3-Variedades

3-variedades

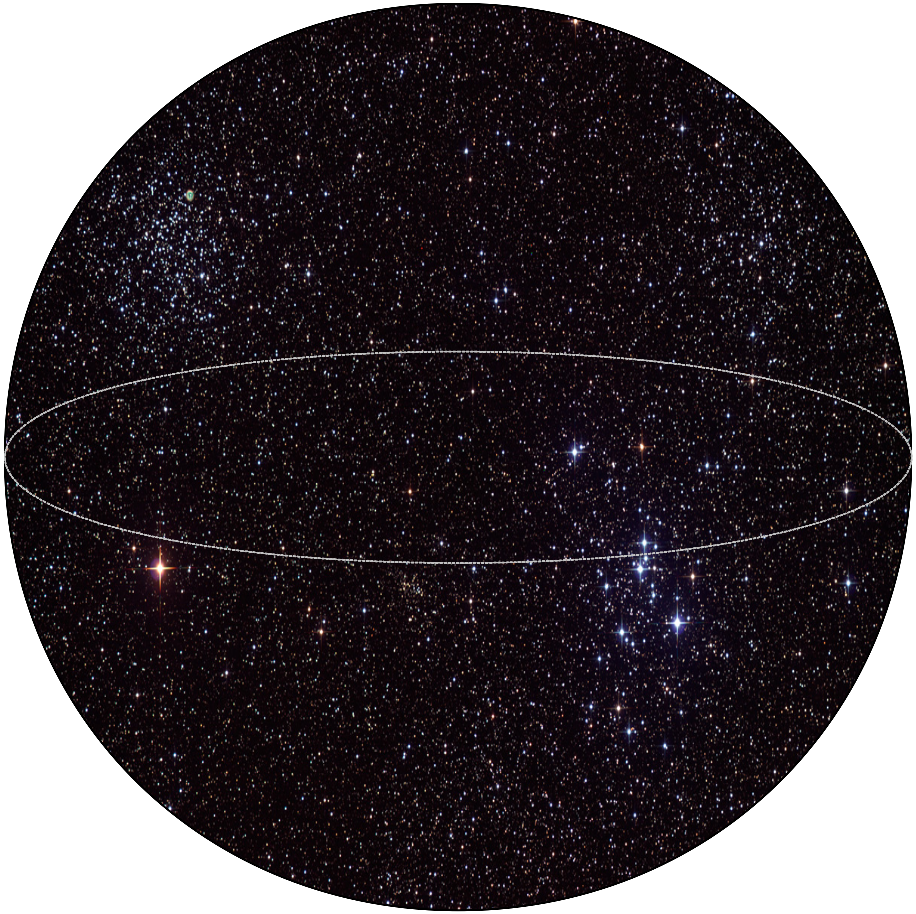
Las 3- variedades son espacios que localmente se parecen al espacio euclidiano. Dos variedades son "iguales" si es posible deformar continuamente a una para obtener la otra

Una 3-variedad es un espacio topologico (hausdorff y segundo numerable) que es localmente homeomorfo a R^3.

Dos variedades tienen la misma forma (topologica) si existe un homeomorfismo entre ellas.

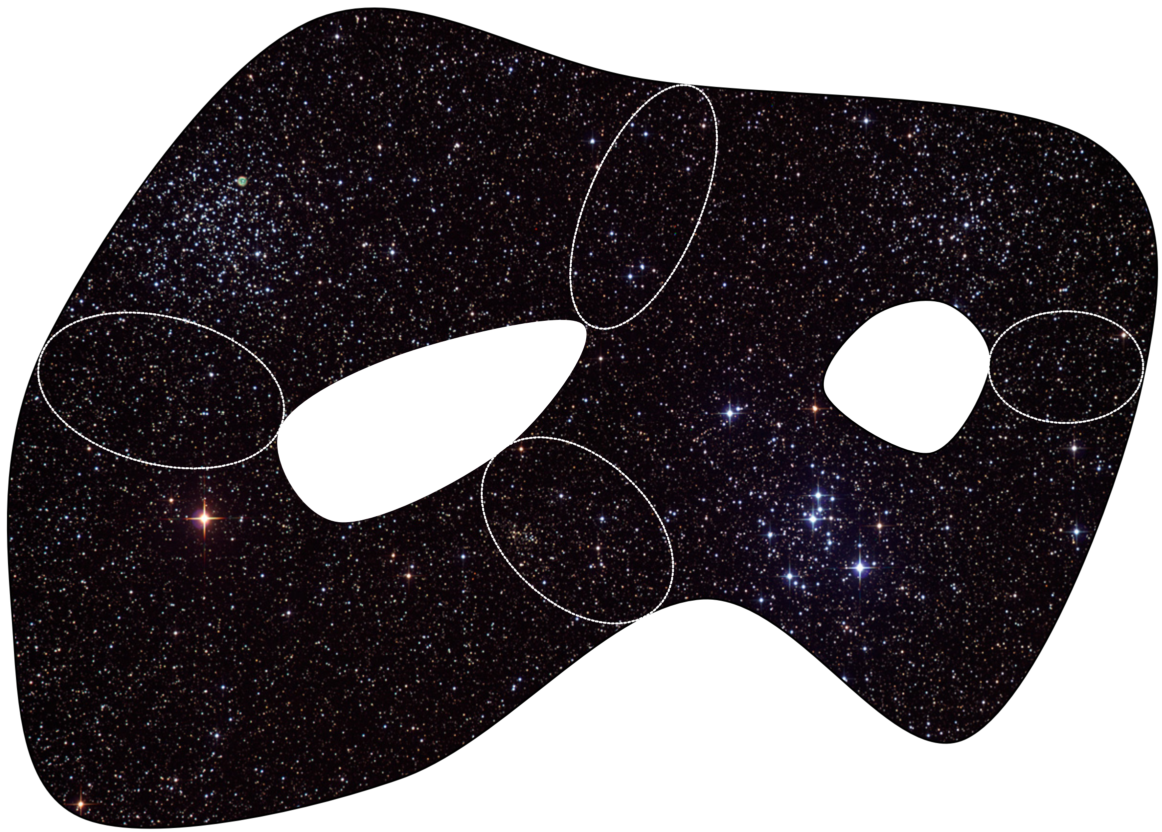
Ejemplos de 3-variedades

R^3



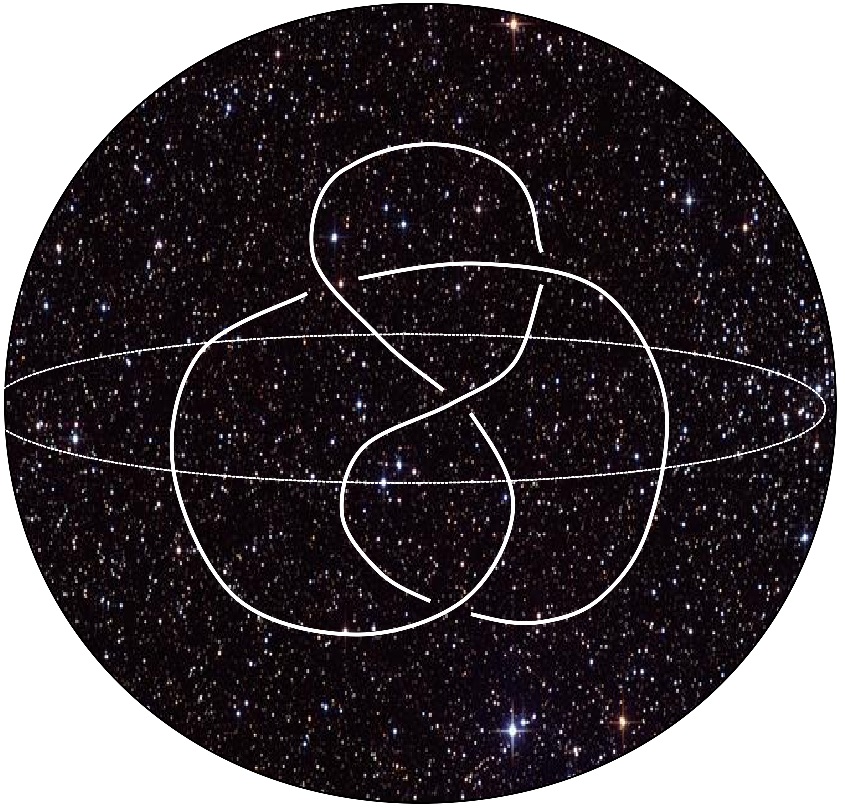
Es el interior de una bola solida

Ejemplos de 3-variedades



Cualquier abierto de R^3

Ejemplos de 3-variedades

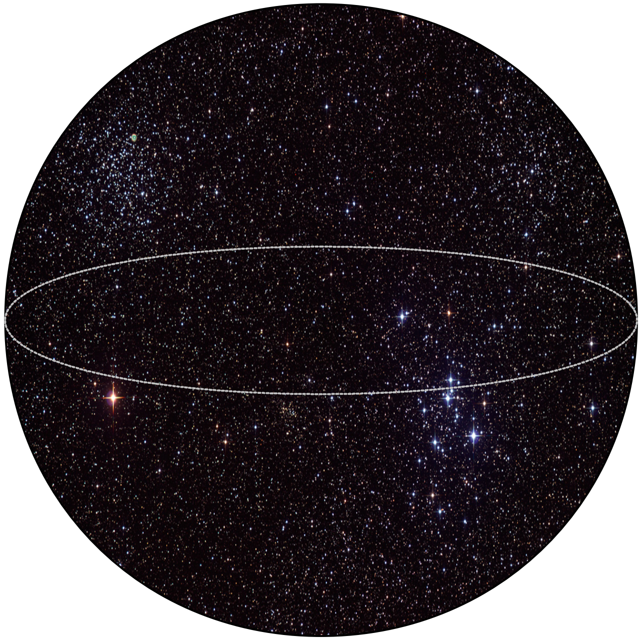


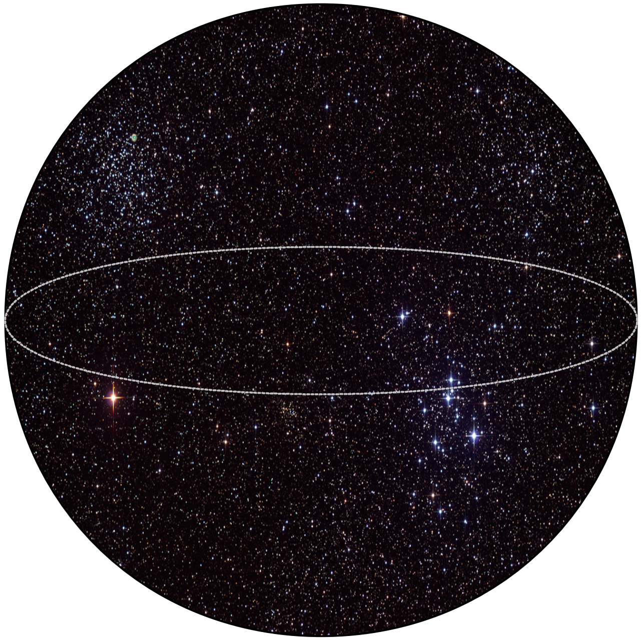
El complemento de un nudo

La 3-esfera S^3

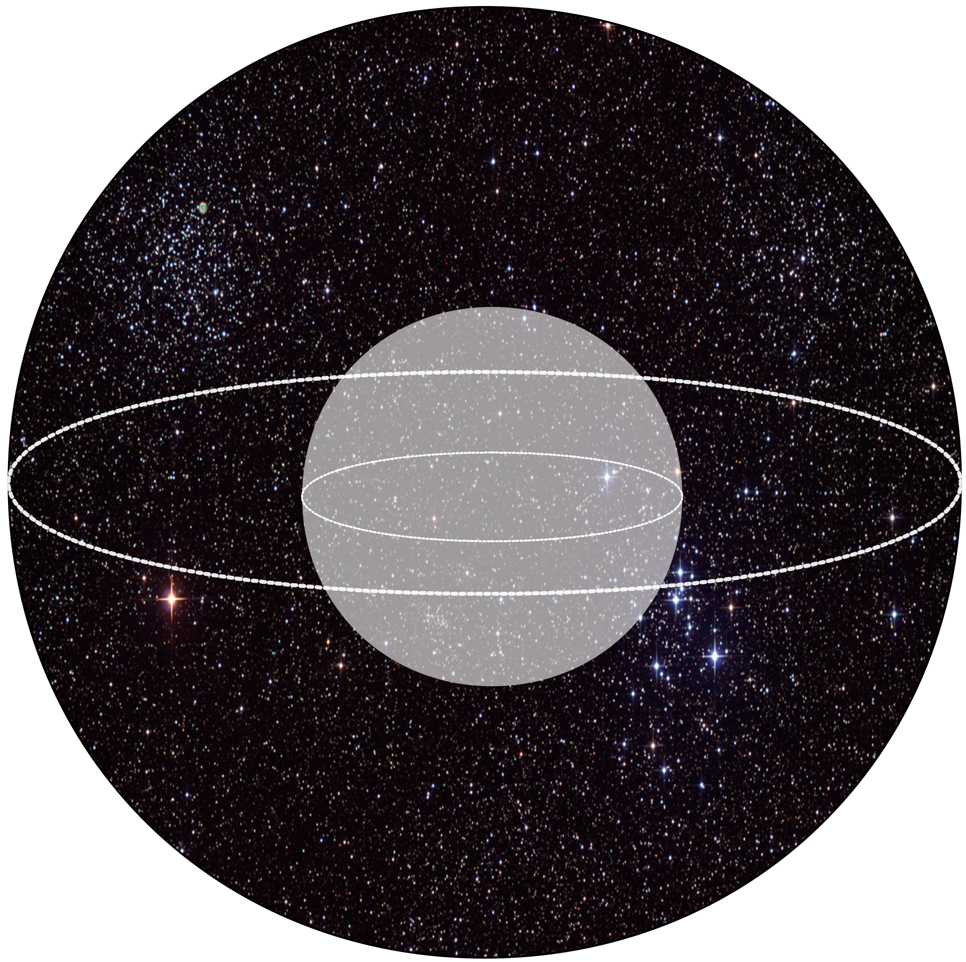
Analoga tridimensional de la esfera usual:

- R^3 junto con un "punto al infinito"
- La esfera unitaria en R^4
- La union de dos bolas solidas pegadas por la frontera:





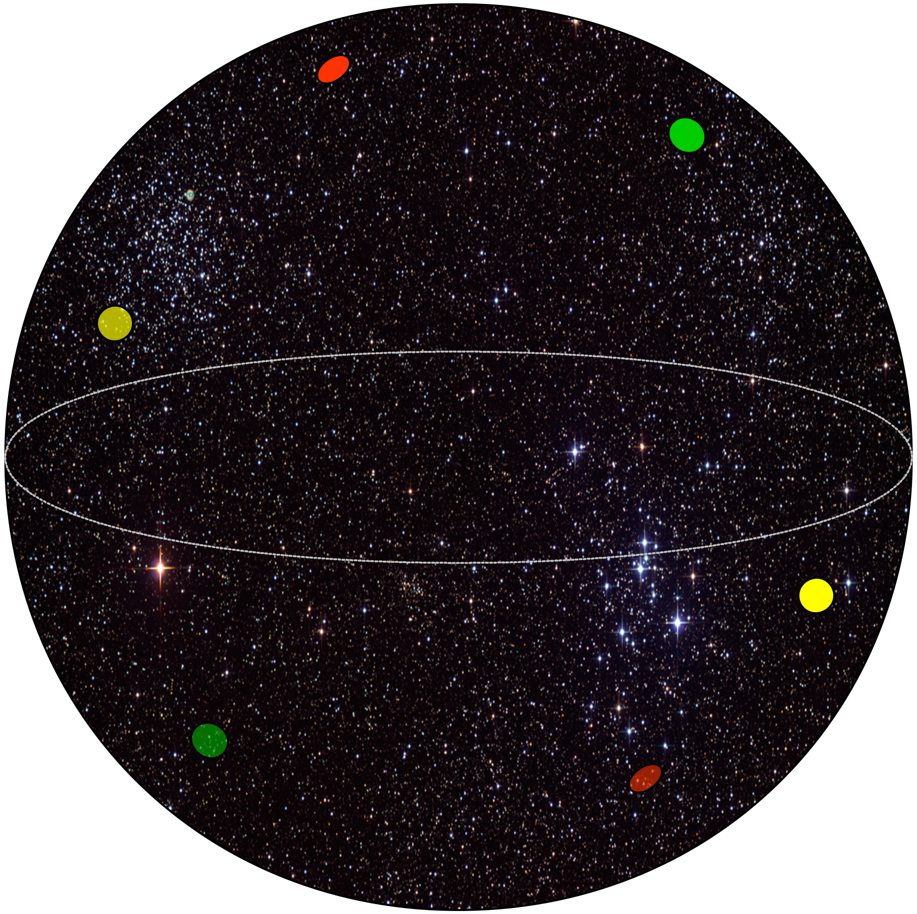
$S^2 \times S^1$



Tomar $S^2 \times [0,1]$ e identificar las dos fronteras

El espacio proyectivo RP^3

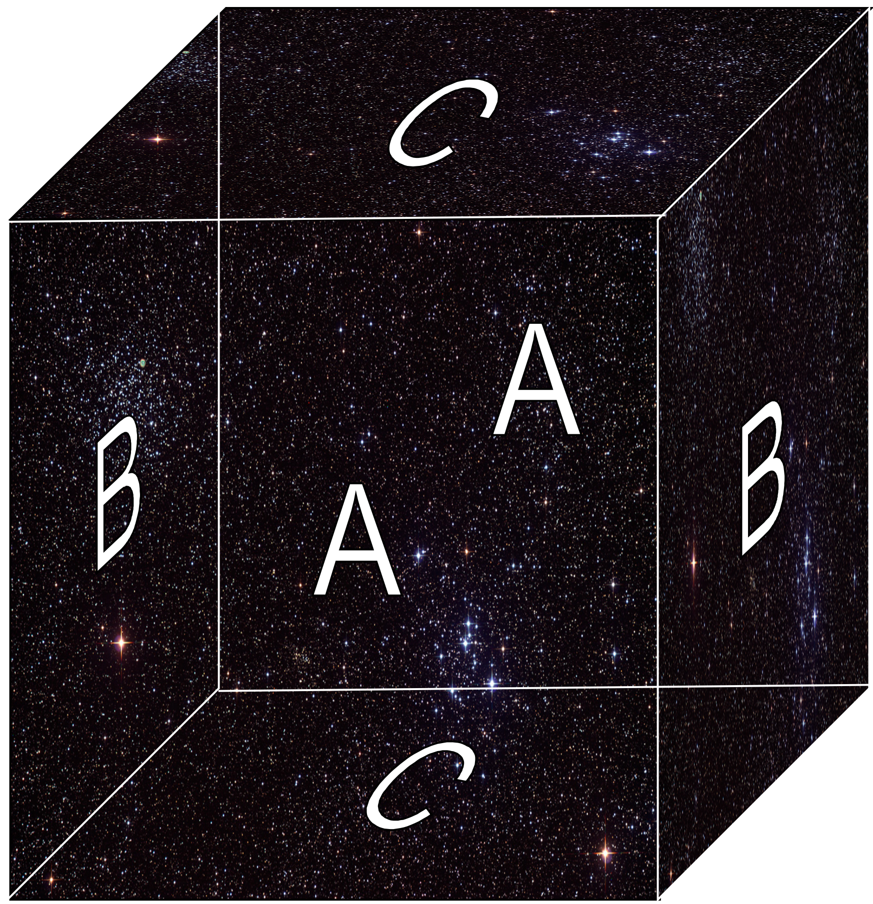
Es el cociente de S^3 al identificar puntos antipodas.



Una bola solida con los puntos antipodas de la frontera identificados

El 3-toro

El producto de 3 circulos



Es un cubo con lados opuestos identificados

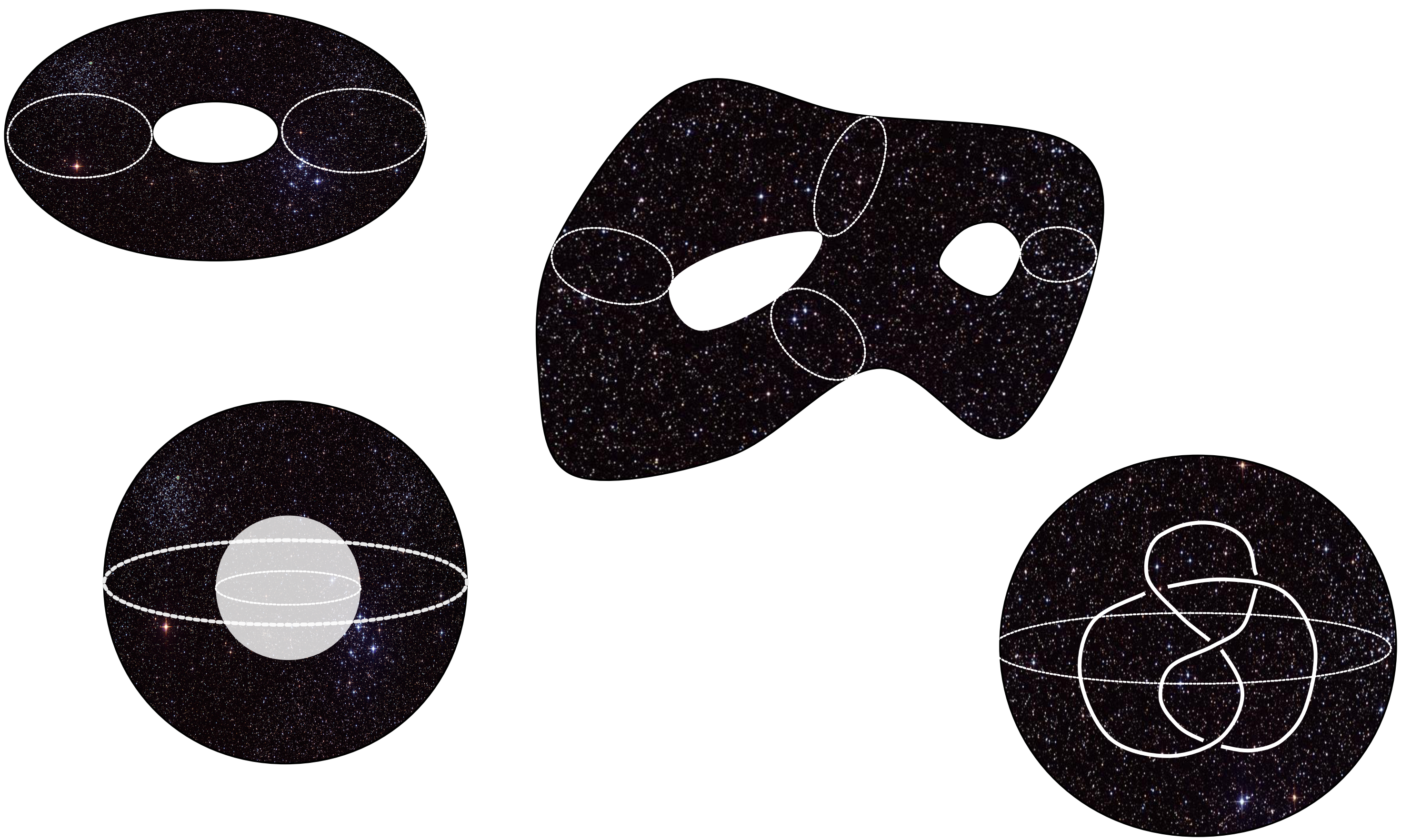
Suma conexa

Si M y N son 3-variedades, la *suma conexa* de M y N es la 3-variedad que se obtiene quitando una 3-bola del interior de cada una y pegando los bordes resultantes.

Observar que $M + S^3 = M$

La suma conexa define una operacion entre variedades que es conmutativa y asociativa

¿Como son todas las formas posibles de las 3-variedades?



¿Como podemos distinguirlas?

Triangulaciones

Una *triangulacion* de una 3-variedad M es una subdivision de M en tetraedros topologicos que se tocan en vertices o aristas o caras completas.

Teorema. Todas las 3-variedades pueden triangularse.

.

Triangulaciones

Una *triangulacion* de una 3-variedad M es una subdivision de M en tetraedros topologicos que se tocan en vertices o aristas o caras completas.

Teorema. Todas las 3-variedades pueden triangularse.

Idea de la demostracion. Cada 3-variedad puede cubrirse con bolas topologicas.

Dentro de estas bolas hay bolas cerradas que cubren a la variedad y cuyas fronteras son esferas, de modo que 2 esferas se cruzan en un numero finito de curvas y 3 esferas se cruzan en un numero finito de puntos.

.

Triangulaciones

Una *triangulacion* de una 3-variedad M es una subdivision de M en tetraedros topologicos que se tocan en vertices o aristas o caras completas.

Teorema. Todas las 3-variedades pueden triangularse.

Idea de la demostracion. Cada 3-variedad puede cubrirse con bolas topologicas.

Dentro de estas bolas hay bolas cerradas que cubren a la variedad y cuyas fronteras son esferas, de modo que 2 esferas se cruzan en un numero finito de curvas y 3 esferas se cruzan en un numero finito de puntos.

La union de las esferas divide a la variedad en un numero finito de regiones. Si estas regiones son bolas, entonces la variedad es la union de poliedros convexos topologicos, y cada poliedro puede subdividirse en teraedros.

Triangulaciones

Una *triangulacion* de una 3-variedad M es una subdivision de M en tetraedros topologicos que se tocan en vertices o aristas o caras completas.

Teorema. Todas las 3-variedades pueden triangularse.

Continuacion de la demostracion.

Si la variedad es la union de bolas cuyas fronteras se cruzan transvaresalmente, las regiones complementarias pueden ser muy complicadas, pero estan contenidas en bolas.

Triangulaciones

Una *triangulacion* de una 3-variedad M es una subdivision de M en tetraedros topologicos que se tocan en vertices o aristas o caras completas.

Teorema. Todas las 3-variedades pueden triangularse.

Continuacion de la demostracion.

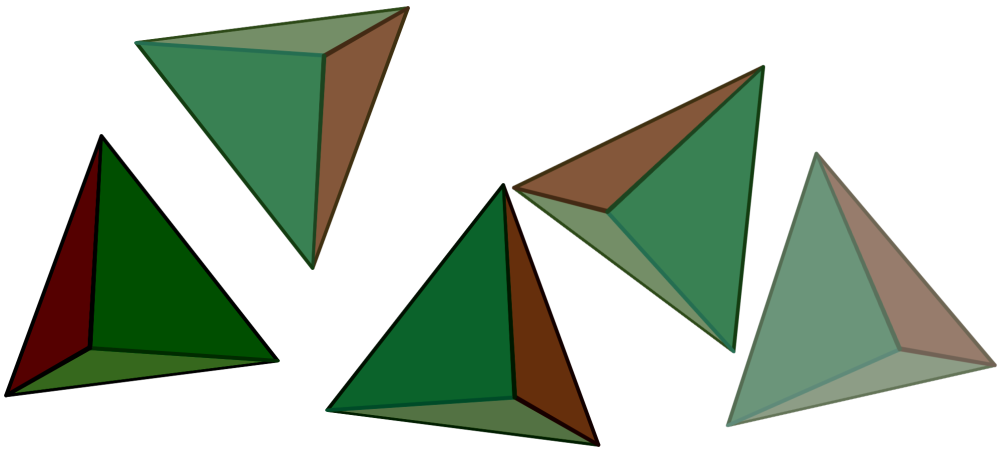
Si la variedad es la union de bolas cuyas fronteras se cruzan transvaresalmente, las regiones complementarias pueden ser muy complicadas, pero estan contenidas en bolas.

Lema: Si S es cualquier superficie cerrada en R^3, la region acotada por S puede subdividirse en regiones homeomorfas a poliedros convexos.

Demostracion: piensenle!

Todas las 3-variedades cerradas pueden triangularse

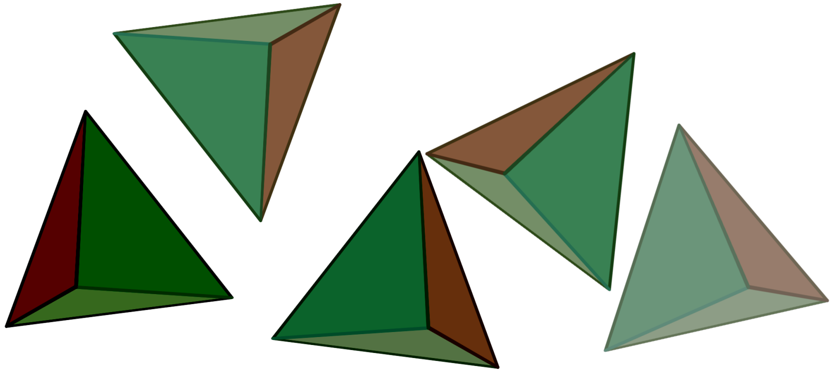
Corolario: Existe a lo mas una cantidad numerable de 3-variedades compactas distintas.



Corolario: Todas las 3-variedades pueden encajarse en R^7

Poliedros

Corolario. Toda 3-variedad cerrada puede obtenerse a partir de un poliedro identificando sus caras por pares.



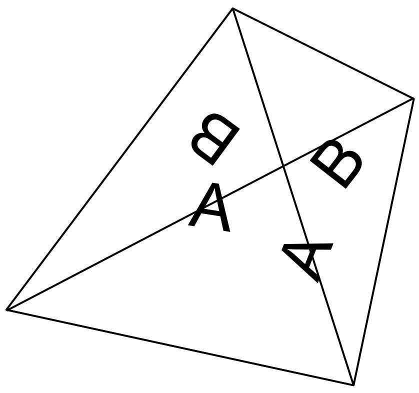
Poliedros

Corolario. Toda 3-variedad cerrada puede obtenerse a partir de un poliedro identificando sus caras por pares.

¿Sera cierto que todos los espacios que se obtienen identificando las caras de un poliedro son variedades?

El espacio resultante es localmente homeomorfo a R^3 en todos los puntos que no son vertices.

Ejemplo: ¿Sera una variedad?



Caracteristica de Euler

Sea M una 3-variedad dividida en tetraedros u otros poliedros convexos que se tocan en vertices, aristas o caras completetas.

La *caracteristica de Euler* de M es

$$\chi(M) = V - A + C - P$$

V = # vertices A = # aristas C= # caras P= # poliedros

Caracteristica de Euler

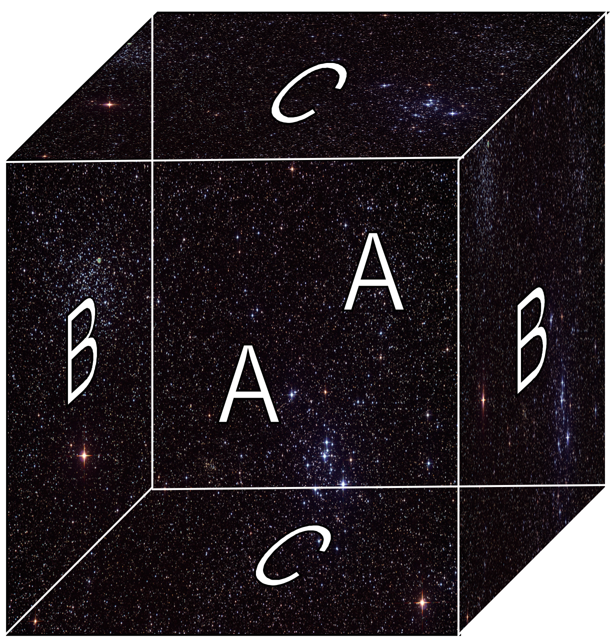
Sea M una 3-variedad dividida en tetraedros u otros poliedros convexos que se tocan en vertices, aristas o caras completas.

La *caracteristica de Euler* de M es

$$\chi(M) = V - A + C - P$$

V = # vertices A = # aristas C= # caras P= # poliedros

Ejemplo:



$$\chi(T^3) = V - A + C - P$$
$$= 1 - 3 + 3 - 1 = 0$$

Teorema. La caracteristica de Euler no depende de la triangulacion.

Teorema. La caracteristica de Euler no depende de la triangulacion.

¿Como demostarian esto?

Dadas dos subdivisiones de la variedad en poliedros, es posible deformar una para que intersecte transversalmente a la otra.

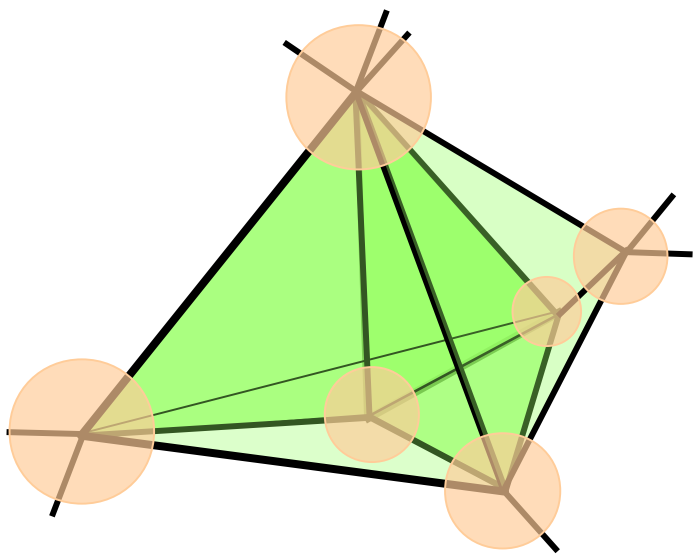
La union de las dos subdivisiones da una subdivision mas fina de la variedad, los pedazos que quedan pueden ser muy complicados, pero se pueden subdividir en poliedros convexos.

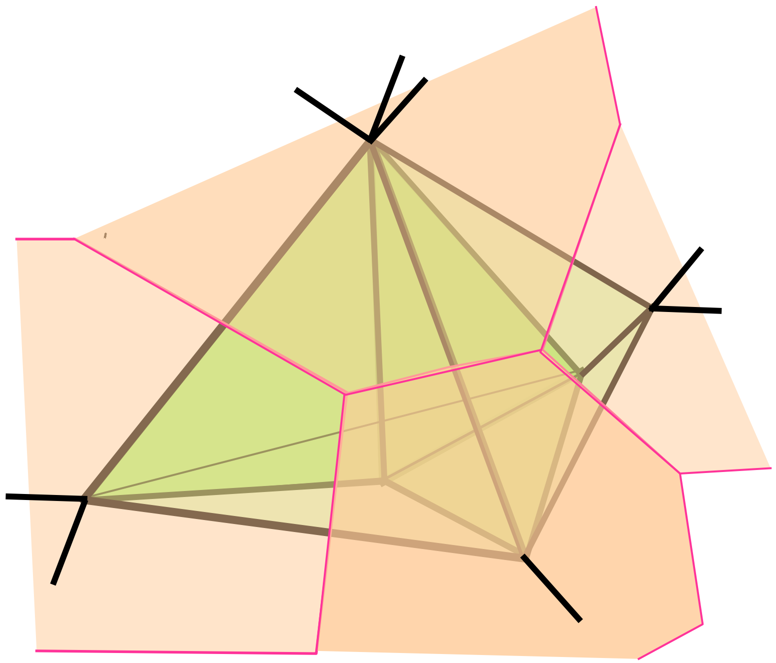
Bastaria ver entonces que al subdividir un poliedro convexo en poliedros mas pequeños el conteo de la caracteristica de Euler en el interior del poliedro no cambia.

Teorema. La caracteristica de Euler de cada 3-variedad cerrada es 0.

Teorema. La caracteristica de Euler de cada 3-variedad cerrada es 0

Idea de la demostracion:.





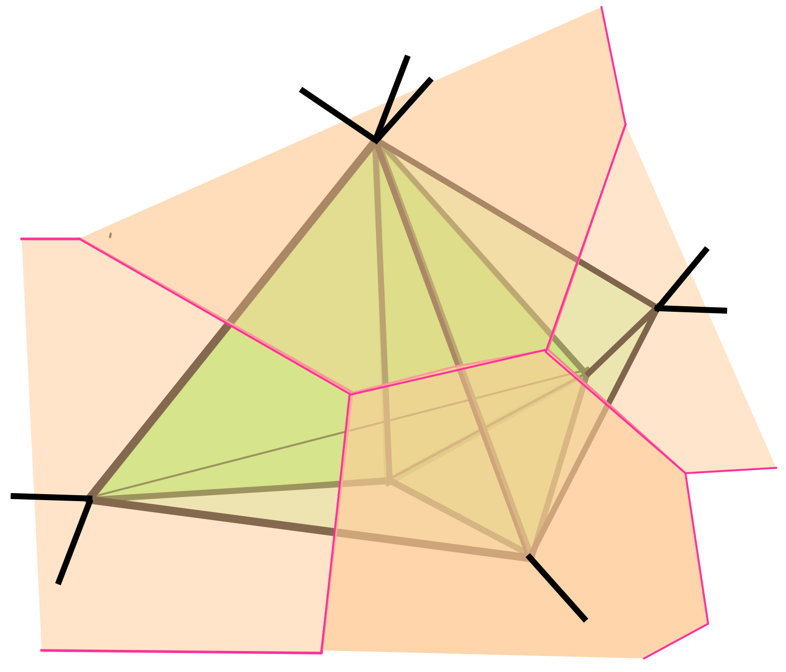
Poner un globo en cada vertice de la triangulacion. Inflarlos hasta que ocupen toda la variedad. Esto da una subdivision de la variedad en poliedros.

Teorema. La caracteristica de Euler de cada 3-variedad cerrada es 0

Idea de la demostracion:.

Hay:

- Un poliedro naranja por cada vertice verde,
- Una cara naranja por cada arista verde
- Una arista naranja por cada cara verde
- Un vertice naranja por cada tetraedro verde



Asi que:

$$\chi(M) = V - A + C - P = P - C + A - V = -\chi(M)$$

Teorema. La caracteristica de Euler de cada 3-variedad cerrada es 0.

Corolario: Si M es una 3-variedad con frontera, $X(M) = 1/2\ X(\mathrm{Fr}\ M)$

Dem.

Sea 2M el doble de M (la variedad que se obtiene pegando dos copias de M por sus fronteras)

Entonces

$0 = X(2M) = 2\ X(M) - X(\mathrm{Fr}\ M)$

Obs. Si C(S) es el cono de una superficie S, entonces $X(C(S)) = 1$

Corolario. El espacio que se obtiene identificando las caras de un poliedro por pares es una 3-variedad si y solamente si su caracteristica de Euler es 0

Dem.

Sea M el espacio resultante de la identificacion del poliedro y M' = M – una vecindad regular de los vertices.

Entonces M = M' U C(Fr M')

x(M) = X(M') + X(C(Fr M')) – X(Fr M')

= 1/2 X(Fr M') + X(C(Fr M')) – X(Fr M')

= X(C(Fr M')) –1/2 X(Fr M')

= n –1/2 X(Fr M')   donde n es el numero de vertices

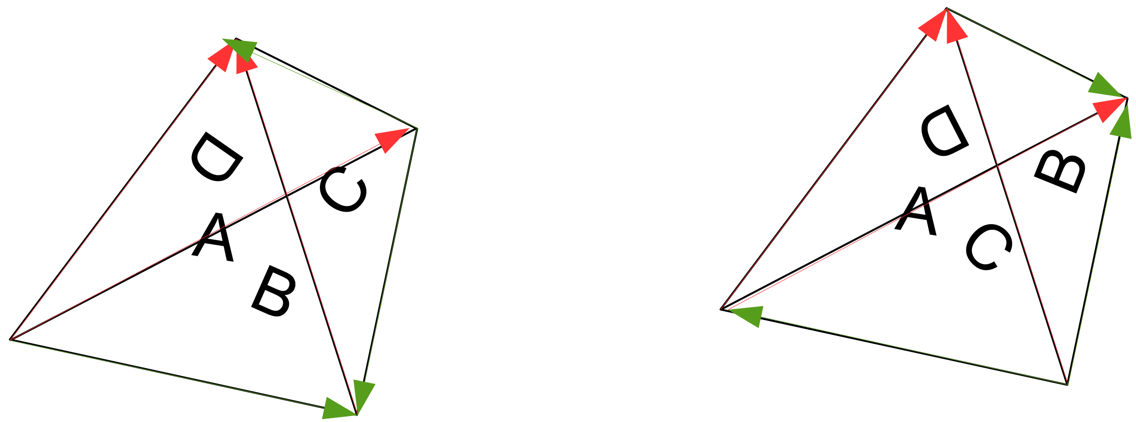
I∧

2n

Por lo tanto X(M) ≥ 0 y es 0 si y solo si cada frontera es una esfera

Corolario. El espacio que se obtiene identificando las caras de un poliedro por pares es una 3-variedad si y solamente si su caracteristica de Euler es 0

Ejemplo:

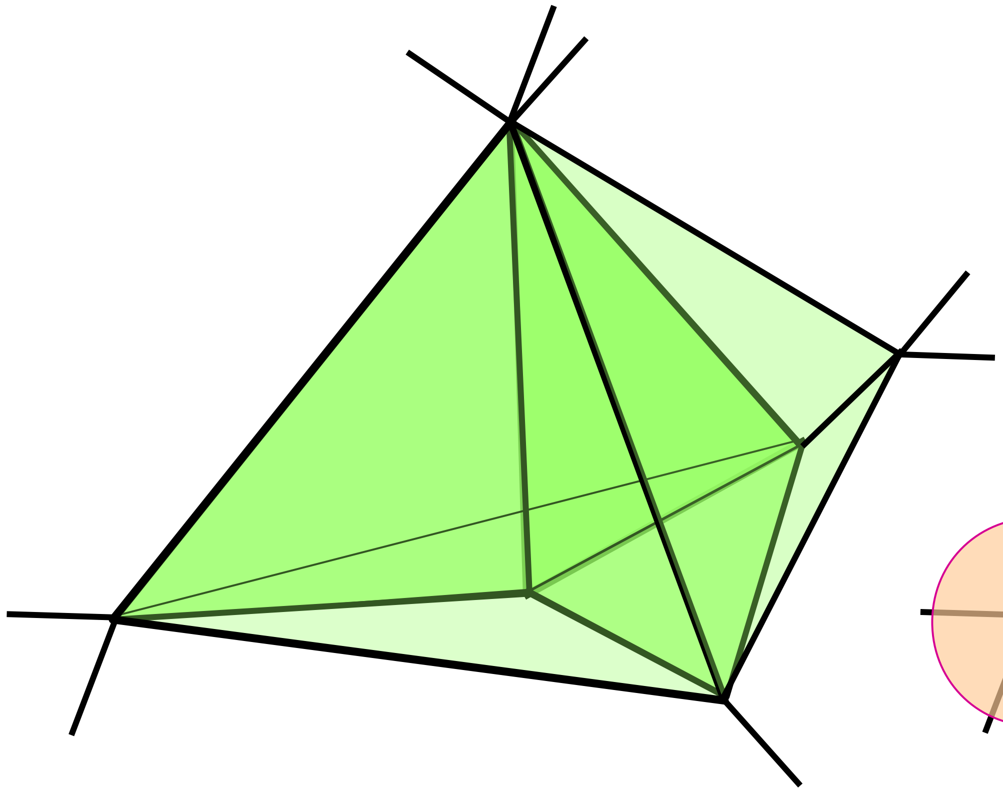


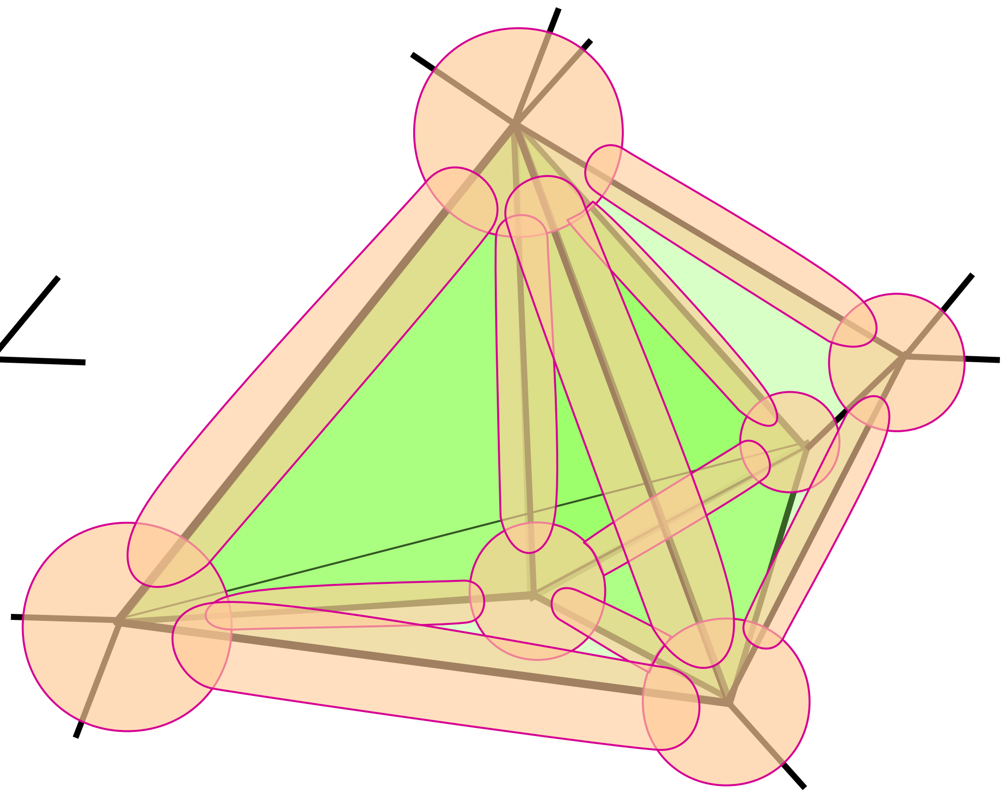
X(M) = 1 – 2 + 4 – 2 = 1

M no es una variedad pero M' si, y su frontera es un toro

Descomposiciones de Heegaard

Teorema: Todas las 3-variedades cerradas pueden descomponerse como la union de dos cubos con asas pegados por la frontera.





Ejemplos de descomposiciones de Heegaard

La union de dos cubos con asas pegados por cualquier homeomorfismo de sus fronteras es una 3-variedad cerrada.