Forma y métrica.

En la geometría euclidiana la forma es una relación de equivalencia entre figuras (subconjuntos del plano o el espacio). Dos figuras A a B tienen la misma forma si hay una transformación rígida (traslación, rotación, reflexión o una composición de estas) que lleva A a B. Las transformaciones rígidas preservan las distancias entre los puntos de las figuras. A las funciones que preservan distancias se le llama **isometrías**. Se puede mostrar que todas las isometrías del plano y del espacio son transformaciones rígidas.

Ahora podemos decir que dos figuras A y B tienen la misma forma si existe isometría $I : A \to B$, ya que cualquier isometría entre dos figuras del plano o del espacio euclidiano se puede extender a una isometría de todo el plano o de todo el espacio (tarea). La ventaja de definir forma usando isometrías es que solo hace referencia a las figuras y no al espacio ambiente (es una definición intrínseca) y la definición tiene sentido para figuras en cualquier espacio donde podamos medir distancias, aunque no existan transformaciones rígidas, y tiene sentido aún para figuras en distintos espacios.

Un **espacio métrico** es un conjunto E con una manera de medir distancias, llamada **métrica**.

La métrica es una función $d : E \times E \to \mathbb{R}^+$ que cumple

a. $d(p, q) \geq 0$ y la igualdad se da si y solo si $p = q$

b. $d(p, q) = d(q, p)$ (simetría)

c. $d(p, q) \leq d(p, r) + d(r, q)$ para cada p, q, r (desigualdad del triángulo)

Decimos que dos espacios métricos E y E' tienen la misma **forma geométrica** si existe una función $I : E \to E'$ que preserva distancias. A una función así se le llama **isometría** y decimos que los espacios son **isométricos**.

Cualquier subconjunto de un espacio métrico es un espacio métrico. Si pensamos en los subconjuntos de un espacio como figuras, entonces la forma de una figura no depende del resto del espacio por lo que podemos olvidarnos del resto y pensar que la figura es todo el espacio.

La forma está determinada por la métrica, pero pueden haber diferentes maneras de medir y al cambiar la métrica la forma cambia.

Ejemplo. Dada una curva en el plano, podemos medir las distancias entre sus puntos en el plano o podemos medirlas a lo largo de la curva. Estas métricas son distintas (a menos que la curva sea recta), por lo que determinan formas distintas, la *forma extrínseca* y la *forma intrínseca*.

Ejemplo. Pensemos en una hoja de papel en el espacio euclidiano. Si arrugamos la hoja las distancias entre sus puntos medidas en el espacio cambian, pero las distancias medidas sobre la hoja no cambian. Así que al arrugar la hoja su forma extrínseca cambia pero su forma intrínseca no cambia.

Problemas

1. Demuestra que cualquier isometría entre dos subconjuntos del plano euclidiano se puede extender a una isometría de todo el plano.

2. Consideremos un círculo y una elipse del mismo perímetro.

   a. Muestra que sus formas como subconjuntos del plano (midiendo distancias en línea recta) son distintas, probando cuidadosamente que no existe ninguna isometría entre ellas.

   b. Muestra que sus formas intrínsecas (midiendo distancias a lo largo de las curvas) son iguales, dando una isometría entre ellas.

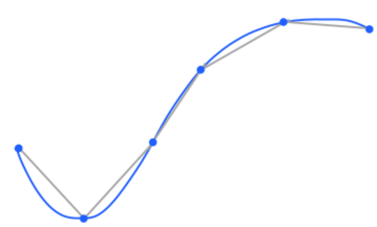
3. Demuestra que el plano $\mathbb{R}^2$ con la métrica usual $d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$ no es isométrico al plano $\mathbb{R}^2$ con la métrica $d'((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$. (la función identidad claramente no es una isometría, hay que probar que ninguna otra función lo es)

Que en un espacio métrico podamos medir distancias entre puntos no significa que podamos medir longitudes o ángulos. De hecho ni siquiera tienen que existir caminos que conecten los puntos (un *camino* es una función continua de un intervalo a E).

Ejemplo. El plano racional $\mathbb{Q}^2$ es un espacio métrico con la métrica usual, pero no hay caminos entre distintos puntos.

Si en el espacio métrico E si existen caminos entonces hay una manera natural de medir sus longitudes usando la métrica d. Si $c : [a, b] \to M$ es un camino, para cualquier subdivisión del intervalo $[a, b]$ $a = t_0 < t_1 < t_2 < ... < t_n = b$ podemos considerar la suma de las distancias entre puntos consecutivos

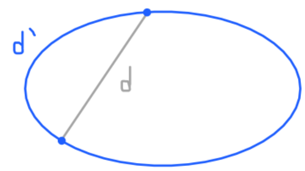
$$\sum_{i=1}^{i=n} d(c(t_{i-1}), c(t_i))$$



La **longitud** del camino c se define como el supremo de estas sumas sobre todas las subdivisiones del intervalo $[a, b]$, aunque longitud puede ser infinita. Si dos puntos p y q de M están conectados por un camino de longitud finita, podemos definir la **distancia por caminos** entre p y q como el ínfimo de las longitudes de todos los caminos entre p y q.

La distancia entre dos puntos dada por la métrica d no tiene por que ser igual a su distancia por caminos: en general la distancia por caminos es mayor. Pero la distancia por caminos define una nueva métrica d' en M, llamada métrica de caminos, en la que la distancia entre puntos es el ínfimo de las longitudes de los caminos que los unen.

Ejemplo. Si c es una curva en el plano con la métrica d dada por las distancias medidas en el plano. entonces la métrica de caminos d' da las distancias medidas a lo largo de la curva.



Ejemplo. Si E es una superficie en el espacio euclidiano y d es la métrica en E dada por las distancias medidas en el espacio, entonces la métrica de caminos d' está dada por las distancias medidas sobre la superficie.

Imaginemos un plano ondulado O en el espacio euclidiano (como la superficie de la tierra, con montañas y valles). Las ondulaciones son fáciles de ver desde afuera: su forma extrínseca es distinta de la de un plano liso. ¿Pero podemos detectar las ondulaciones desde adentro?¿Será cierto que la forma intrínseca de O es distinta a la del plano euclidiano? Y si lo es, ¿que tan distinta será?

Podemos considerar, por ejemplo, los caminos de longitud mínima en O y ver si tienen propiedades similares a las rectas del plano. ¿Será cierto que por dos puntos distintos de O pasa un camino de longitud mínima? ¿Y que dos caminos de longitud mínima se intersectan a lo mas en un punto? ¿Y que los ángulos internos de los triángulos formados por caminos de longitud mínima suman 180 grados?

También podemos considerar los círculos en O (los conjuntos de puntos de S cuya distancia a p medida sobre S es una constante r) y medir sus circunferencias.

Ejemplo. En el plano euclidiano, los círculos de radio r tienen circunferencia $2\pi r$, mientras que en una esfera de radio R los círculos de radio r (medidos sobre la esfera!) tienen circunferencia $2\pi Rsen(r/R)$. En un plano ondulado las circunferencias de los círculos pueden depender no solo del radio sino también del centro del círculo, y en este caso sabríamos que el plano ondulado es intrinsecamente distinto de un plano y de una esfera.

La **forma local** (intrínseca o extrínseca) de una figura es la forma de las vecindades pequeñas de sus sus puntos. Decimos que dos figuras F y F' tienen la misma forma geométrica local en los puntos p y p' si existe una isometría de alguna vecindad de p en F a alguna vecindad de p' en F'.

Ejemplo. Lo único que podemos medir sin salir de una curva suave son las distancias a lo largo de la curva, así que todas las curvas suaves tienen la misma forma local intrínseca, ya que podemos dar isometrías locales entre ellas (tarea).

Ejemplo. Un plano y un cilindro tienen la misma forma local intrínseca, pero su forma local extrínseca es distinta.

Problemas

4. Sea M un espacio conexo por caminos con métrica d y métrica de caminos d‘
   a. Muestra que $d'(p,q) \geq d(p,q)$ para cada par de puntos p, q.
   b. Demuestra que d' es realmente una métrica.
5. Sea O un plano ondulado y definamos como sus líneas a los caminos de longitud mínima en O.
   a. ¿Será cierto que por dos puntos distintos de O pasa una línea? ¿y que las líneas no se intersectan en mas en un punto?
   b. ¿Será cierto que por cada punto fuera de una línea pasa una una línea paralela?
   c. ¿Será cierto que los ángulos internos de un triángulo suman dos ángulos rectos?
6. En el paraboloide $z = x^2 + y^2$, sea $c(r)$ la circunferencia del círculo de radio r centrado en $(0,0)$ Demuestra que $lim_{r\to 0}\frac{c(r)}{r} = 2\pi$ y que $lim_{r\to\infty}\frac{c(r)}{r} = 0$.
7. ¿Como se puede obtener el radio R de una esfera midiendo las circunferencias de radios pequeños en la esfera (donde los radios se miden sobre la superficie de la esfera)? Compara las circunferencias de círculos de radio r en la esfera con las circunferencias de círculos del mismo radio en el plano, calculando los siguientes límites:
   a. $lim_{r\to 0} 2\pi r - 2\pi R sen(r/R)$
   b. $lim_{r\to 0}\frac{2\pi r - 2\pi R sen(r/R)}{r}$
   c. $lim_{r\to 0}\frac{2\pi r - 2\pi R sen(r/R)}{r^2}$
   d. $lim_{r\to 0}\frac{2\pi r - 2\pi R sen(r/R)}{r^3}$
8. Muestra que todas las curvas tienen la misma forma local intrínseca.
9. Muestra que un cilindro tiene la misma forma local intrinseca que un plano (excepto en el vértice del cono)

Forma topológica

La noción de forma geométrica es muy precisa pero también es muy rígida: los cambios mas pequeños pueden cambiar la forma geométrica, y esto a veces es un obstáculo.

¿Que querrá decir que dos formas se parezcan? ¿Y que dos figuras se parezcan mas que otras? Lo primero que habría que preguntarse es ¿Se parezcan en que? porque pueden haber distintos criterios.

Si pensamos en la métrica, en lugar de usar funciones que preserven distancias $d(f(p), f(q)) = d(p,q)$ podríamos usar funciones que no cambien mucho las distancias, digamos que no aumenten o disminuyan

las distancias por un factor mayor que r para algún número real fijo $r > 0$. Esto permite estirar, encoger y deformar las figuras.

Si queremos una noción aun menos rígida de forma, podemos pensar en funciones que sean aún mas flexibles, pero sin romper las figuras. Esto es lo que hacen las funciones continuas.

Decimos que dos espacios métricos E y E' tienen la misma **forma topológica** si existe una función $f : E \to E'$ que es continua y tiene inversa continua.

La forma topológica no cambia al hacer deformaciones continuas, es una noción de forma flexible, mucho mas débil que la forma geométrica, que es rígida. La forma geométrica ve todos los detalles, y la forma topológica solo ve los aspectos mas básicos.

Recordar que una función $f : E \to E'$ es continua en el punto $p \in E$ si para cada $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $d(p, q) < \delta$ entonces $d(f(p), f(q)) < \epsilon$, y f es continua si es continua en todos los puntos de su dominio. Las funciones continuas envían puntos *cercanos* a puntos *cercanos*, pero el estiramiento alrededor de un punto puede hacerse arbitrariamente grande al acercarnos al punto.

No es difícil ver que la función entre dos espacios métricos $f : E \to E'$ es continua si y sólo si la imagen inversa bajo f de cada subconjunto abierto de E' es un subconjunto abierto de E. Así que para definir funciones continua entre dos espacios ni siquiera necesitamos una métrica, basta con poder decir quienes son sus subconjuntos abiertos.

Un **espacio topológico** es un conjunto E con una colección de subconjuntos de E, llamados **abiertos** que cumplen:

- E y $\emptyset$ son abiertos.
- La unión de abiertos es abierto.
- La intersección finita de abiertos es abierto.

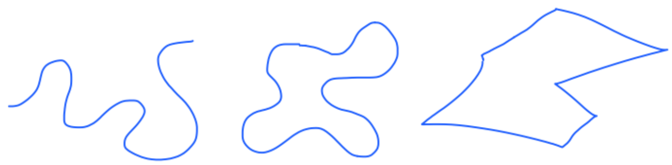
Una vecindad de un punto en un espacio topológico es un abierto que contiene al punto. Una función $f : E \to E'$ entre espacios topológicos es **continua** si la imagen inversa de cada abierto de E' es un abierto de E.

Decimos que dos espacios topológicos E y E' tienen la misma **forma topológica** o que son son **homeomorfos** si existe una función $f : E \to E'$ que es continua y tiene inversa continua.

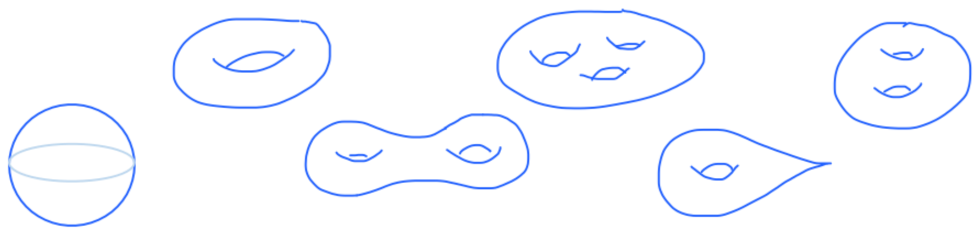
Así como podemos hablar de la forma geométrica local, tambien podemos hablar de la forma topológica local. Diremos que los espacios E y E' son **localmente homeomorfos** alrededor de los puntos p y

p' si existe un homeomorfismo de una vecindad de p en E a una vecindad de p' en E'.

Las **curvas** son los espacios topológicos localmente homeomorfos a la recta $\mathbb{R}$:



Las **superficies** son los espacios topológicos localmente homeomorfos al plano $\mathbb{R}^2$:



Problemas

10. Demuestra que un circulo y un cuadrado tienen la misa forma topológica.
11. Muestra que un cono tiene la misma forma topológica que un plano, pero no la misma forma geométrica.