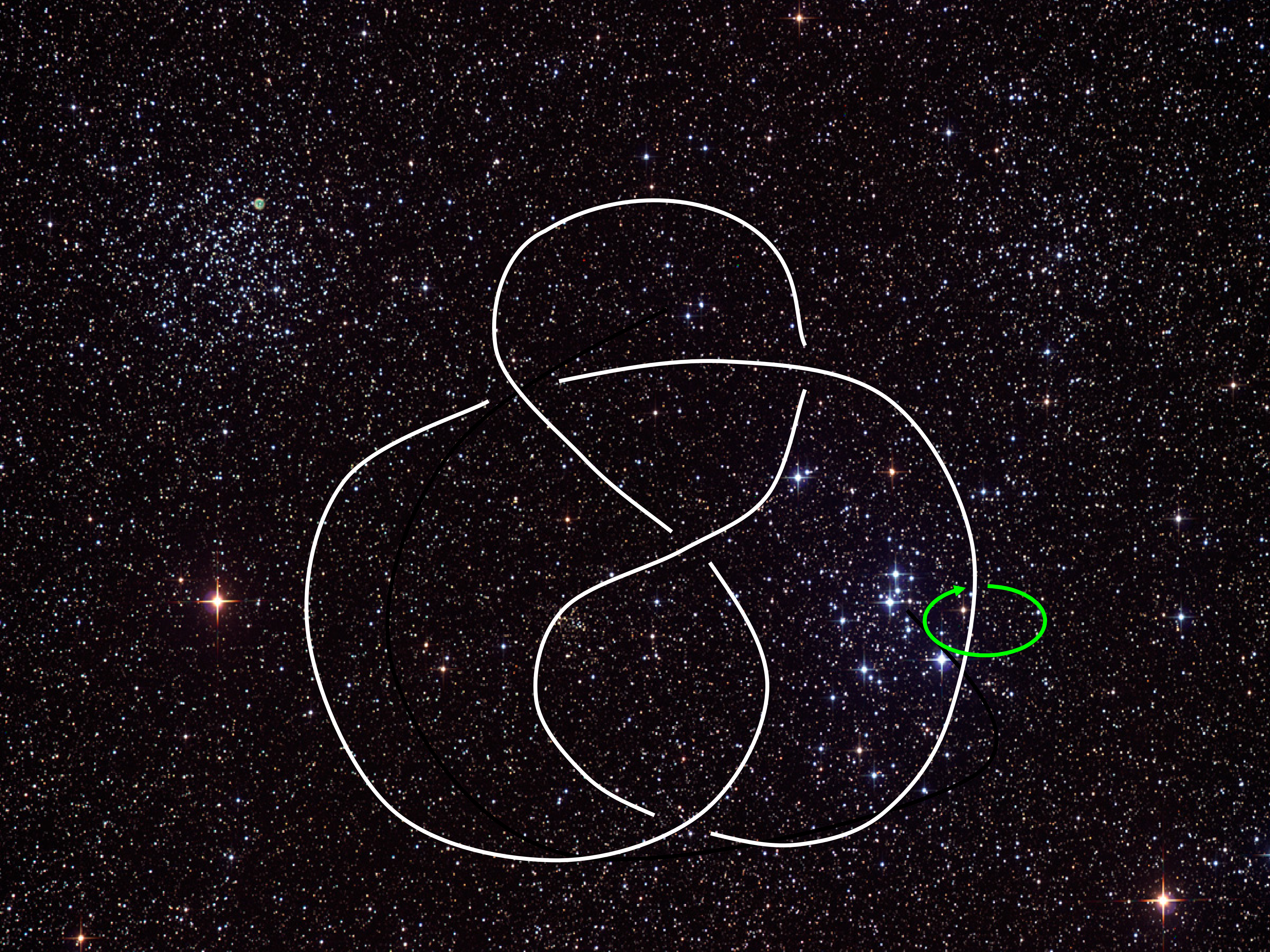
El conjunto de clases de homología de una variedad forma un grupo llamado el *primer grupo de homología.*

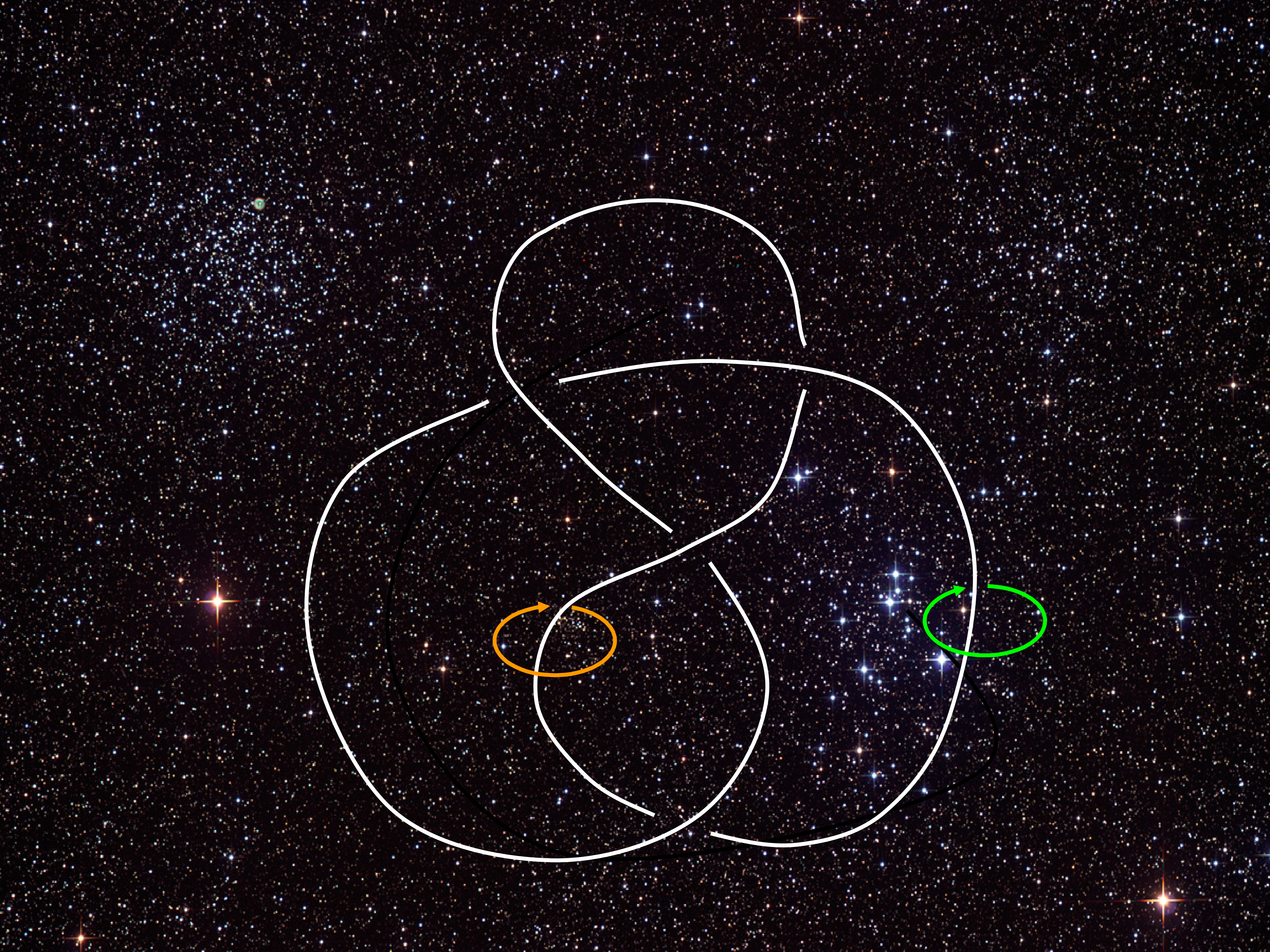
El exterior de un nudo en S^3



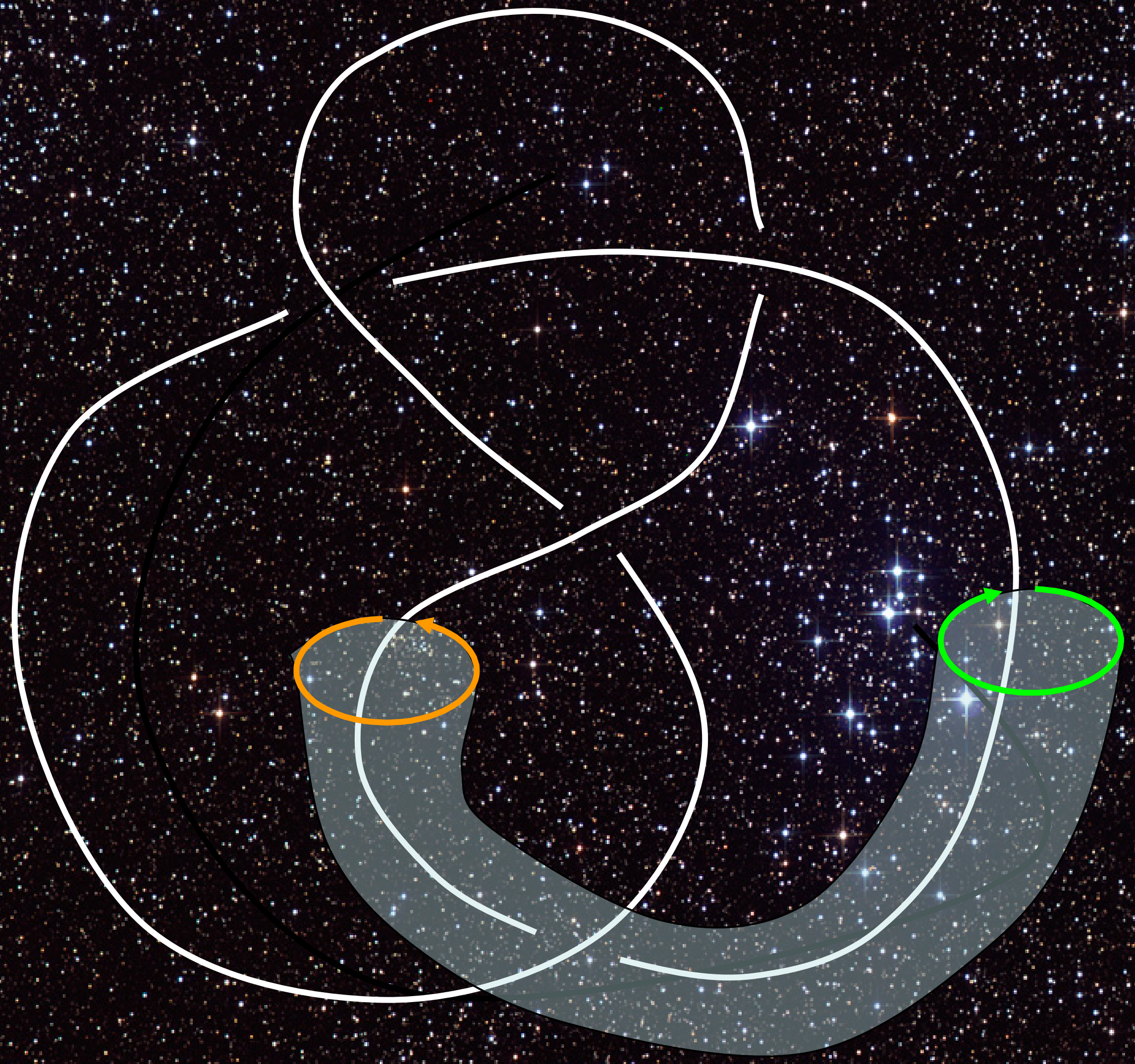


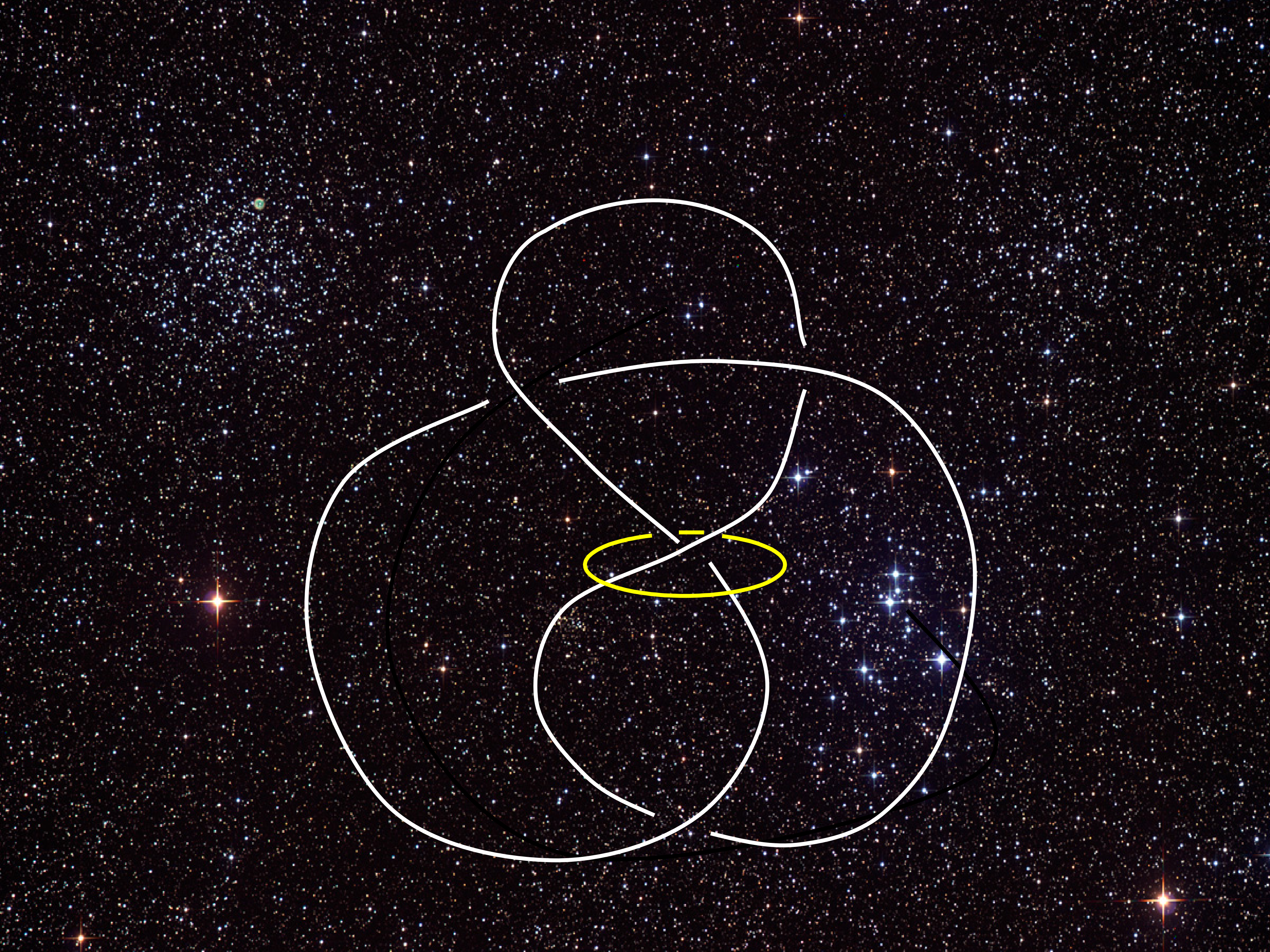
Curva homóloga a 0





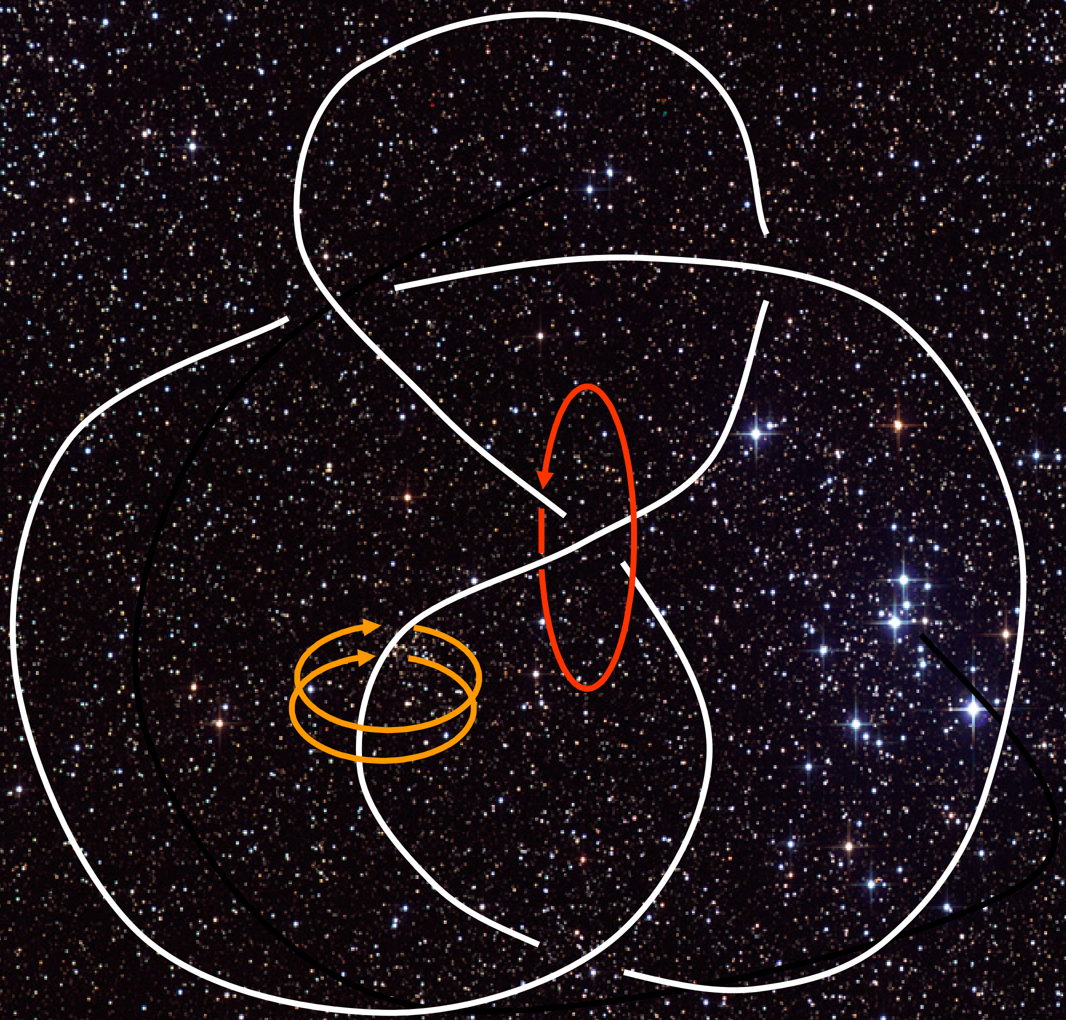
Curvas homólogas



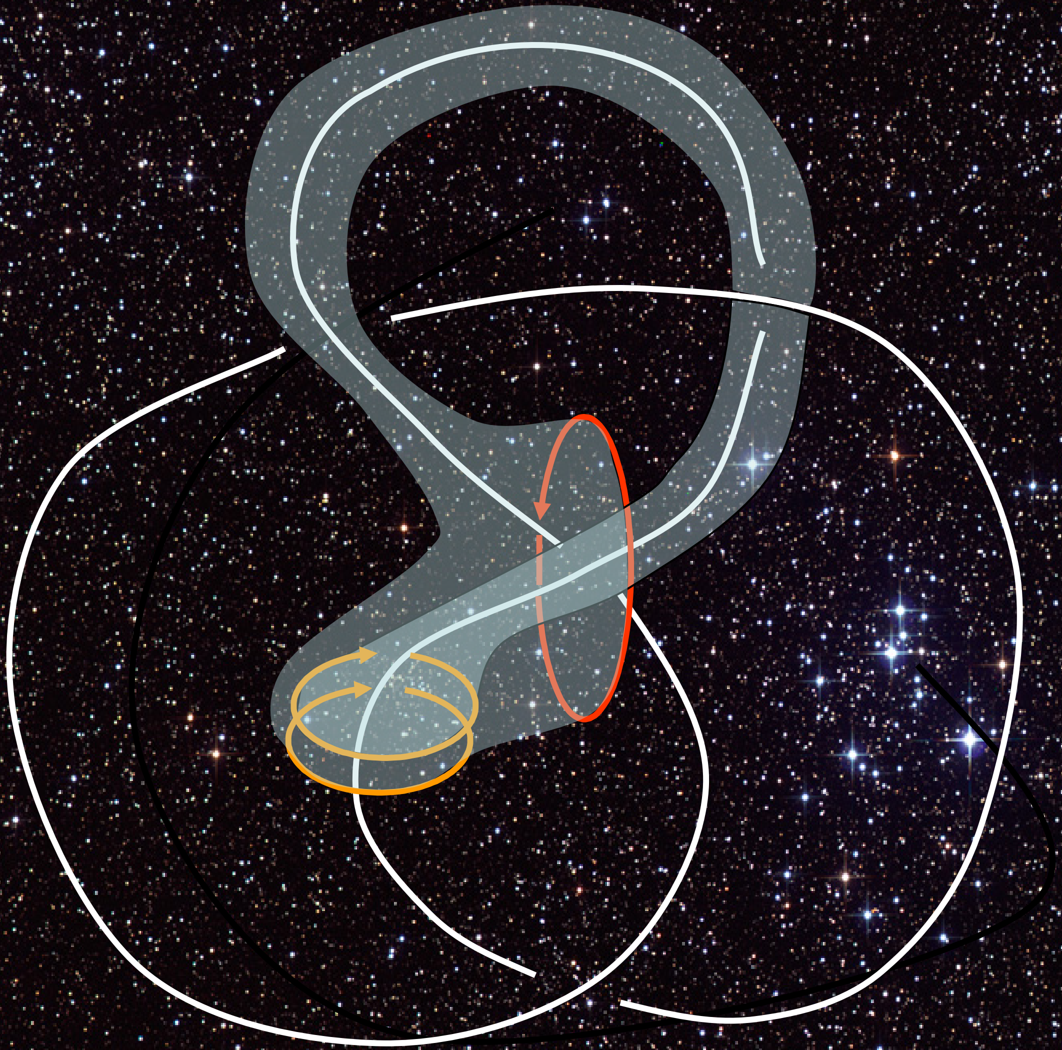


Curva homóloga a 0

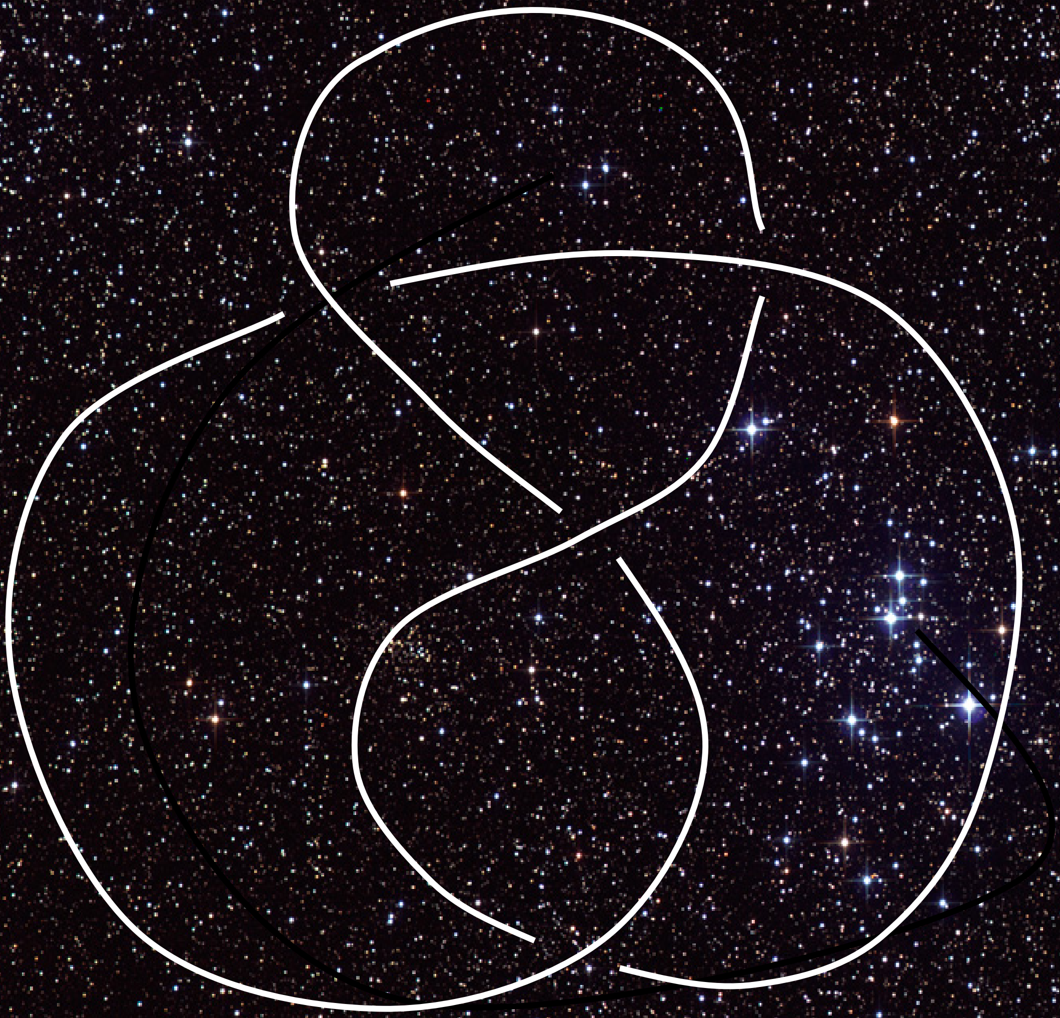
La curva roja es homóloga al doble de la naranja



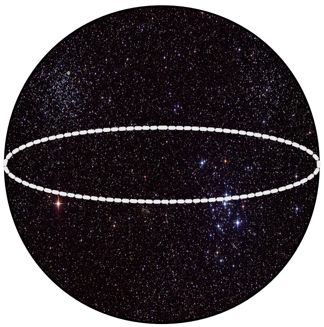
La curva roja es homóloga al doble de la naranja

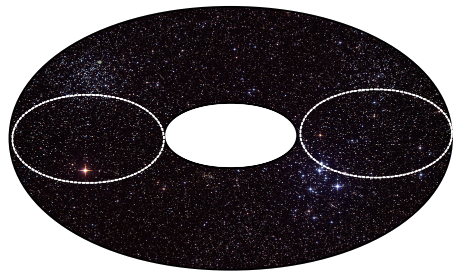


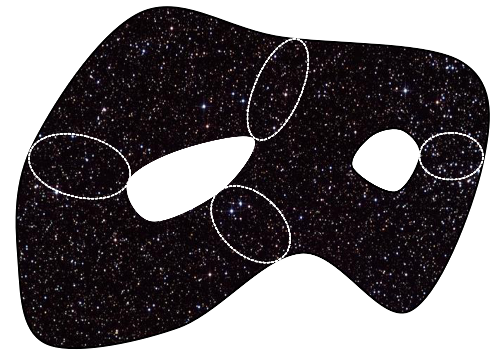
H_1 (exterior del nudo) = Z



Primer grupo de Homología

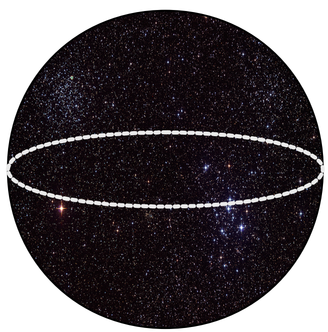




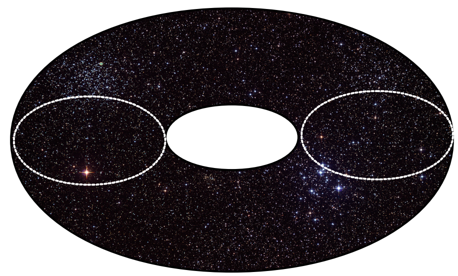


$H_1(R^3) = 0$ $\quad$ $H_1(R^2xS^1) = Z$ $H_1(R^2xS^1+R^2xS^1) = Z+Z$

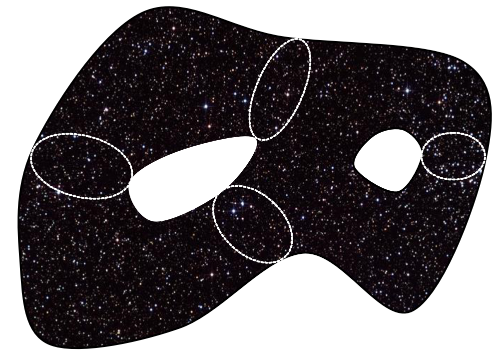
Primer grupo de Homología



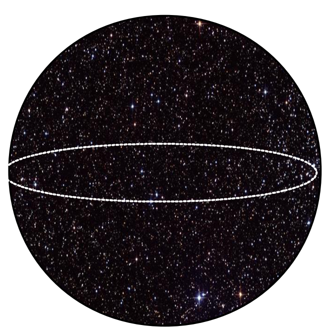
$H_1(R^3) = 0$



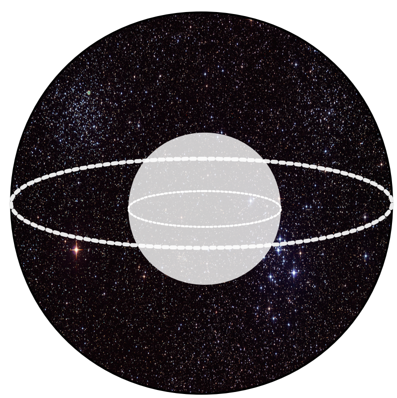
$H_1(R^2 x S^1) = Z$



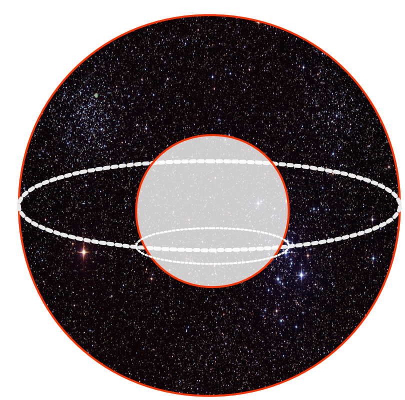
$H_1(R^2 x S^1 + R^2 x S^1) = Z+Z$



$H_1(S^3) = 0$

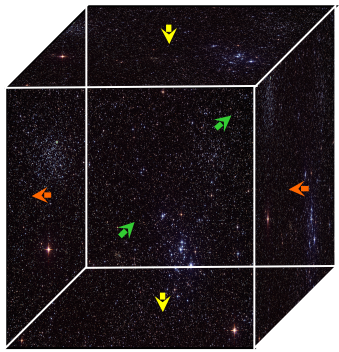


$H_1(S^2 x R) = 0$

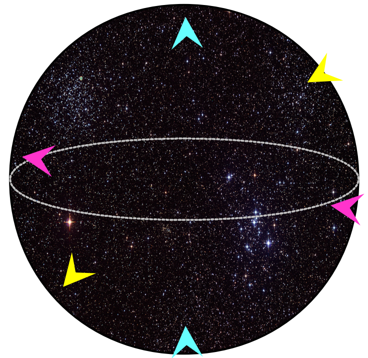


$H_1(S^2 x S^1) = Z$

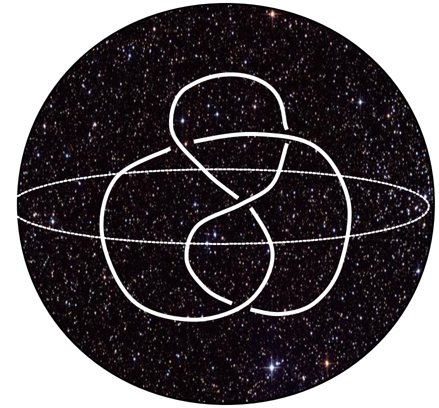
Primer grupo de Homología



$H_1(T^3) = Z+Z+Z$

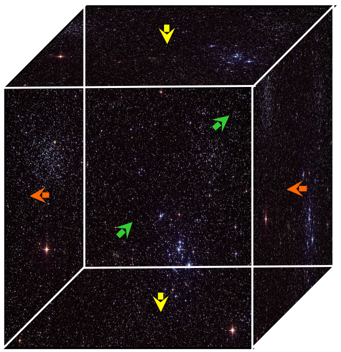


$H_1(RP^3) = Z_2$

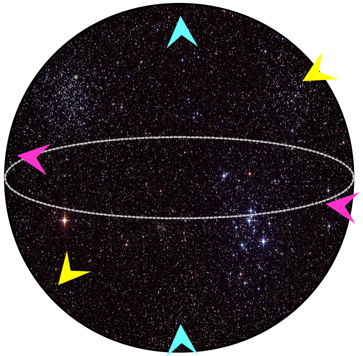


$H_1(\text{nudo en } S^3) = Z$

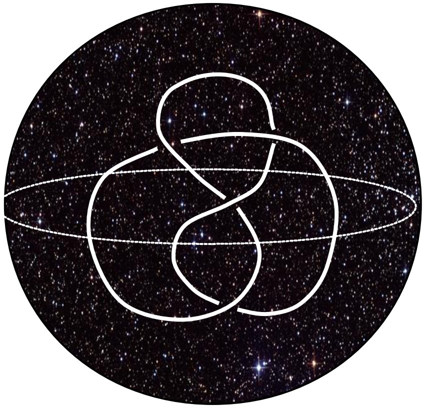
Primer grupo de Homología



$H_1(T^3) = Z+Z+Z$



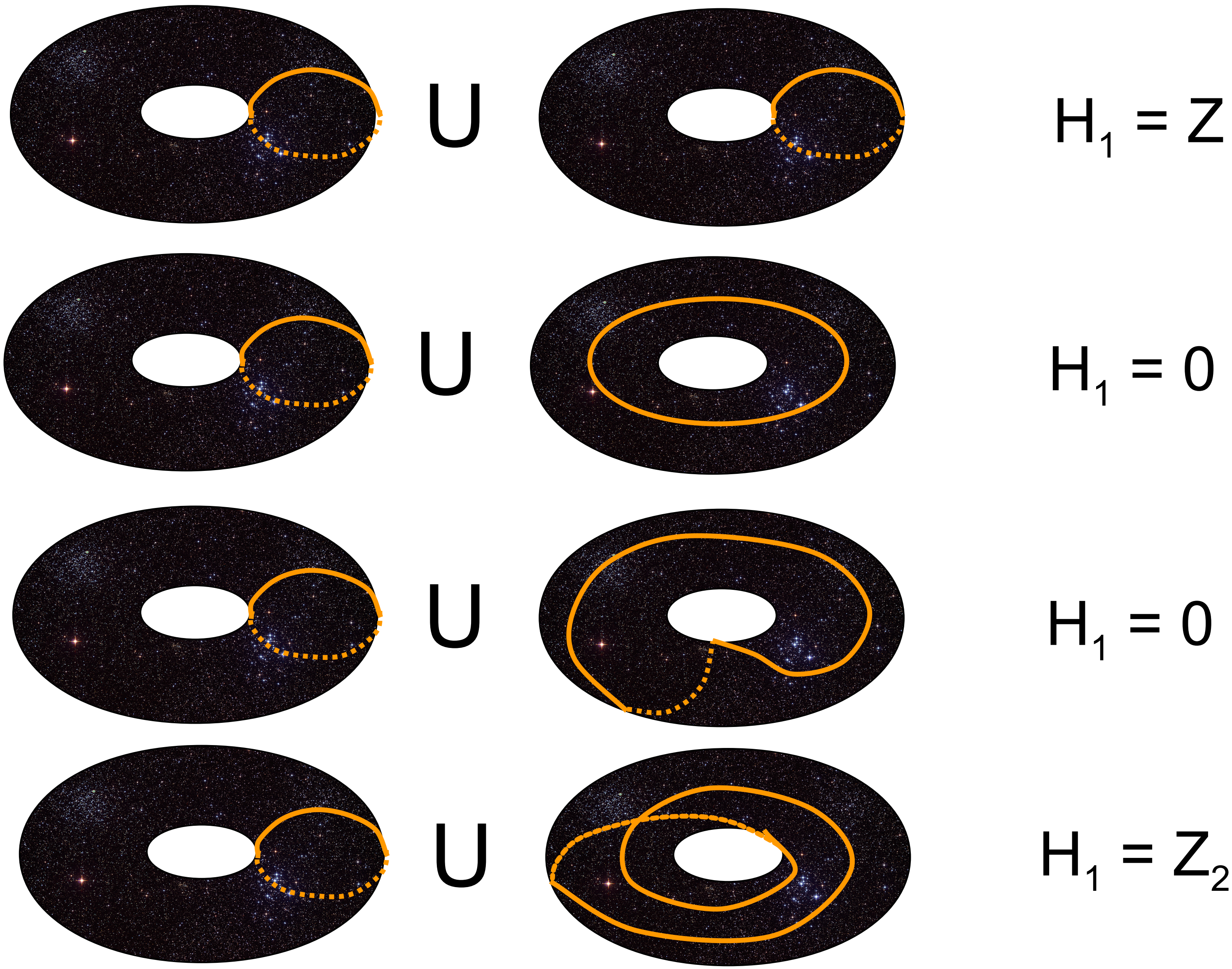
$H_1(RP^3) = Z_2$



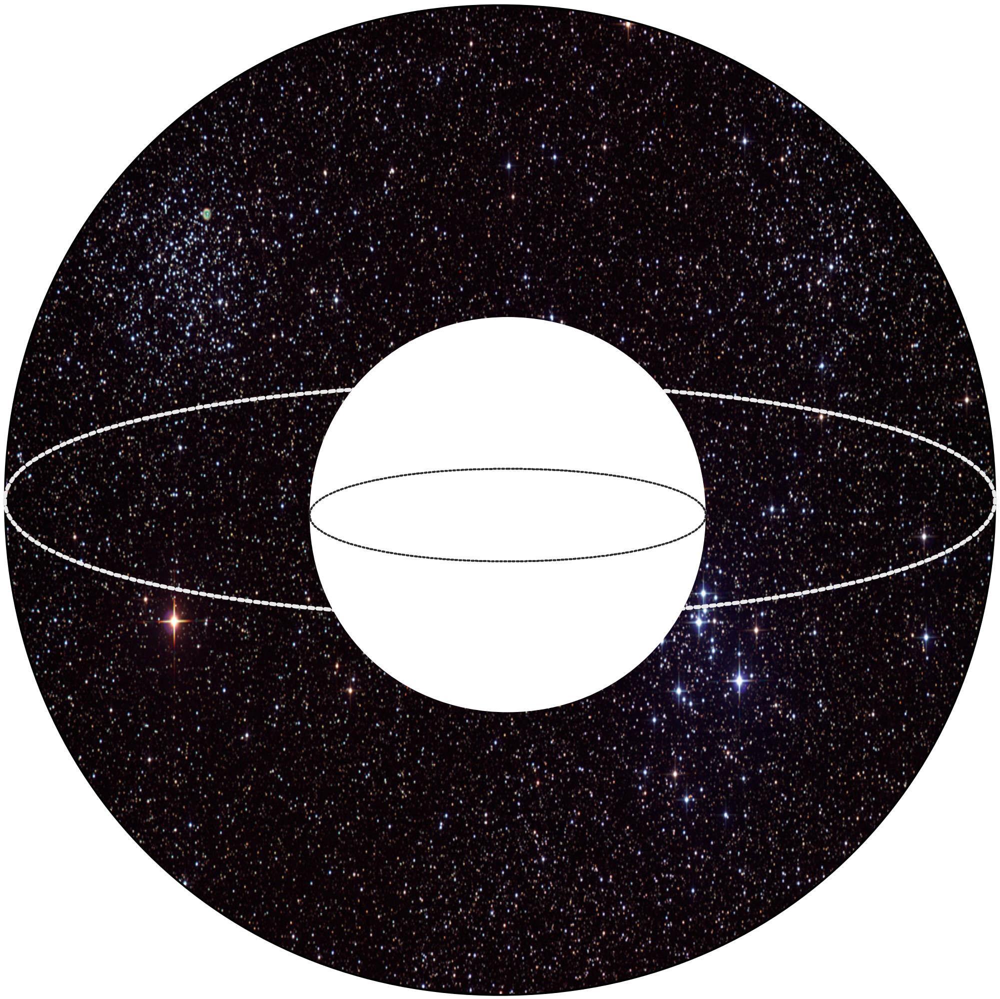
$H_1(\text{nudo en } S^3) = Z$

El primer grupo de homología puede distinguir algunas variedades pero no todas.

Primer grupo de homología

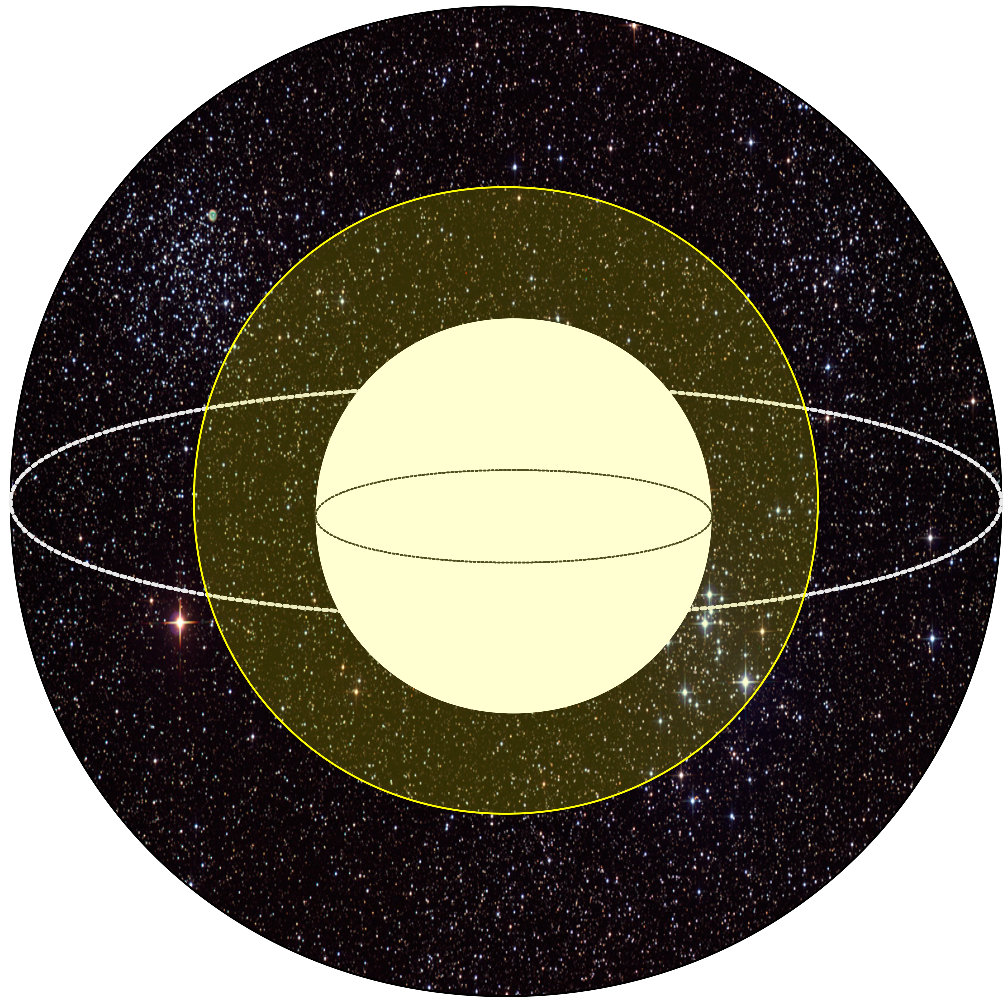


Otro tipo de Hoyos



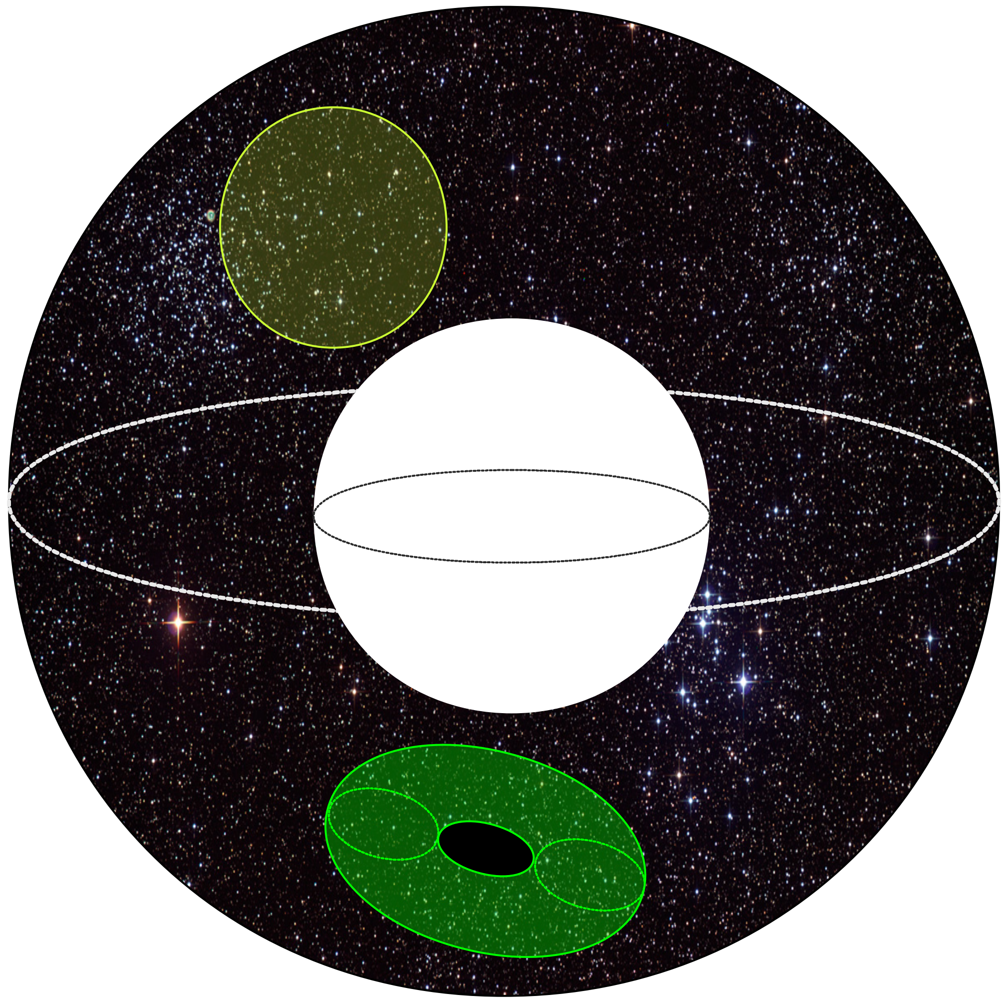
$S^2 \times R$

Otro tipo de Hoyos



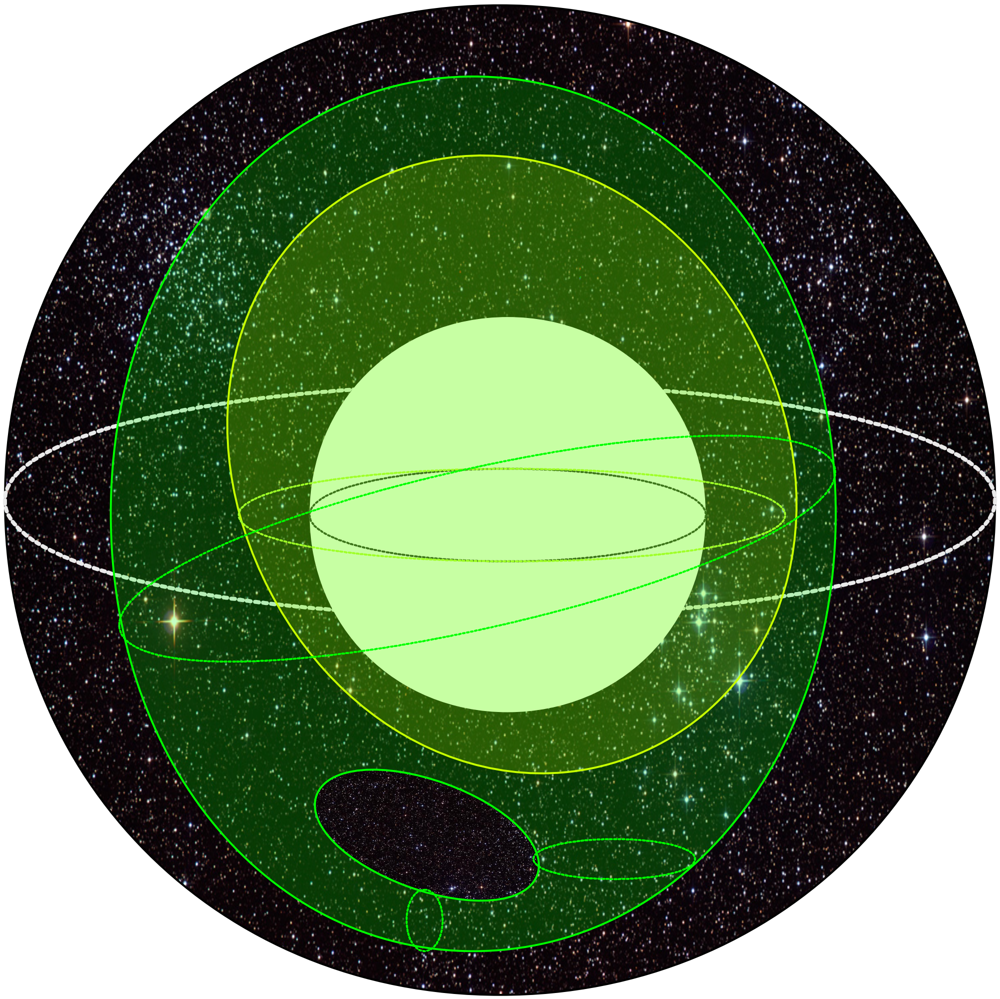
Pueden capturarse usando superficies en lugar de curvas

Una superficies en una variedad es *homologa a 0* si bordea un pedazo de la variedad



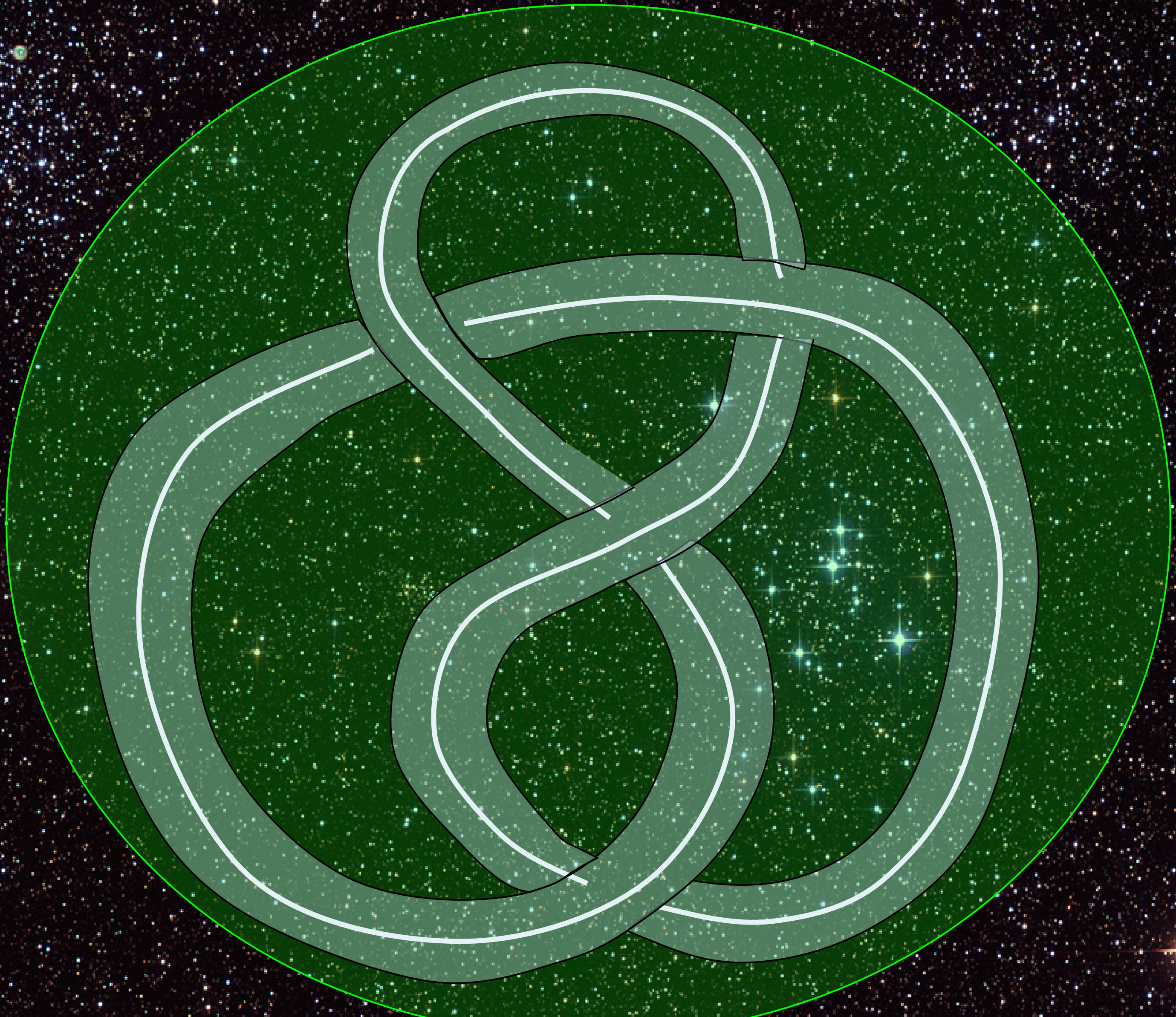
Estas superficies no encierran ningun hoyo

Dos superficies en una variedad son *homologas* si entre las dos bordean un pedazo de la variedad

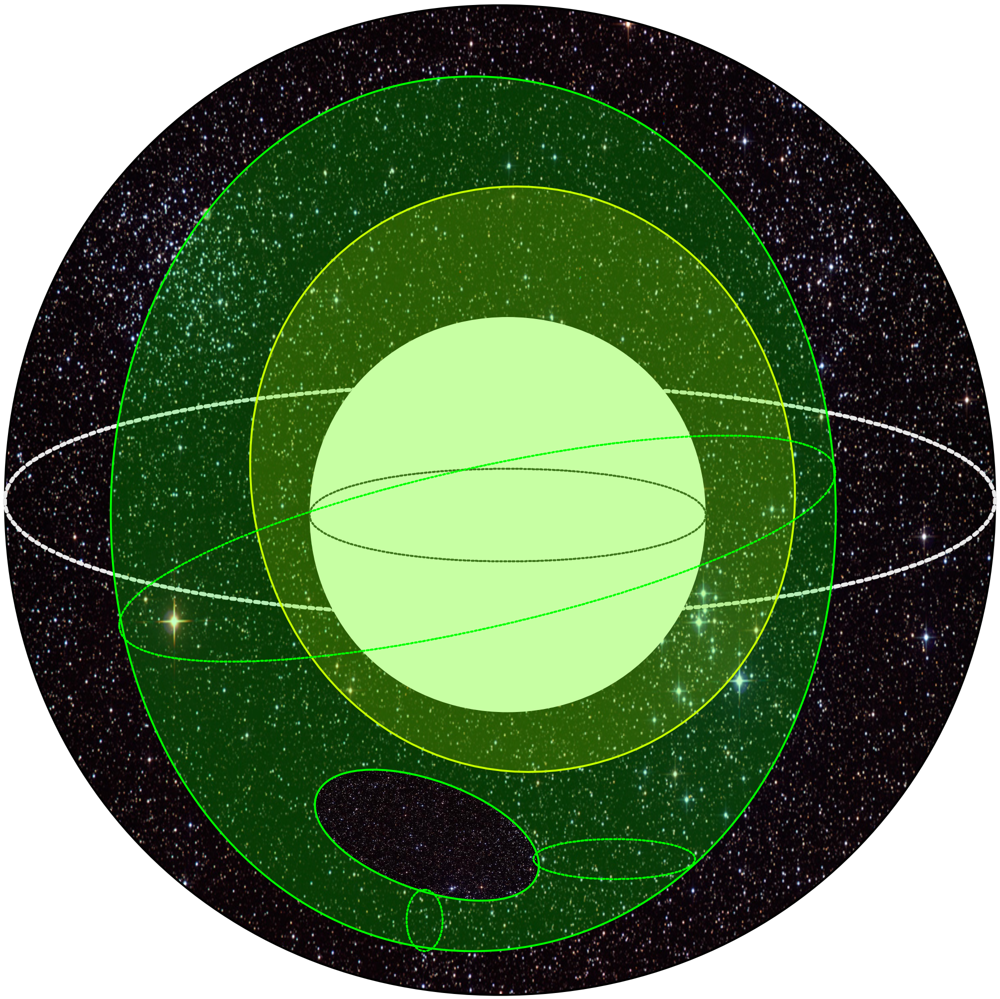


Estas superficies encierran el mismo hoyo

Superficies homólogas

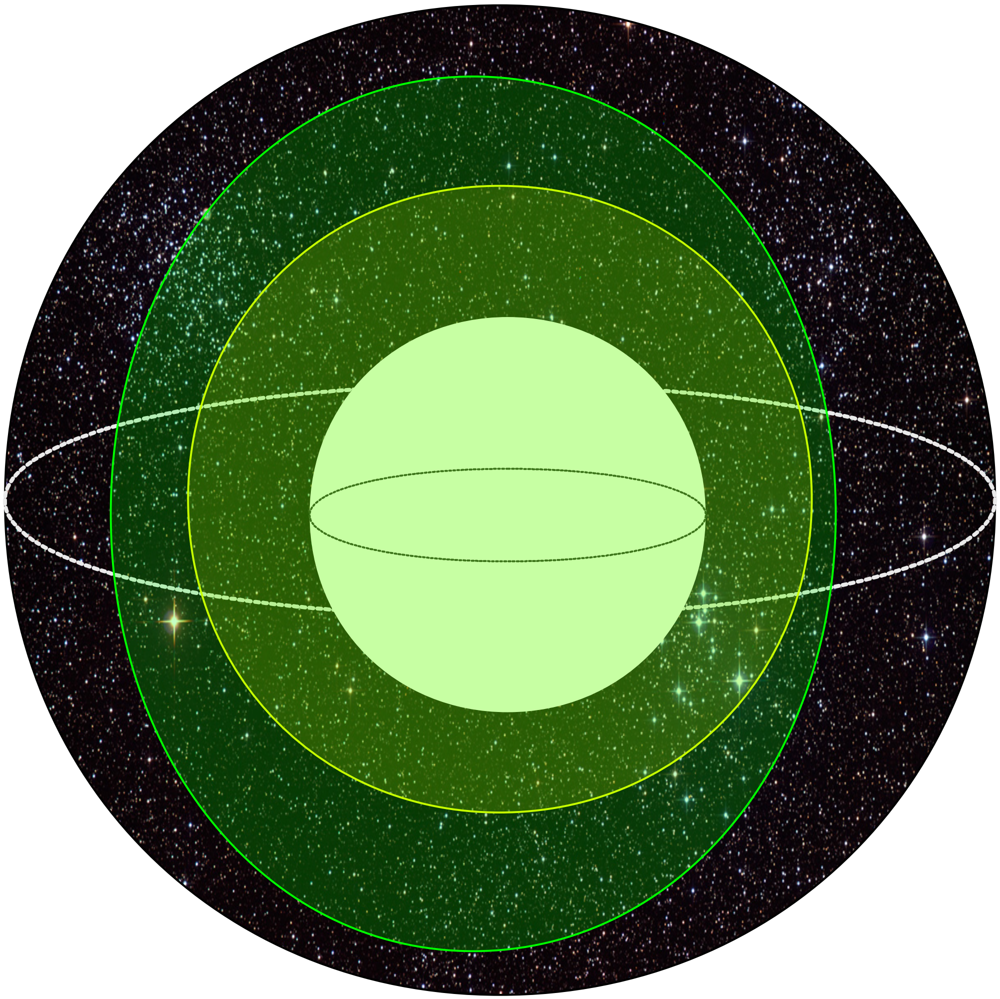


Ser homólogas es una relación de equivalencia entre superficies, las clases de equivalencia son *clases de homología*

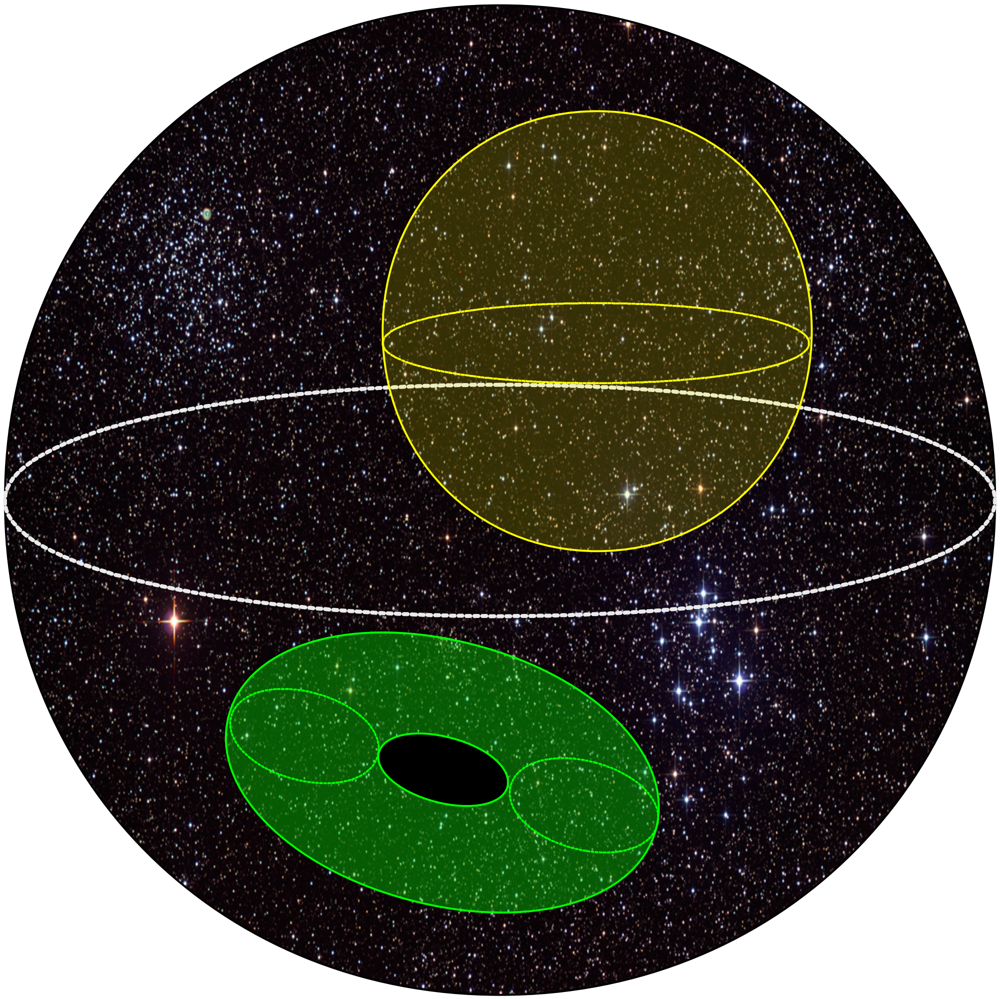


Las clases de homología se pueden sumar y forman un grupo:

el segundo grupo de homología



Segundo grupo de homología

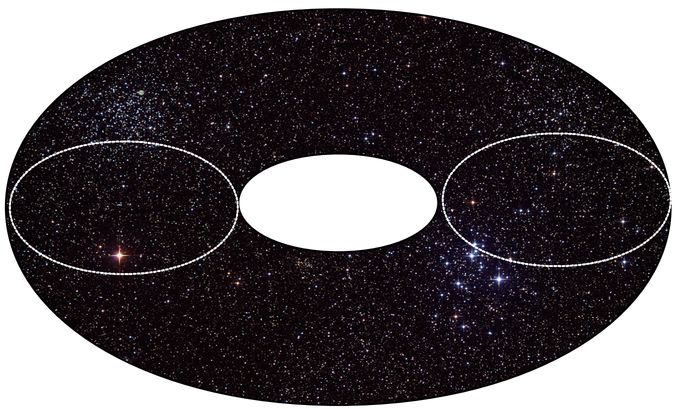


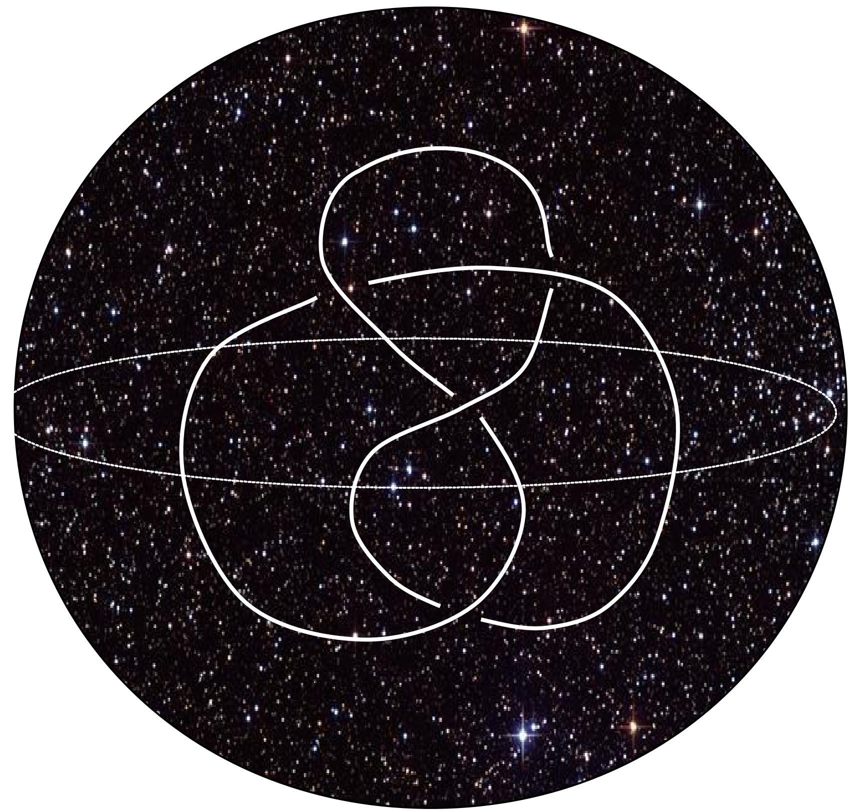
$$H_2(R^3) = H_2(S^3) = 0$$

Segundo grupo de homología

$$H_2(\text{cubo con asas}) = 0$$

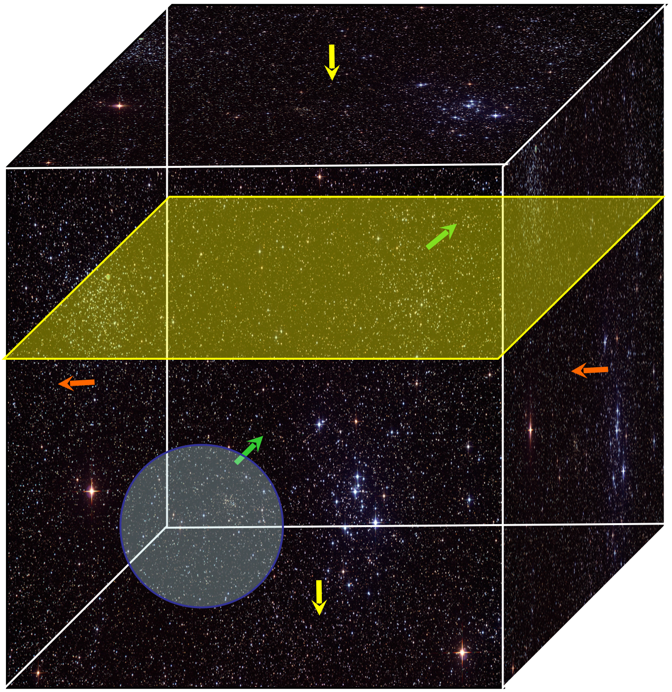
Segundo grupo de homología



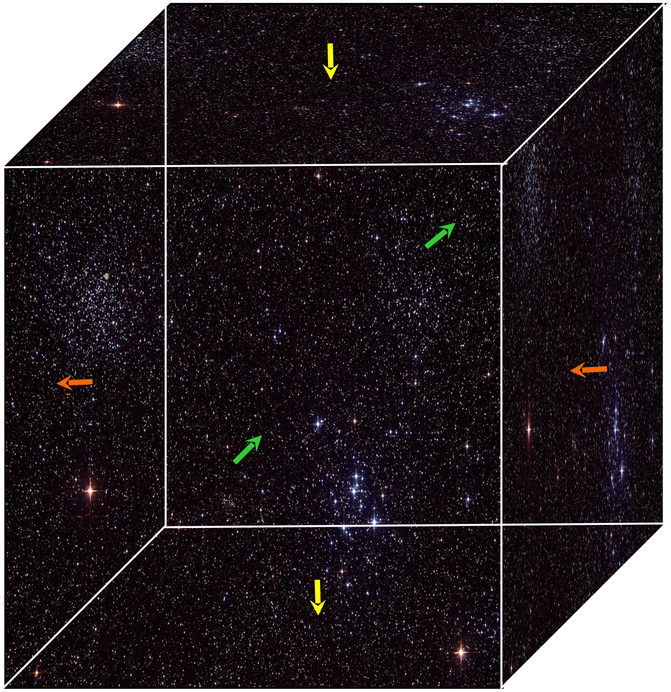


$H_2(\text{dona}) \quad = \quad H_2(\text{exterior de nudo en } S^3) \quad = \quad 0$

Segundo grupo de homología

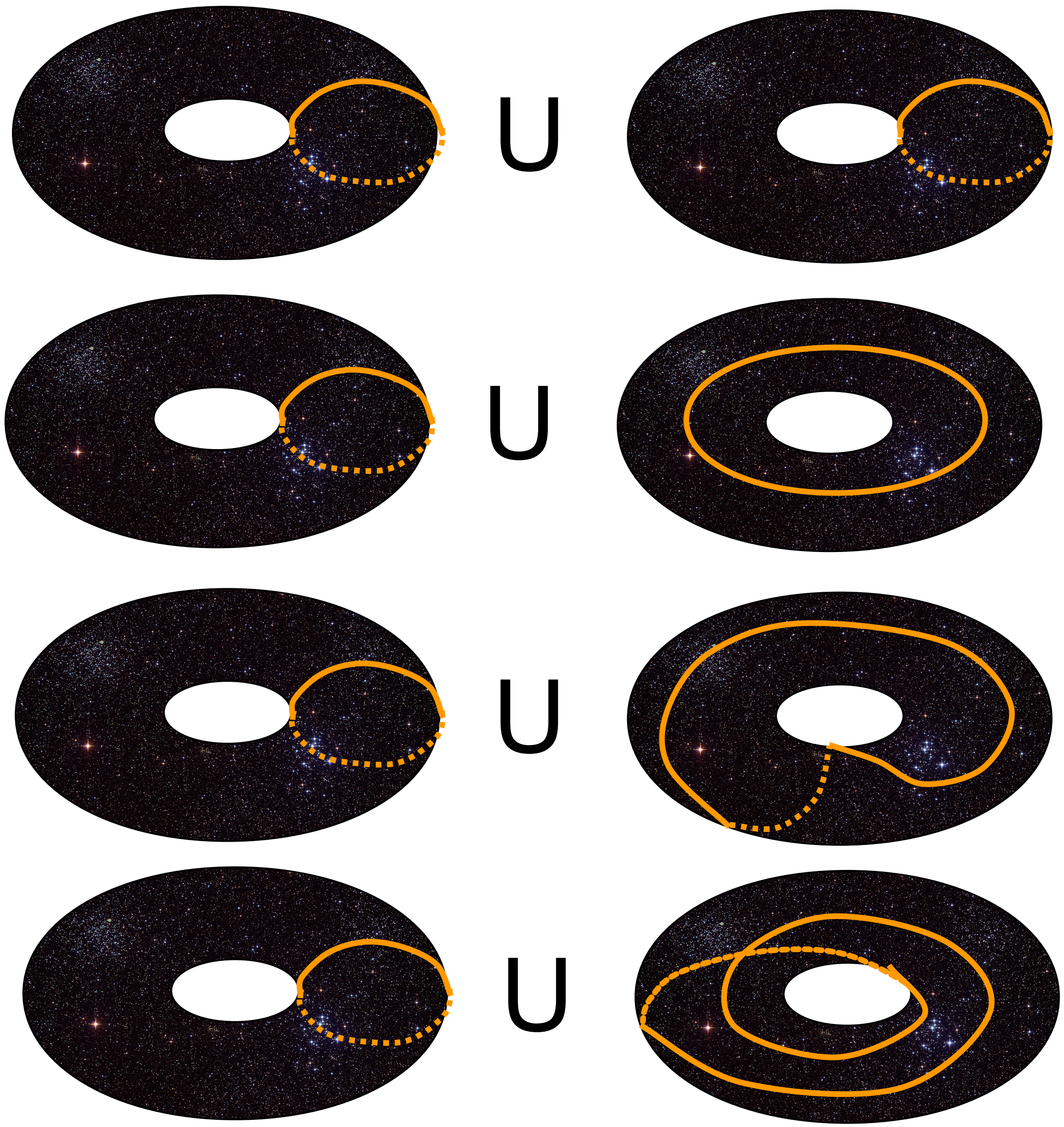


Segundo grupo de homología



$$H_2(T^3) = Z+Z+Z$$

Segundo grupo de homología



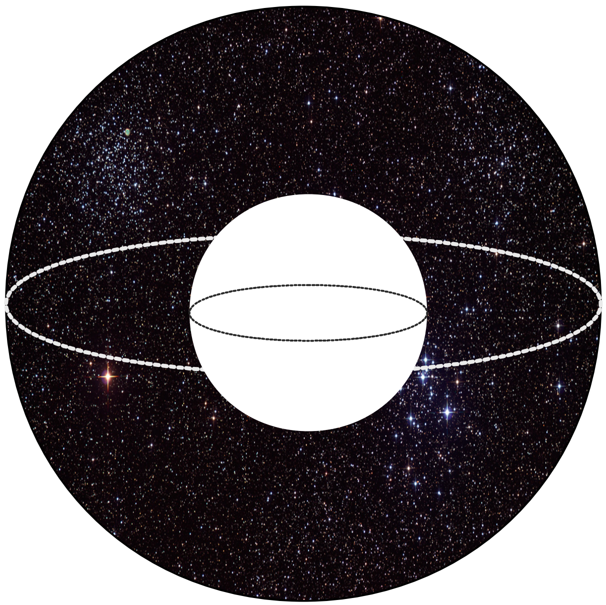
$H_2 = Z$

$H_2 = 0$

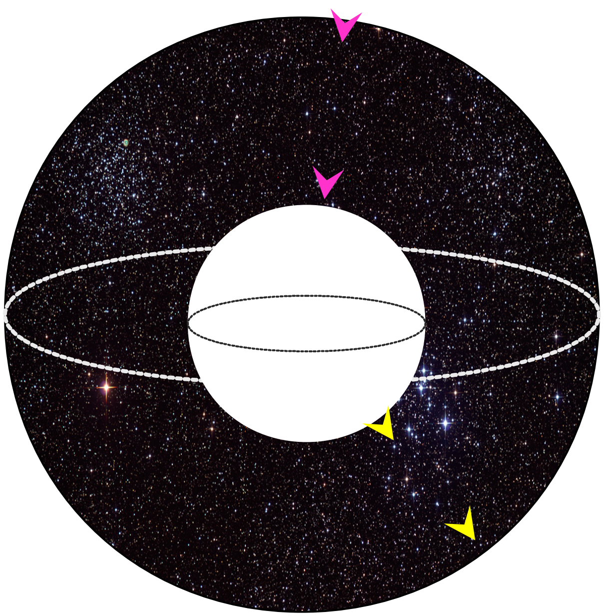
$H_2 = 0$

$H_2 = 0$

! Hay un tercer grupo de homología !



$H_3(S^2 x R) = 0$



$H_3(S^2 x S^1) = Z$

Distingue a las variedades cerradas *orientables* de las variedades abiertas o *no orientables*

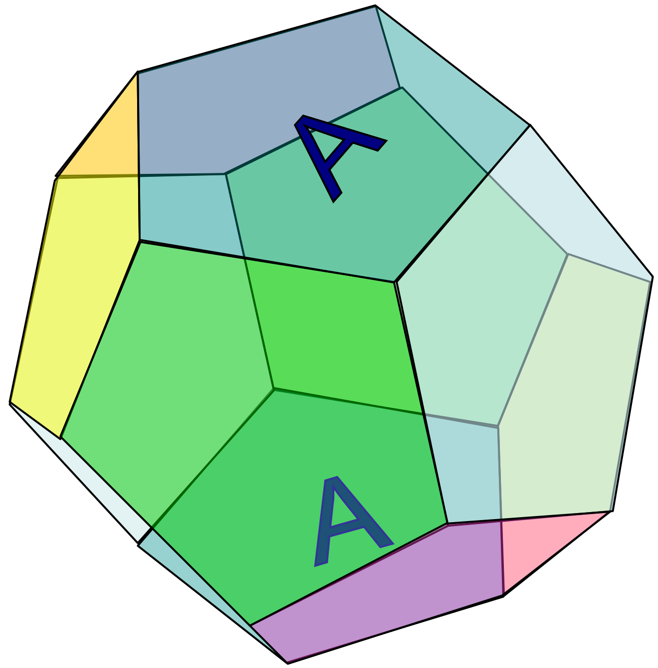
Homología

¿Qué tanto distinguen los grupos de homología a las 3-variedades?

Poincare (~1900):

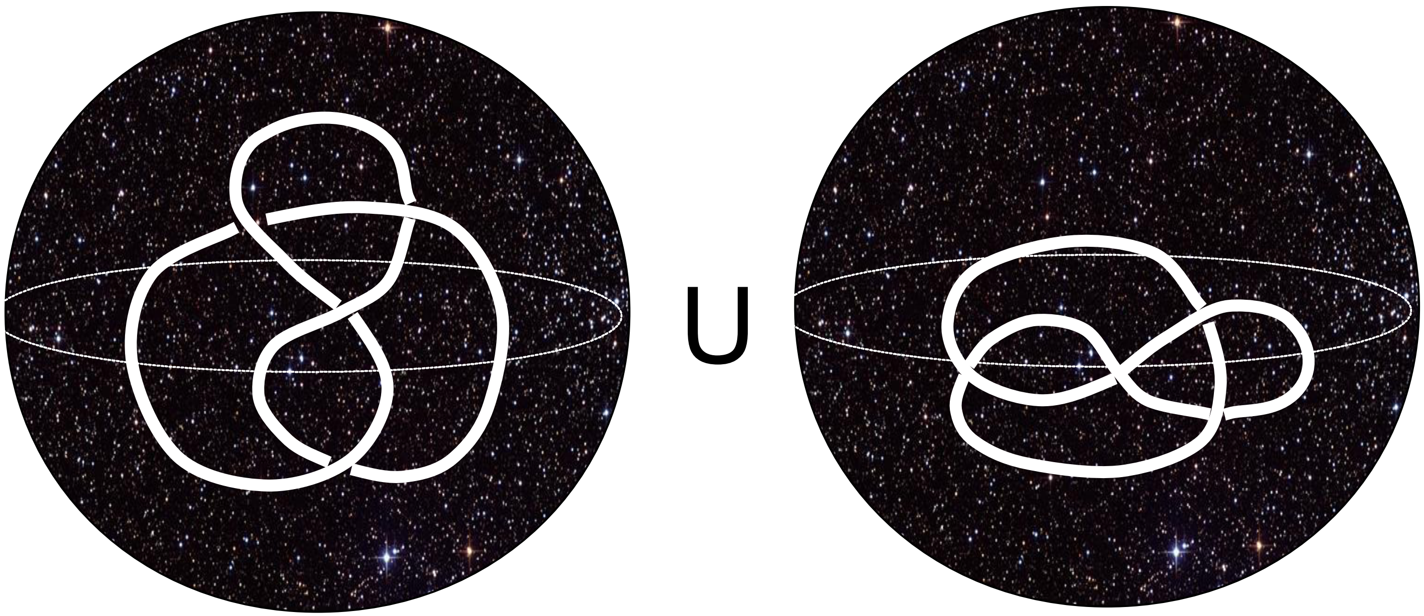
¿Será cierto que una 3-variedad cerrada que tenga los mismos grupos de homología que S^3 *tiene que ser* S^3*?*

La esfera homológica de Poincaré:



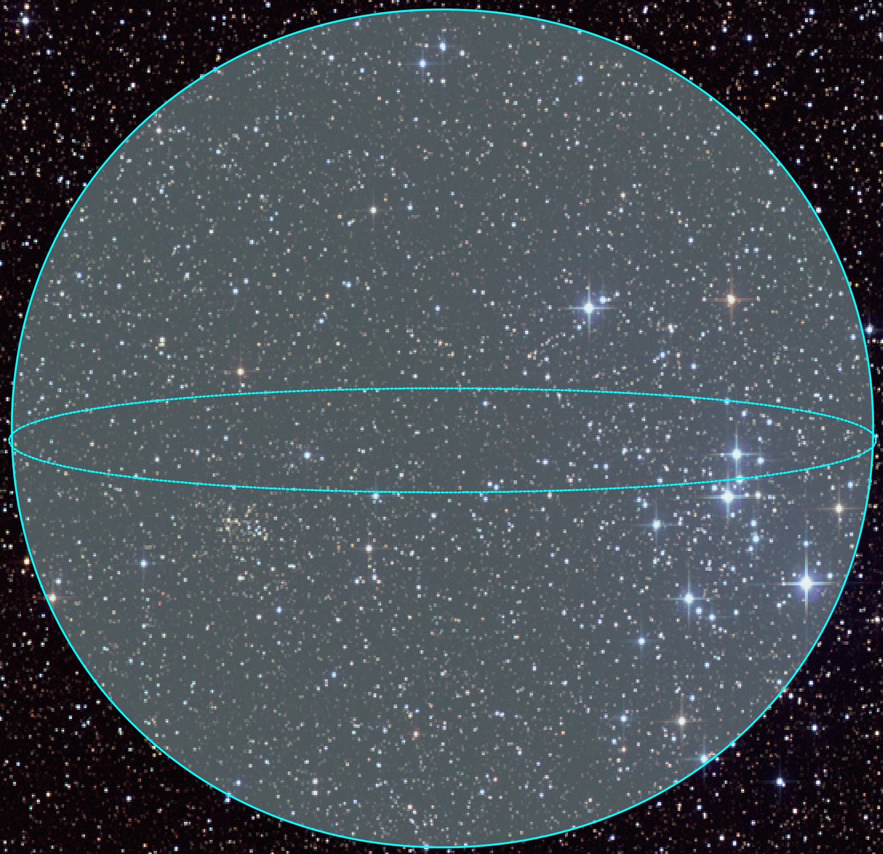
se obtiene de un dodecaedro identificando los lados opuestos (con un giro de 1/10 de vuelta).

Otras esferas homológicas distintas de S^3:



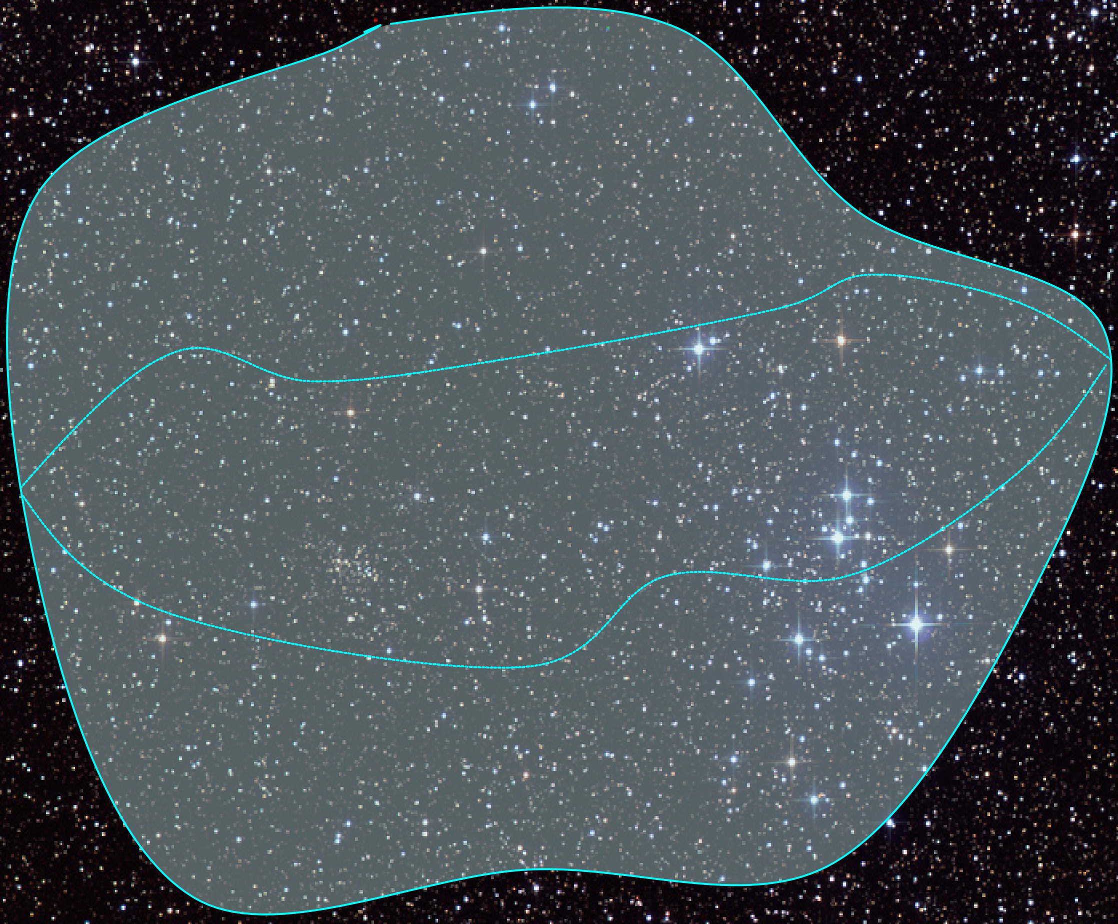
Se obtienen uniendo los exteriores de dos nudos de modo que el meridiano de uno se pegue a la longitud del otro.

En $\mathbb{R}^3$ cada esfera suave bordea una bola

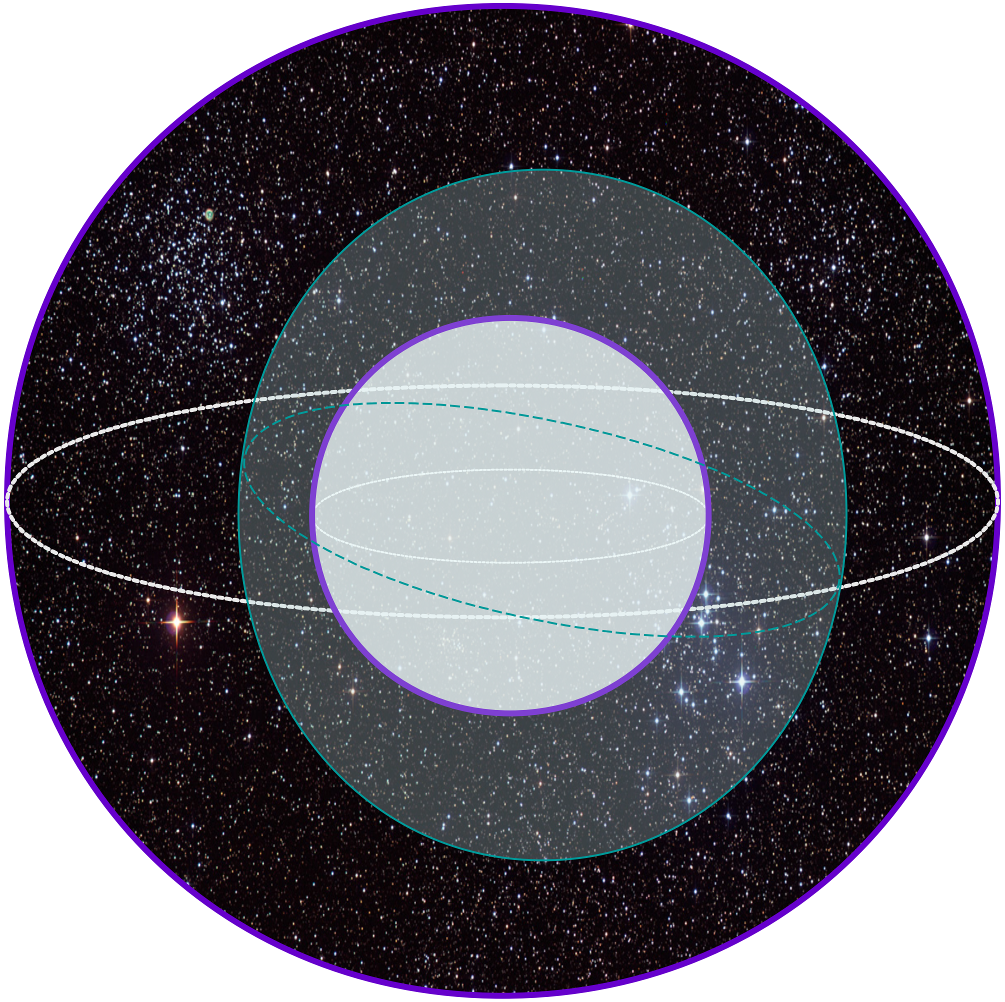


En R^3 cada esfera suave bordea una bola

En S^3 cada esfera suave bordea dos bolas



En $S^2 \times S^1$ y $S^2 \times R$ hay esferas que no bordean bolas



Una 3-variedad M es *irreducible* si cada esfera en M bordea una bola en M.

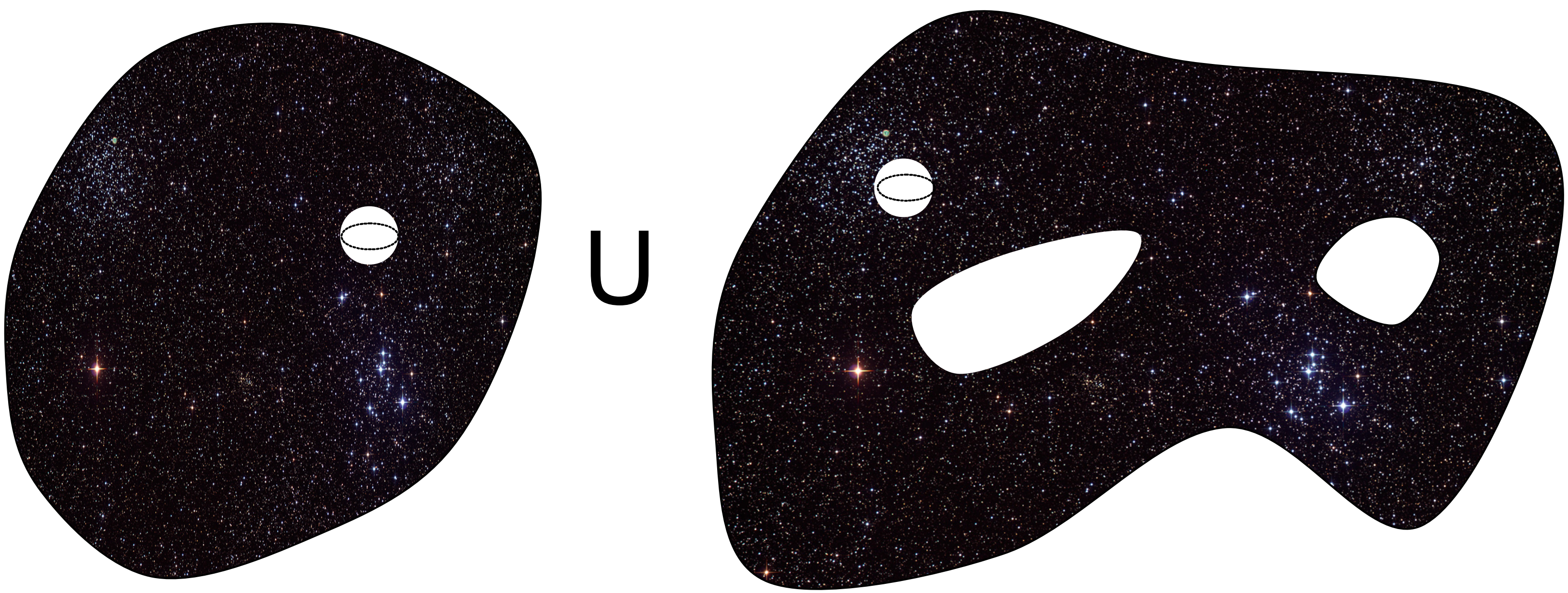
Ejemplos de 3-variedades Irreducibles:

- R^3, S^3
- Cubos con asas
- Exteriores de nudos
- Espacios lente

Una 3-variedad M es *irreducible* si cada esfera en M bordea una bola en M.

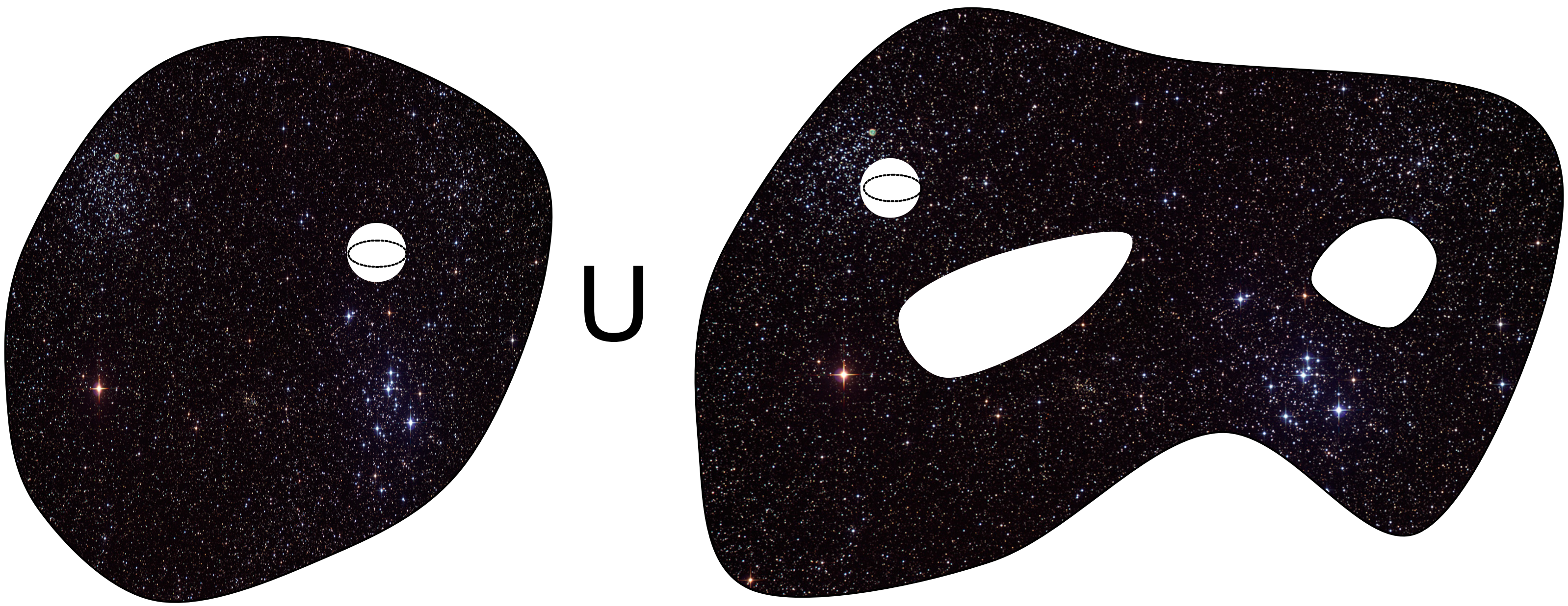
Ejemplos de Variedades *Reducibles*:

- $S^2 \times R$, $S^2 \times S^1$
- La suma de dos variedades distintas de S^3



Lema. Una 3-Variedad es irreducible si y solo si

- Es prima (no es suma de dos variedades distintas de S^3)
- Es distinta de $S^2 \times S^1$ y $S^2 \bar{\times} S^1$

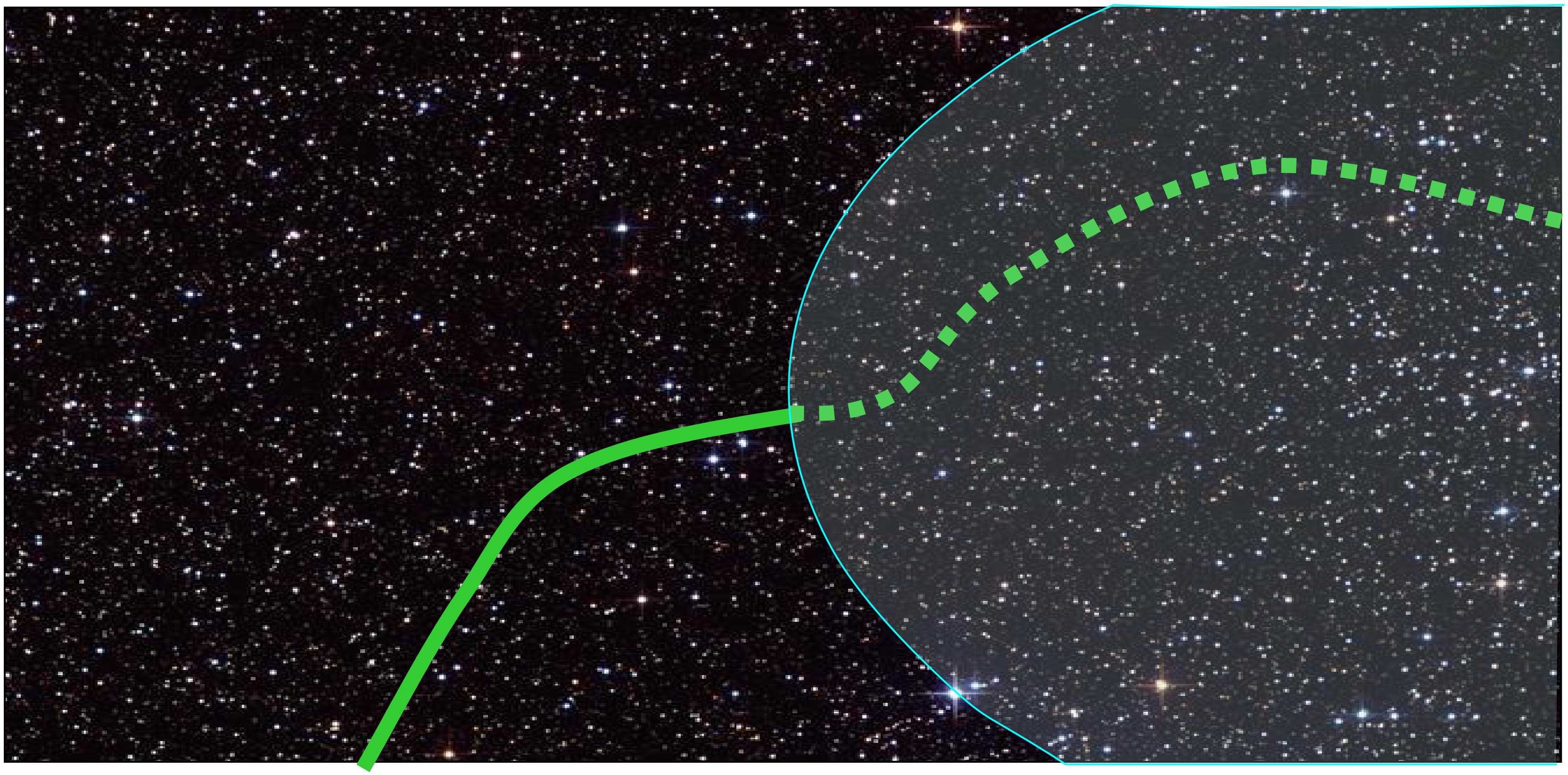


Lema. Una 3-Variedad es irreducible si y solo si

- Es prima (no es suma de dos variedades distintas de S^3)
- Es distinta de $S^2 \times S^1$ y $S^2 \bar{\times} S^1$

Lema. Una 3-Variedad es irreducible si y solo si

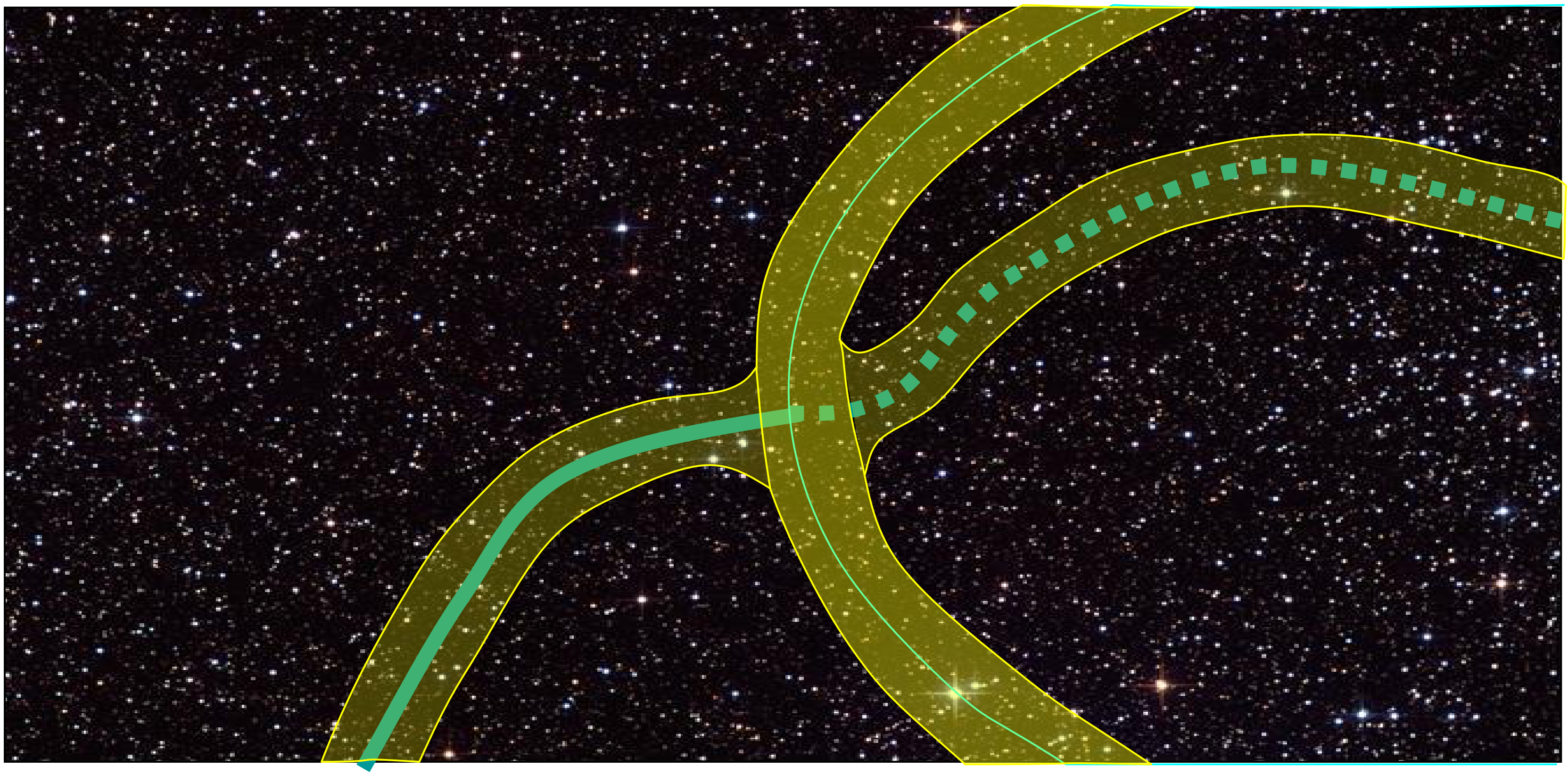
- Es prima (no es suma de dos variedades distintas de S^3)
- Es distinta de $S^2 \times S^1$ y $S^2 \tilde{\times} S^1$



Si hay una esfera no separante, hay una trayectoria que va de un lado al otro sin cruzarla.

Lema. Una 3-Variedad es irreducible si y solo si

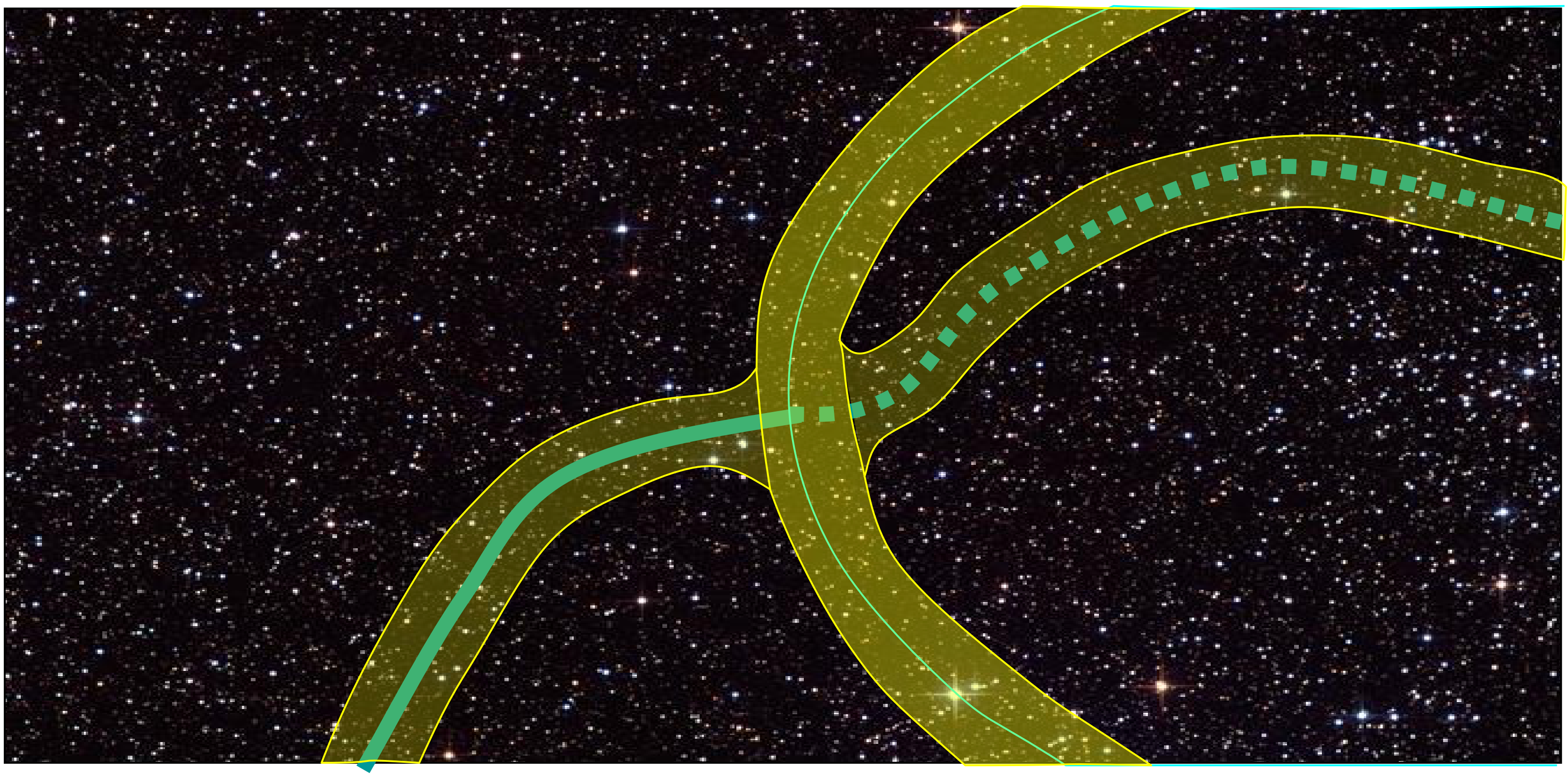
- Es prima (no es suma de dos variedades distintas de S^3)
- Es distinta de $S^2 \times S^1$ y $S^2 \bar{\times} S^1$



Con dos copias paralelas de la esfera y un tubo a lo largo de la trayectoria se construye una esfera que separa a la variedad (en una parte amarilla y otra negra).

Lema. Una 3-Variedad es irreducible si y solo si

- Es prima (no es suma de dos variedades distintas de S^3)
- Es distinta de $S^2 \times S^1$ y $S^2 \bar{\times} S^1$



La variedad es la suma de las variedades que resultan de taparles los hoyos a la parte amarilla y a la negra. La variedad amarilla es $S^2 \times S^1$ o $S^2 \bar{\times} S^1$.