3-variedades

Max Neumann Coto
Instituto de Matemáticas UNAM
Cuernavaca

5. Geometrización

¿Cuáles es la forma del espacio?

¿Cuáles es la forma del espacio?

(esta pregunta no puede contestarse usando únicamente matemáticas)

¿Cuáles es la forma del espacio?

¿Cuáles son la posibles formas de un espacio que locamente parece tener la misma forma que R^3?

¿Cuáles es la forma del espacio?

¿Cuáles son la posibles formas (topológicas) de un espacio (topológico) que locamente tiene la forma (topológica) de R^3?

3-variedades

De todas las formas topológicas posibles de 3-variedades, no habrá algunas que sean “mas naturales” que otras como modelos del espacio?

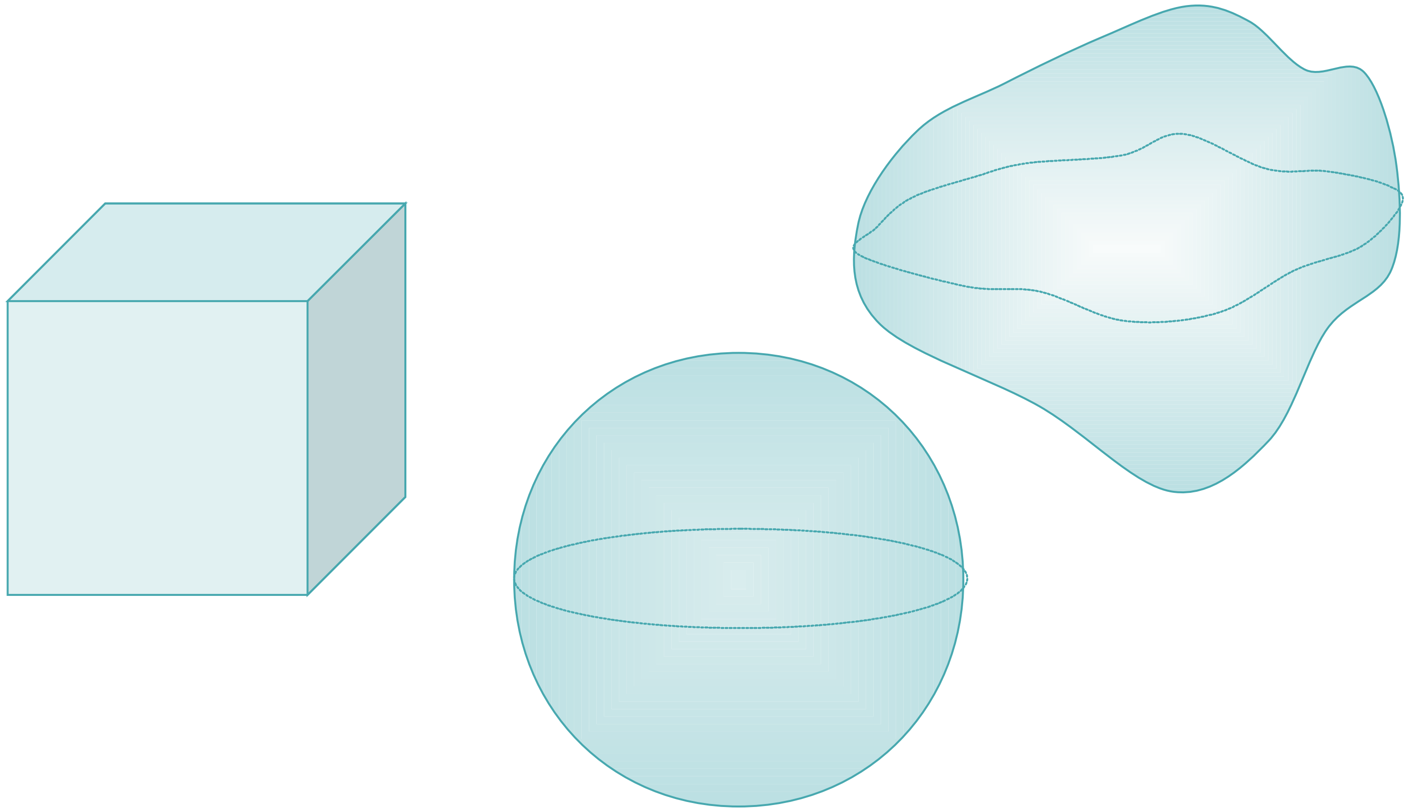

El espacio en que vivimos no sólo se parece localmente al espacio euclidiano en su topología, sino también en su geometría.

La geometría de una variedad esta determinada por su *métrica* (la manera de medir)

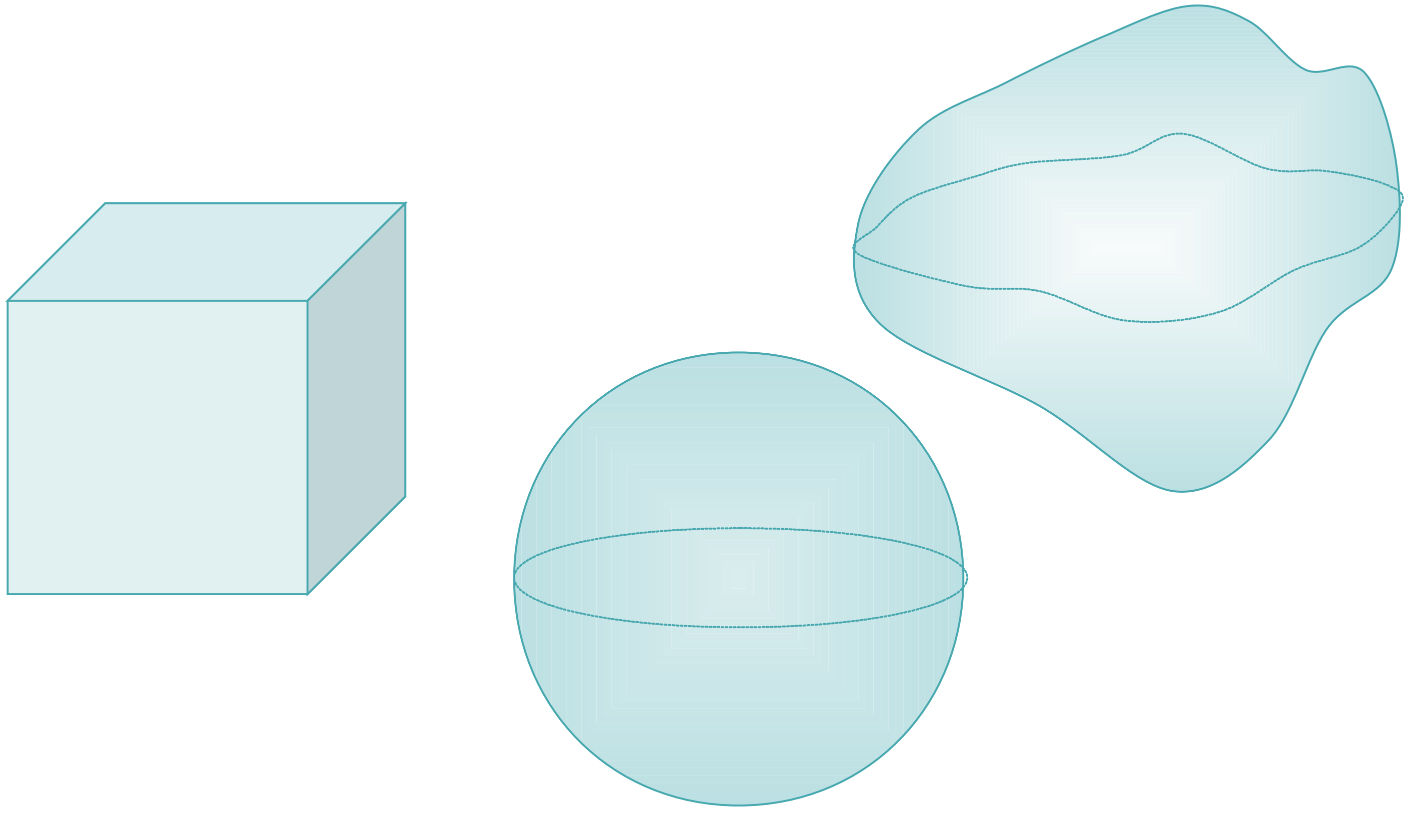
Misma forma topológica: una puede deformarse a la otra.

Distinta forma geométrica: Las proporciones son distintas

A cada forma topológica le corresponden muchas formas geométricas distintas.

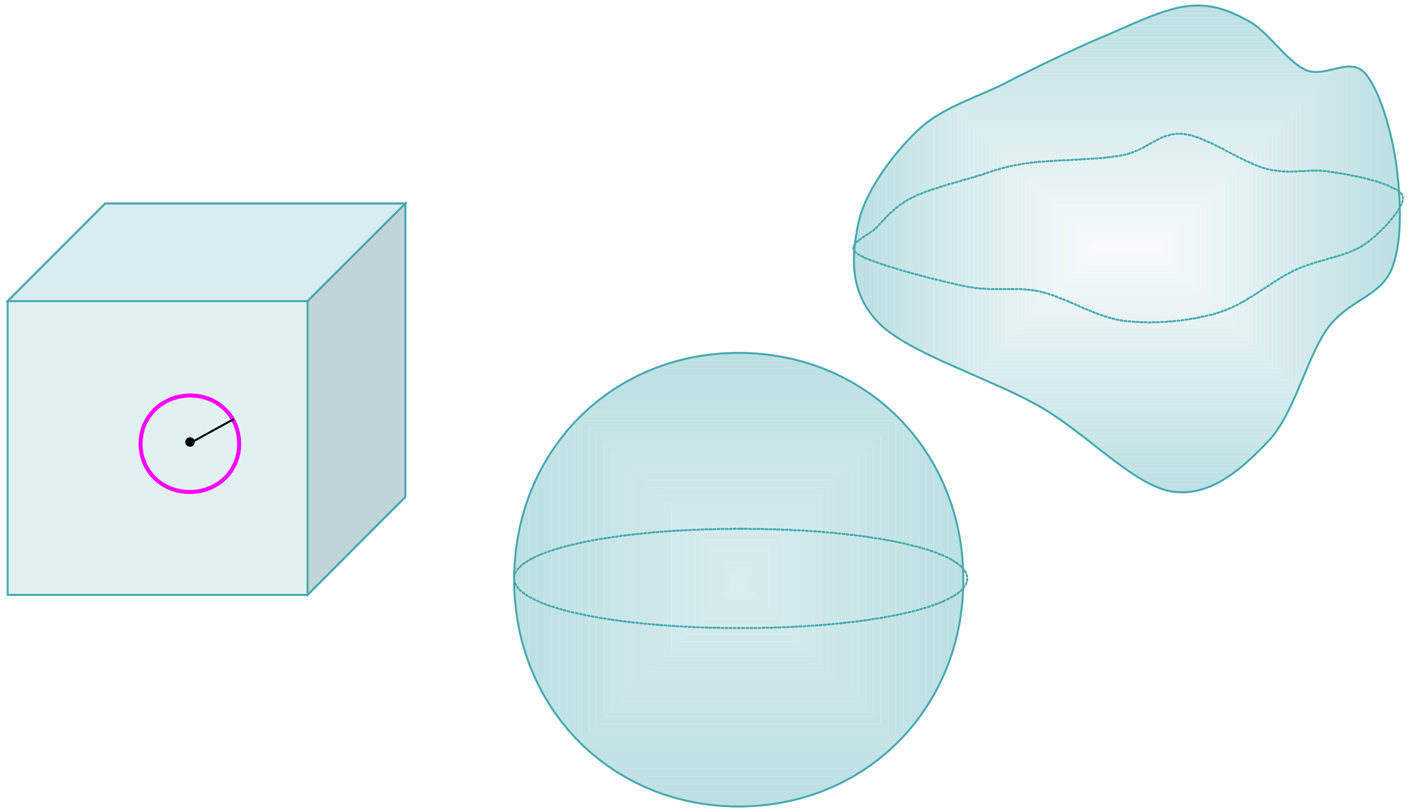


A cada forma topológica le corresponden muchas formas geométricas distintas.



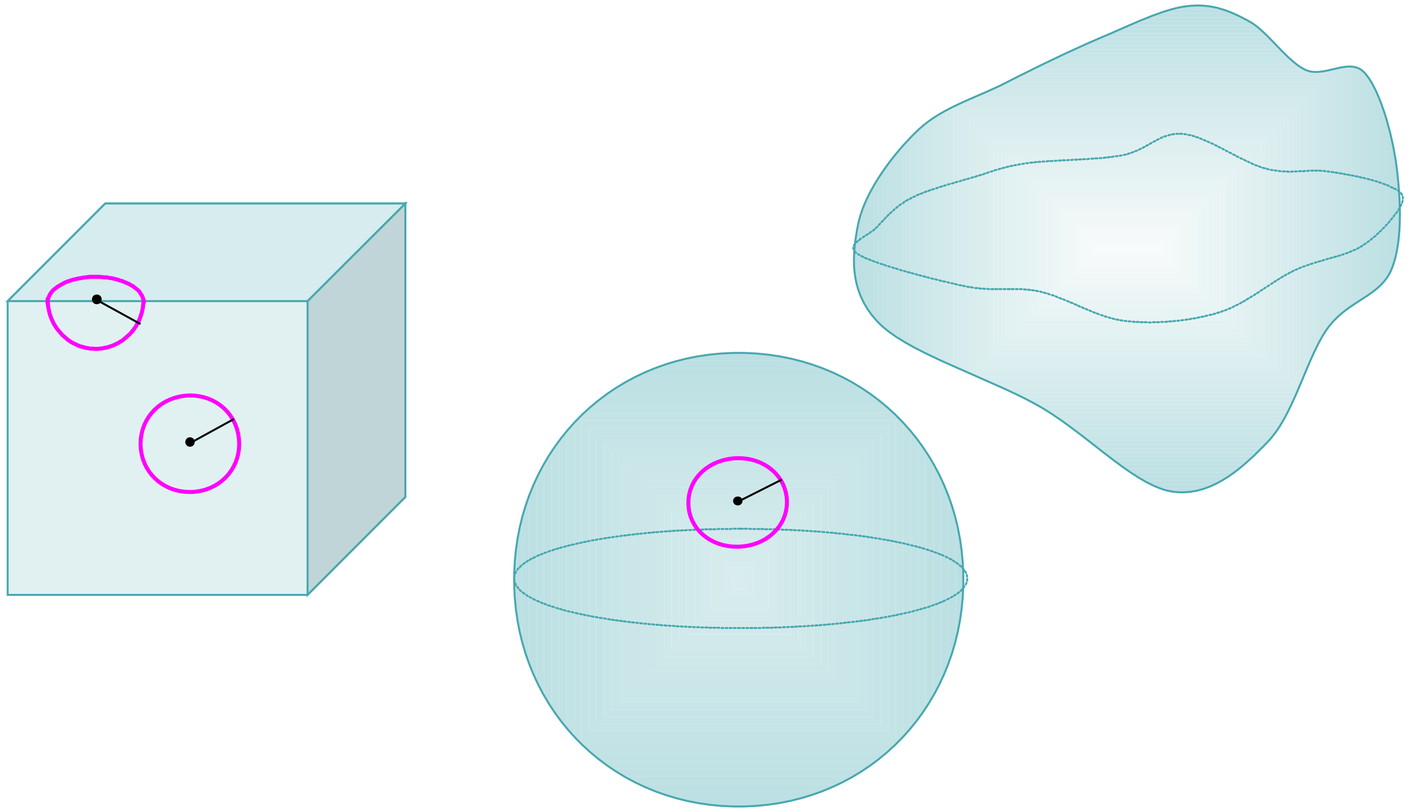
¿Es posible reconocer las distintas formas *desde adentro*?

A cada forma topológica le corresponden muchas formas geométricas distintas.



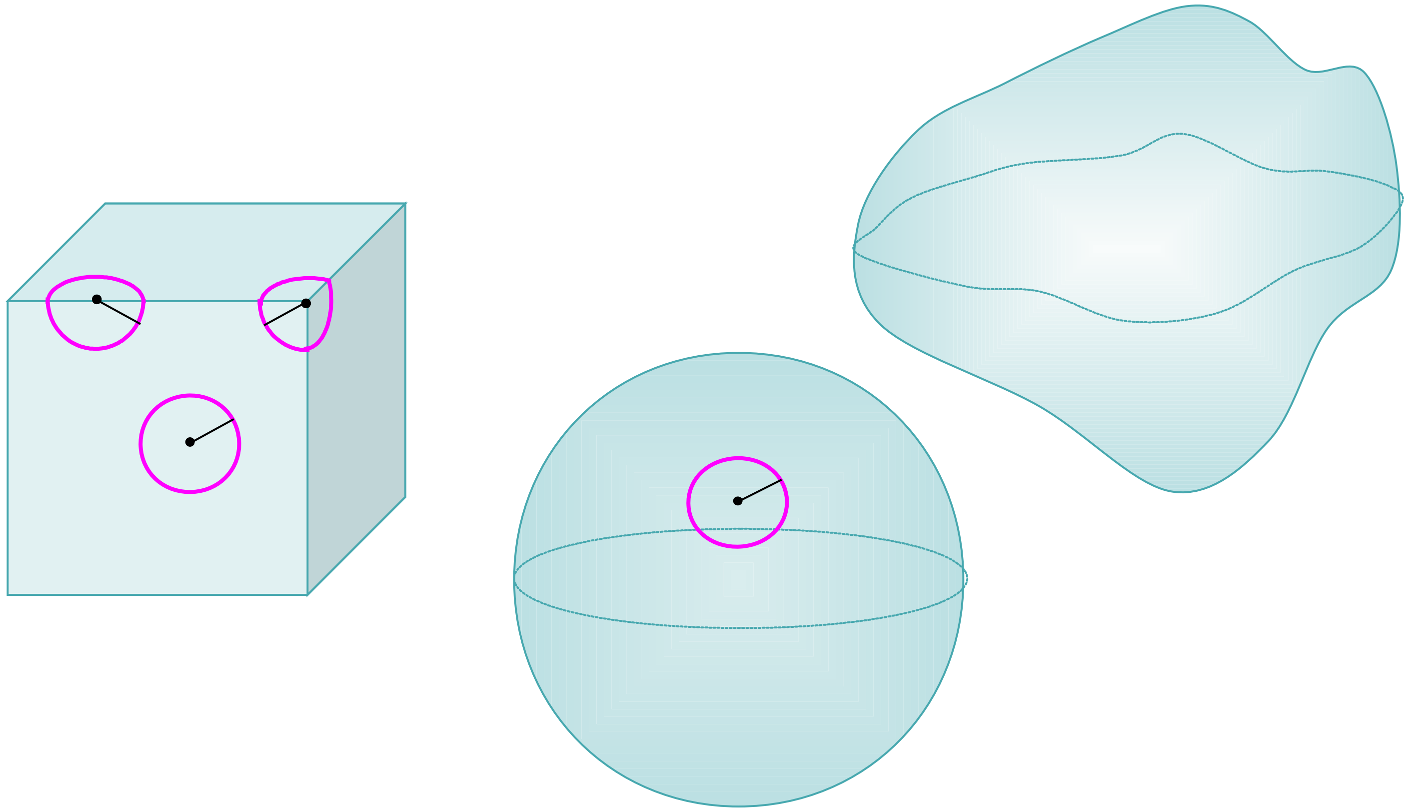
Veamos la métrica…

A cada forma topológica le corresponden muchas formas geométricas distintas.



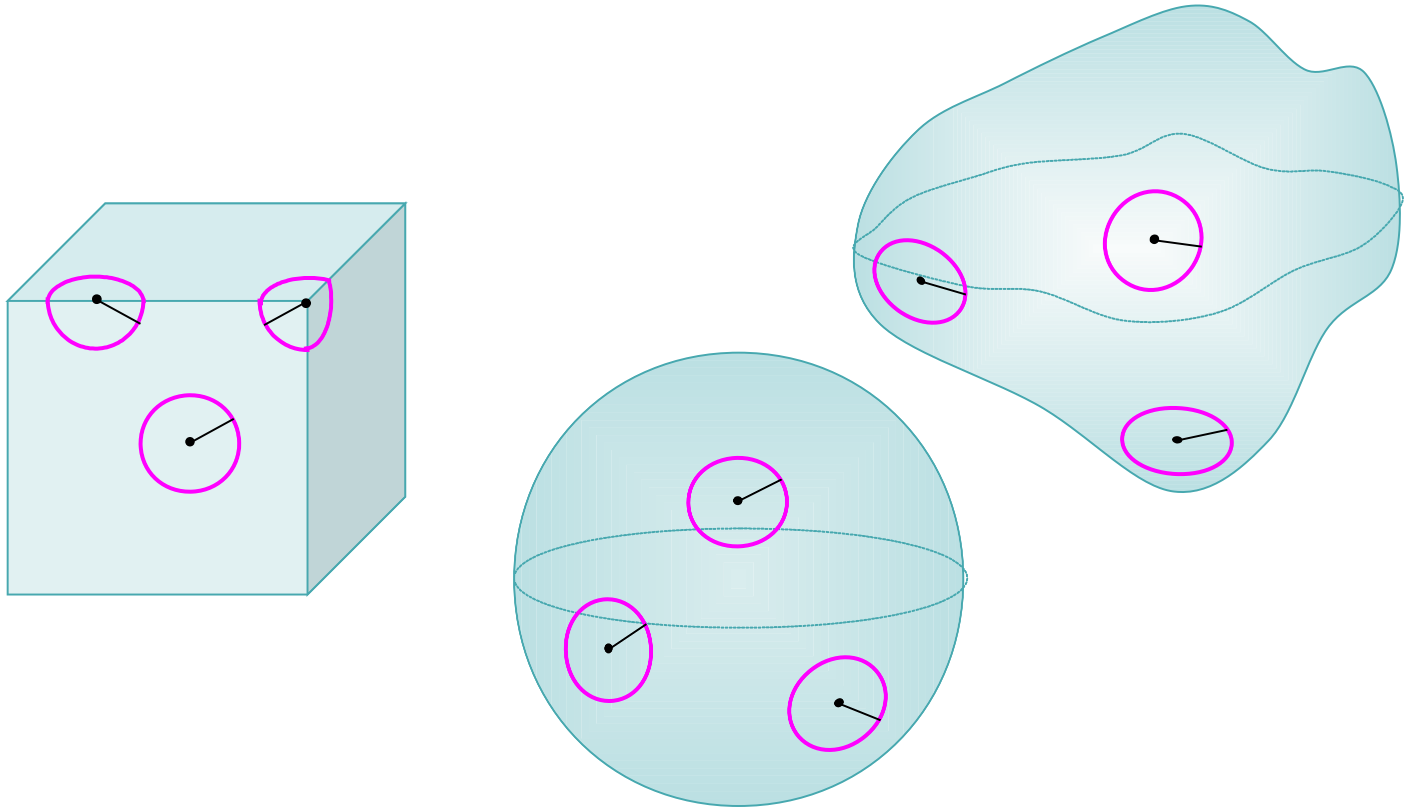
La métrica es distinta

A cada forma topológica le corresponden muchas formas geométricas distintas.

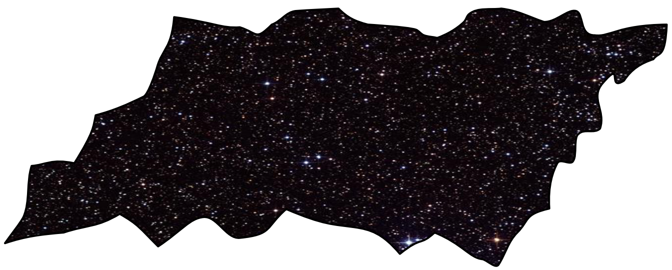


La métrica es distinta

A cada forma topológica le corresponden muchas formas geométricas distintas.



La métrica es distinta



Métrica

Métrica suave

Métrica homogénea

Al cambiar la métrica cambia la forma geométrica

Métricas homogéneas

Una métrica en una variedad es *localmente homogénea* todos los puntos de la variedad tienen vecindades geométricamente idénticas (isométricas).

.

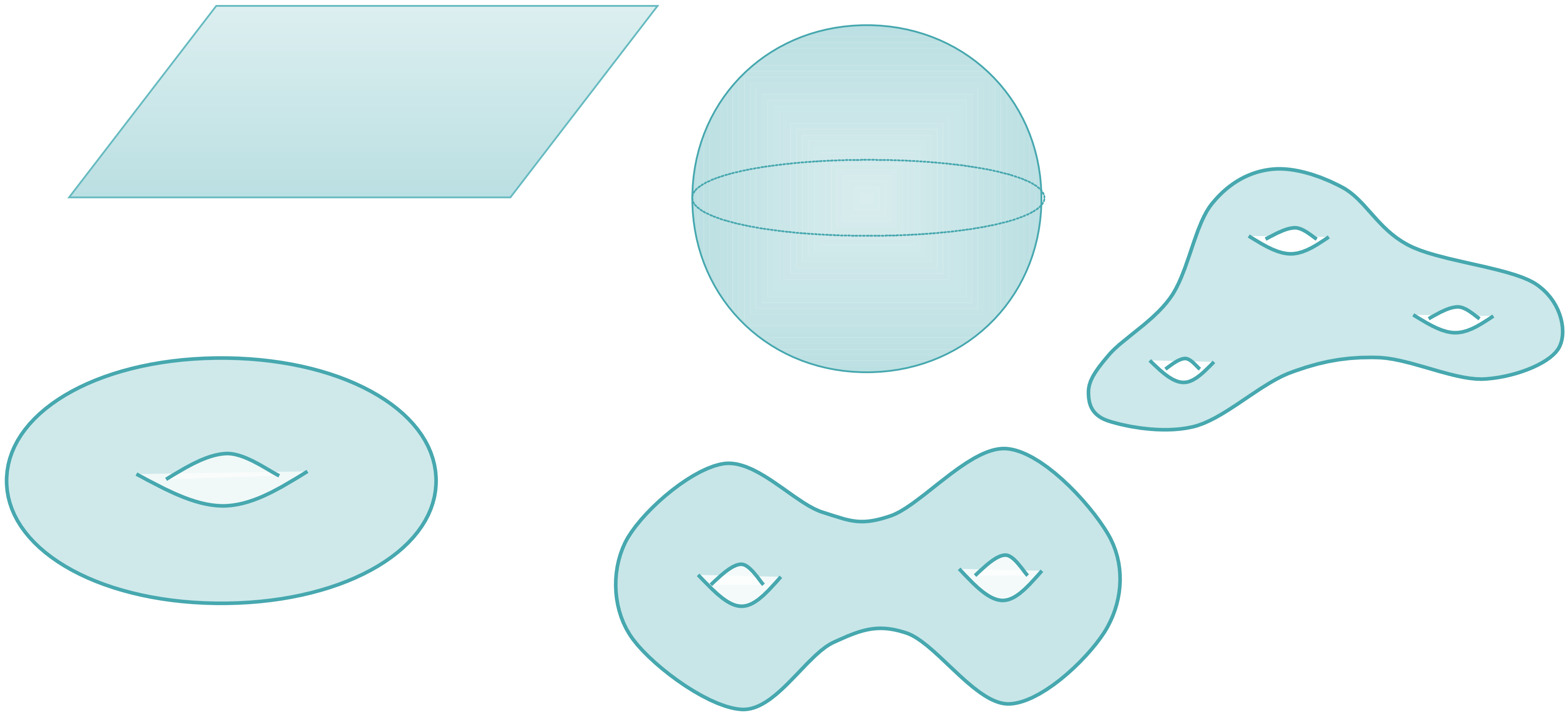
Métricas homogéneas

Una métrica en una variedad es *localmente homogénea* todos los puntos de la variedad tienen vecindades geométricamente idénticas (isométricas).

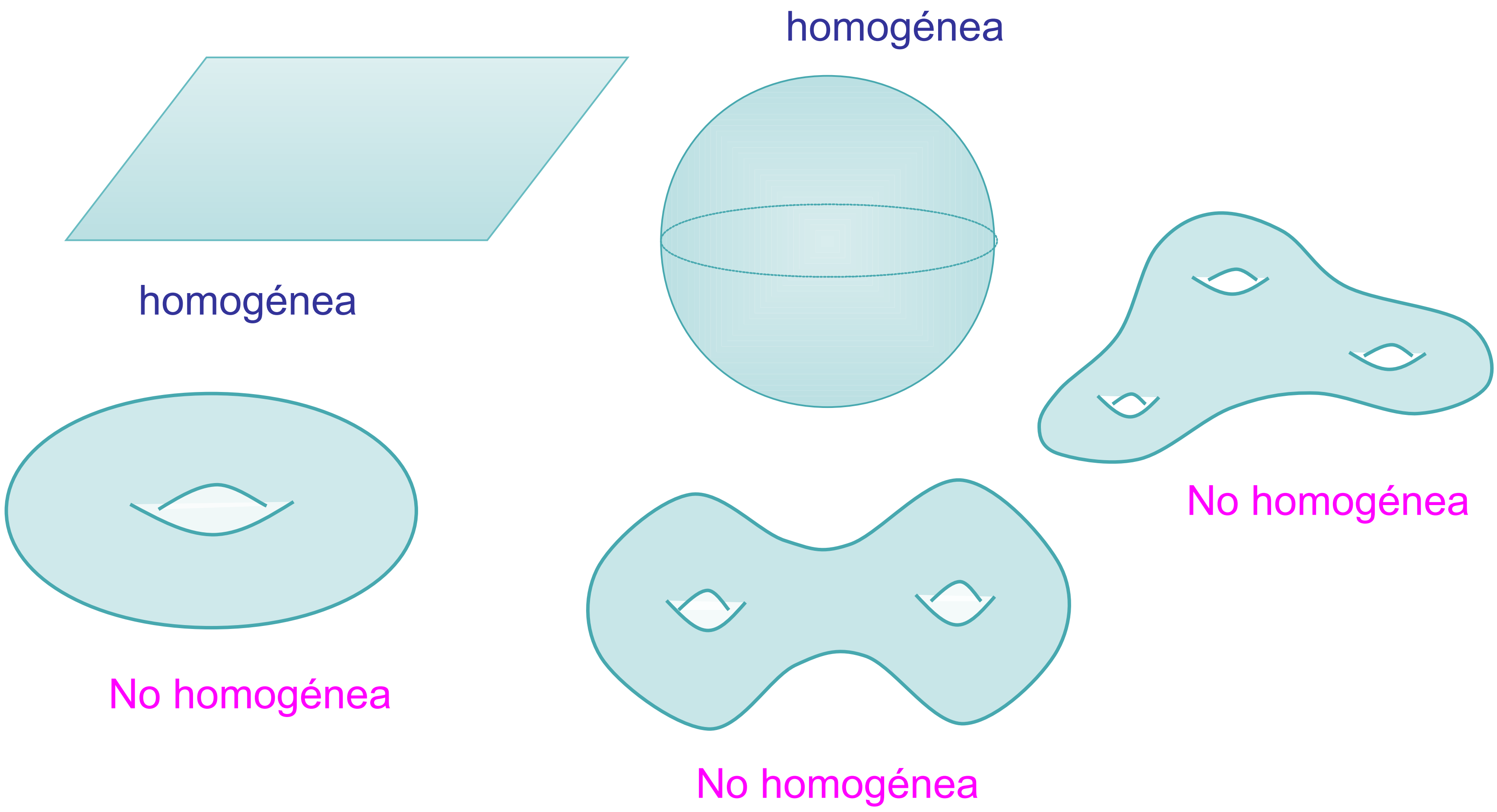
El espacio donde vivimos parece homogéneo.

Las formas topológicas “mas naturales” para un modelo del espacio son las que admiten métricas localmente homogéneas.

2 dimensiones:



2 dimensiones:

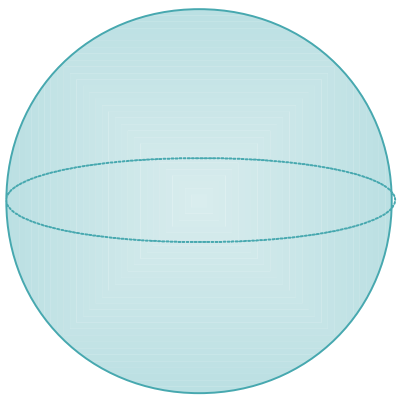


2 dimensiones

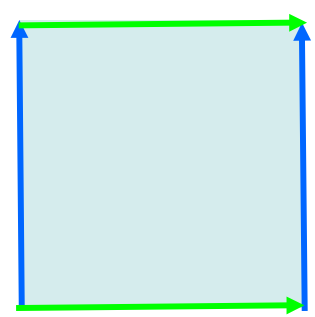
Teorema Todas las 2-variedades cerradas admiten métricas homogéneas.

2 dimensiones

Teorema Todas las 2-variedades cerradas admiten métricas homogéneas.



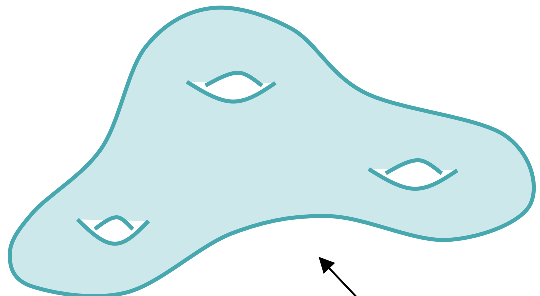
≈

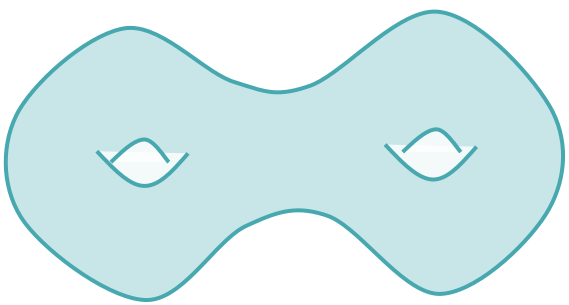


Métrica plana (localmente idéntica a R^2)

2 dimensiones

Teorema Todas las 2-variedades cerradas admiten métricas homogéneas.





No pueden admitir métricas planas ni esféricas, pero admiten métricas *hiperbólicas.*

3 dimensiones

3 dimensiones

El espacio en que vivimos no solo parece localmente homogéneo, sino también *localmente isotrópico* : se ve igual en todas direcciones.

3 dimensiones

El espacio en que vivimos no solo parece localmente homogéneo, sino también *localmente isotrópico* : se ve igual en todas direcciones.

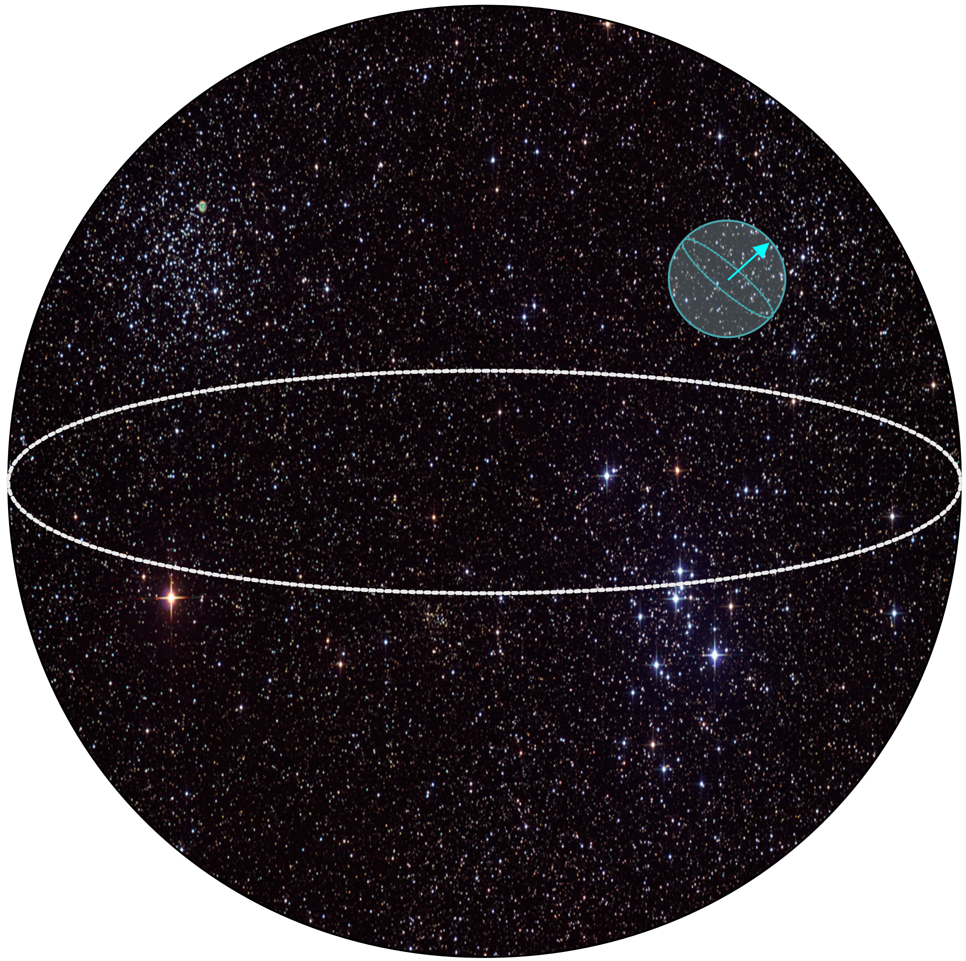
3 dimensiones

El espacio en que vivimos no solo parece localmente homogéneo, sino también *localmente isotrópico* : se ve igual en todas direcciones.

3 dimensiones

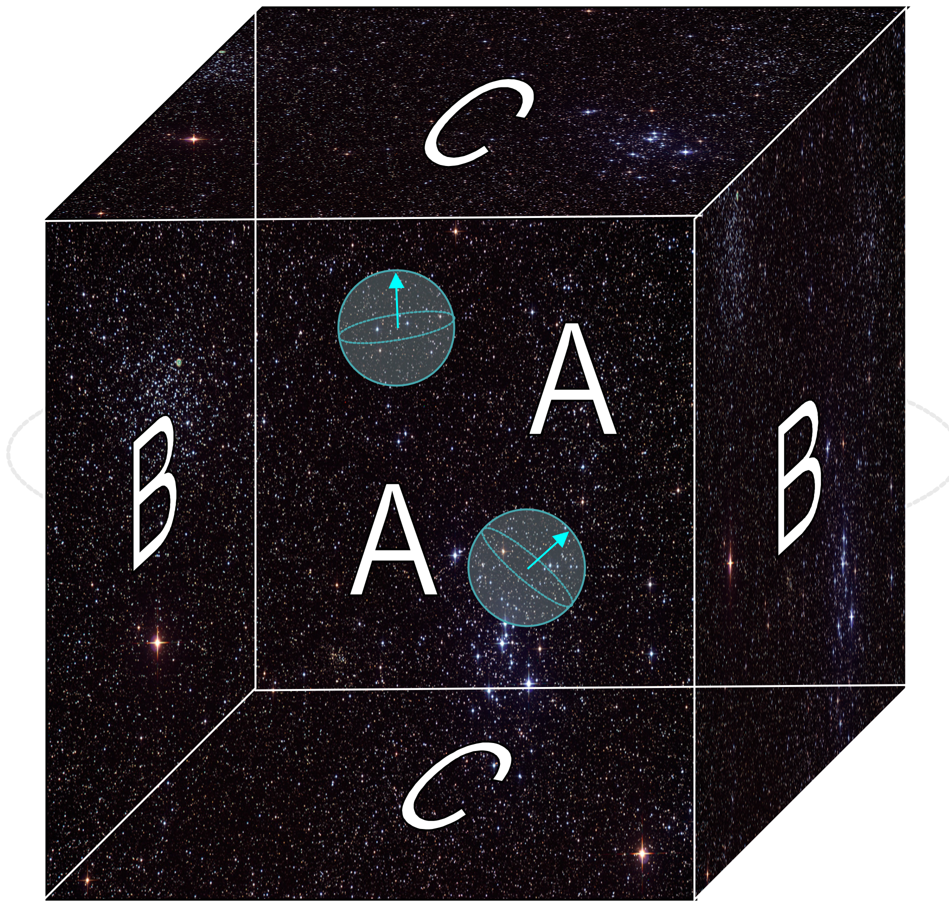
El espacio en que vivimos no solo parece localmente homogéneo, sino también *localmente isotrópico* : se ve igual en todas direcciones.

Existen 3-variedades cerradas que admiten métricas homogéneas e isotrópicas:



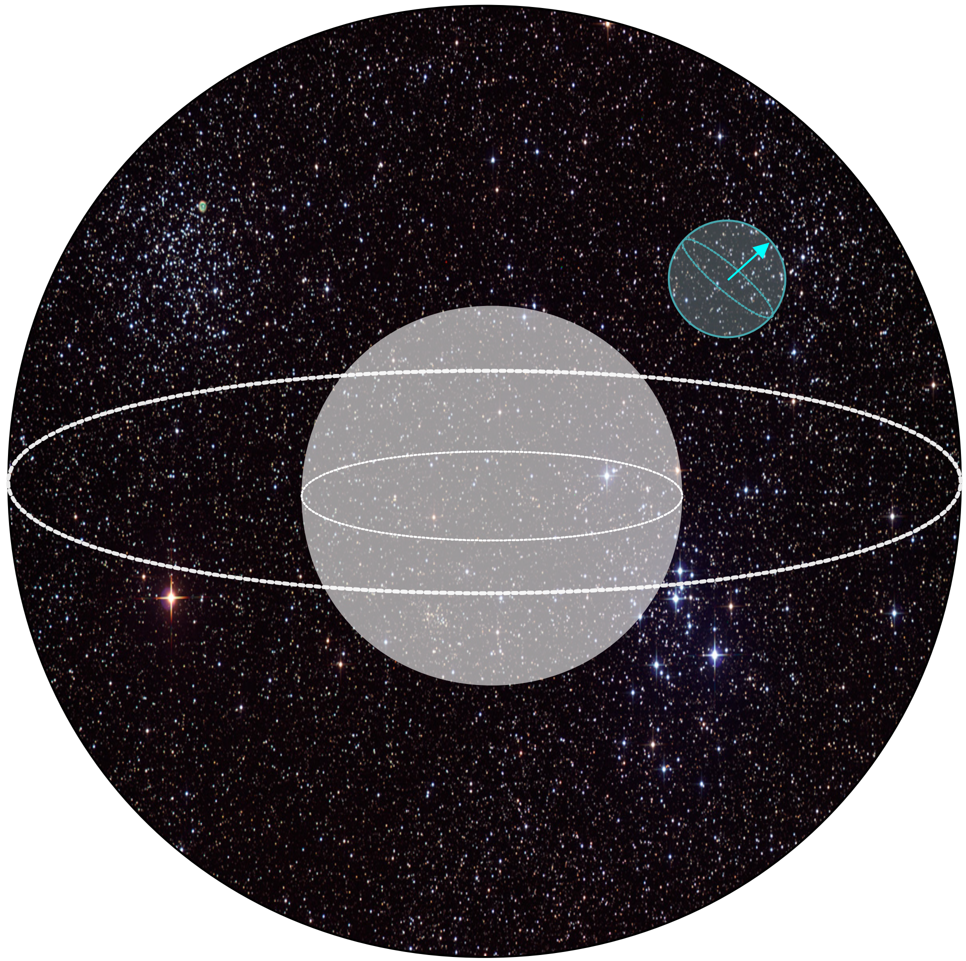
$$S^3 = \{ (x,y,z,w) \in R^4 \ / \ x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = 1\}$$

Existen 3-variedades cerradas que admiten métricas localmente homogéneas e isotrópicas:



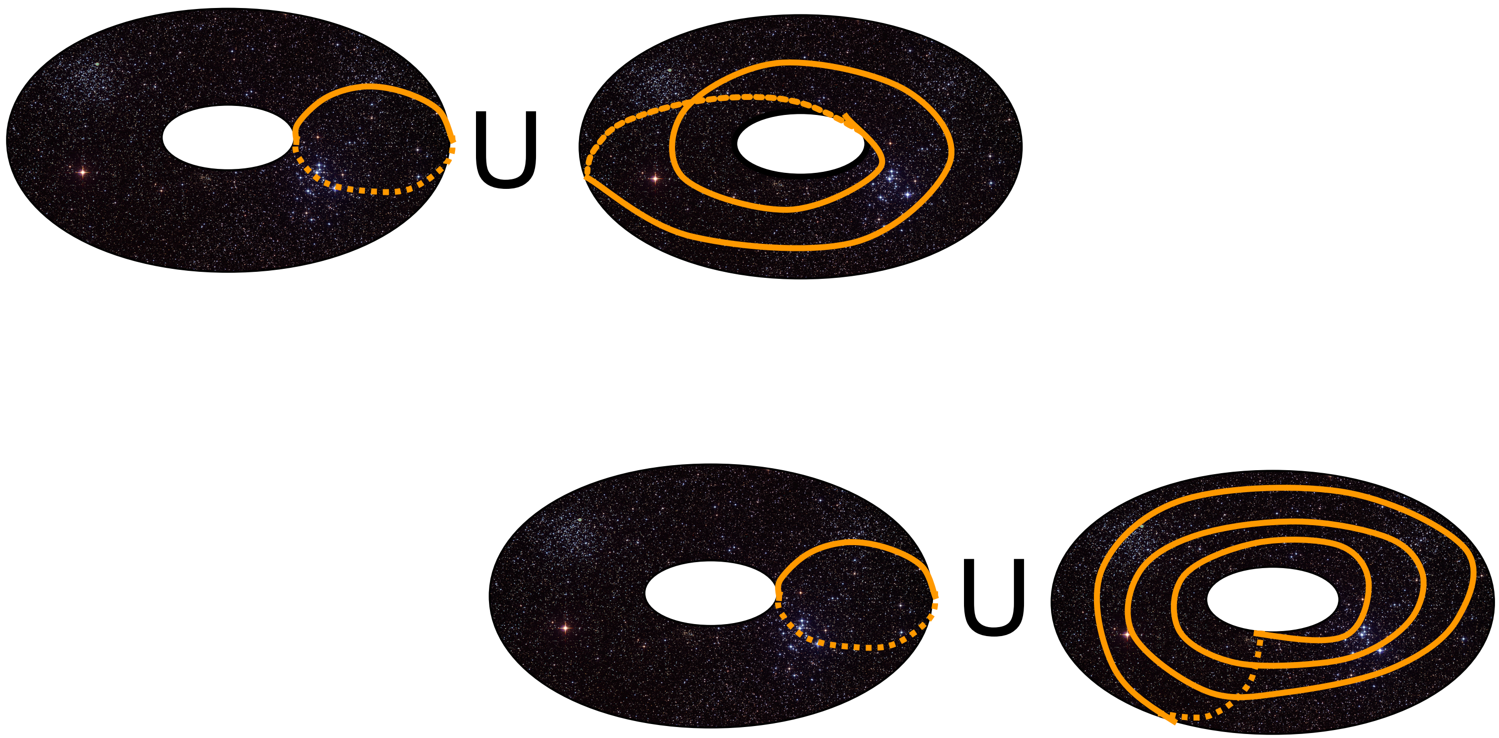
T^3 es localmente idéntico a R^3

Existen 3-variedades cerradas que admiten métricas homogéneas pero *no* isotrópicas.



$S^2 \times S^1$

Los espacios lente admiten métricas que los hacen localmente idénticos a la 3-esfera



Teorema: Las 3-variedades con métricas localmente homogéneas e isotrópicas son localmente idénticas a R^3, S^3 o al *espacio hiperbólico* H^3.

Estas variedades se llaman, respectivamente *variedades planas*, *variedades esféricas* y *variedades hiperbólicas*.

¿Cuáles 3-variedades admiten métricas localmente homogéneas?

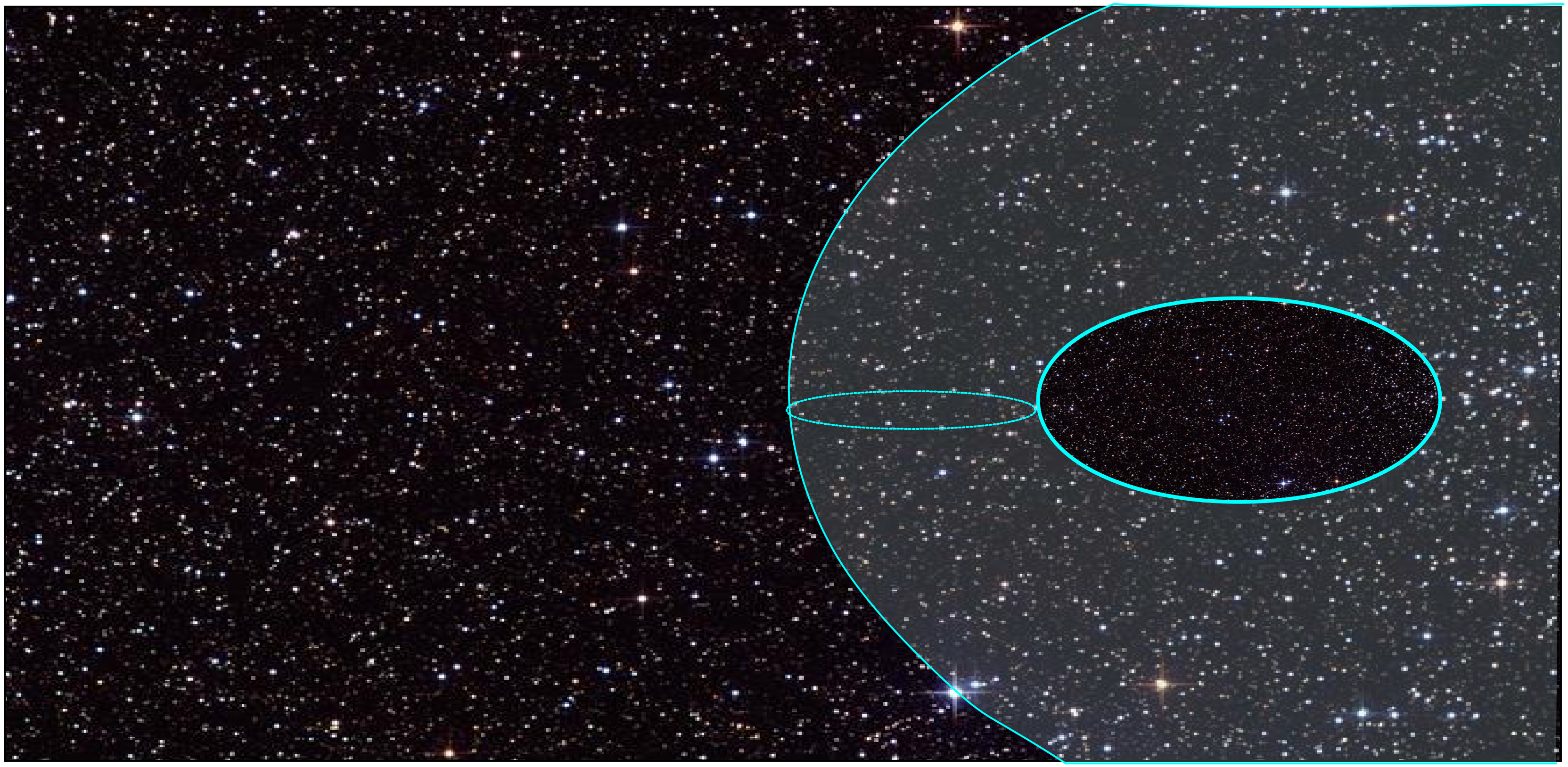
Esferas esenciales

Una *esfera esencial* en una 3-variedad es una esfera que *no* bordea una bola en la variedad.

Una 3-variedad cerrada con esferas esenciales *no* admite métricas localmente homogéneas, a menos que sea $S^2 \times S^1$, $S^2 \,\tilde{\times}\, S^1$ o $RP^3 \# RP^3$.

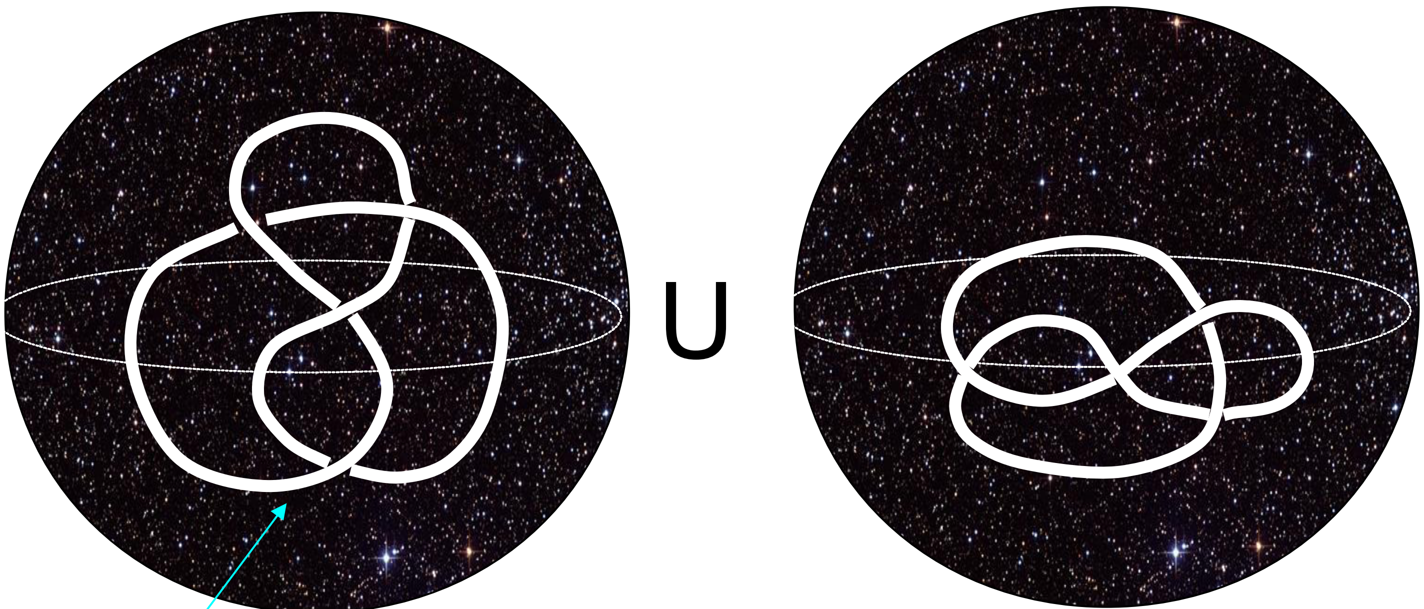
¿Cuáles 3-variedades admiten métricas localmente homogéneas e isotrópicas?

Toros esenciales



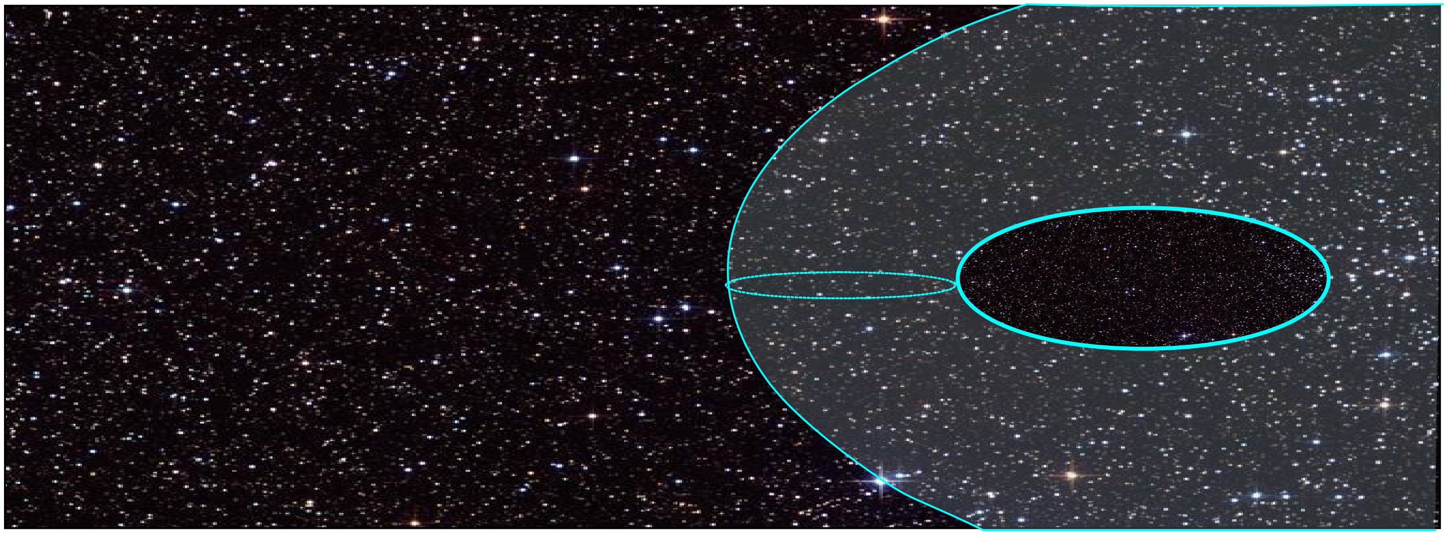
Un *toro esencial* es un toro que *no* bordea una dona en la variedad.

Toros esenciales



Un *toro esencial* es un toro que *no* bordea una dona en la variedad.

¿Cuáles 3-variedades admiten métricas localmente homogéneas e isotrópicas?



Teorema. Las únicas 3-variedades cerradas con toros esenciales que admiten una métrica localmente homogénea e isotrópica son las que admiten una métrica plana.

¿Cuáles 3-variedades cerradas sin esferas ni toros esenciales admiten métricas localmente homogéneas e isotrópicas?

¿Cuáles 3-variedades cerradas sin esferas ni toros esenciales admiten métricas localmente homogéneas e isotrópicas?

Teorema de geometrización (Perelman)

Todas las 3-variedades cerradas sin esferas ni toros esenciales inmersos admiten una métrica localmente homogénea e isotrópica.

Todas estas 3-variedades son esféricas o hiperbólicas.