El plano euclidiano

La geometría euclidiana fue el primer modelo matemático del espacio en el que vivimos, y por muchísimo tiempo fue considerado el único posible.

En *Los Elementos* Euclides sintetizó los conocimientos geométricos de su época, partiendo de las propiedades geométricas mas elementales y deduciendo todo lo demás por medio de razonamientos lógicos. Comenzó por dar algunas definiciones

· Un punto es lo que no tiene partes.

· Una línea es una longitud sin anchura.

· Una línea recta es una línea que yace por igual respecto de los puntos que están en ella.

· Una superficie es lo que solo tiene longitud y anchura

· Un plano es una superficie que yace por igual respecto de las líneas que están en ella.

· Un ángulo es la inclinación mutua de dos líneas que se encuentran una a otra en un plano.

· Rectas paralelas son aquellas que estando en un mismo plano nunca se cruzan.

· Si dos líneas rectas se cortan de modo que los ángulos adyacentes son iguales, los ángulos se llaman rectos y las líneas se llaman perpendiculares.

Las primeras definiciones no son nada precisas, pero Euclides solo las usó para dar una idea de lo que tratan. En realidad no importa que son los puntos, las rectas y los planos sino saber que propiedades tienen:

Postulados de Euclides:

1. Por dos puntos distintos pasa una línea recta.

2. Las líneas rectas pueden extenderse indefinidamente.

3. Se puede dibujar un círculo con cualquier centro y de cualquier radio.

4. Todos los ángulos rectos son iguales.

5. Por un punto que no está en una recta se puede trazar a lo mas una paralela a la recta

Observaciones: 1. Euclides no dice que por dos puntos pasa una sola línea recta, pero si lo asume.
2. El postulado 5 no afirma que exista una paralela, dice que a lo mas hay una.
3. Euclides asume sin decirlo que es posible mover los triángulos a cualquier posición en el plano sin cambiar su forma. Pero no asume que sea posible cambiar su tamaño sin cambiar su forma.

A partir de las definiciones, las nociones comunes y los postulados Euclides deduce muchos resultados, por ejemplo:

· Por cada punto fuera de una línea recta pasa exactamente una paralela.

· Los ángulos internos de un triángulo suman dos ángulos rectos.

· Si dos triángulos tienen lados iguales entonces son congruentes (LLL).

· Si dos triángulos tienen ángulos iguales entonces sus lados son proporcionales (AAA).

· En un triángulo rectángulo, la suma de los cuadrados de los catetos es igual al cuadrado de la hipotenusa

Problemas

1. ¿Puedes probar usando los postulados (y las observaciones) que por cada punto fuera de una línea recta pasa al menos una paralela?
2. Usa el teorema de Pitágoras y las funciones trigonométricas para probar la Ley de los cosenos.

Los axiomas de Hilbert

El método deductivo de Euclides ha sido muy fructífero, y tuvo una gran influencia en el desarrollo de las matemáticas y las ciencias exactas, pero después de dos milenios quedo claro que algunas cosas no estaban muy bien justificadas. A fines del siglo XIX Hilbert se puso a revisarlas y propuso una lista de 20 axiomas para llenar los faltantes.

Conceptos y relaciones primitivas (no se definen)

· Punto

· Línea

· Que un punto esté en una línea y que un punto esté entre dos puntos.

· Segmentos congruentes y ángulos congruentes. (segmento y ángulo se definen an partir de lo anterior).

incidencia

· Dos puntos están al menos en una linea.

· Dos puntos están a lo mas en una linea.

· En cada linea están al menos 2 puntos. Hay 3 puntos que no están en una línea.

Orden

· Si un punto esta entre dos puntos entonces los tres puntos están en una linea.

· Si dos puntos están en una linea entonces hay al menos un punto de la línea entre ellos.

· Si tres puntos están en una linea, a lo mas uno de ellos esta entre los otros dos.

· (Axioma de Pasch) Si una línea cruza un lado de un triángulo, entonces cruza a alguno de los otros dos lados.

Congruencia

· Hay segmentos congruentes a cualquier segmento partiendo de cualquier punto de cada línea.

· La congruencia de segmentos es una relación de equivalencia.

· Si el punto B está entre los puntos A y C y el punto B' está entre los puntos A' y C' y AB es congruente a $A'B'$ y BC es congruente a $B'C'$ entonces AC es congruente a $A'C'$.

· Hay ángulos congruentes a cualquier ángulo en cada punto y en cualquier dirección.

· La congruencia de ángulos es una relación de equivalencia.

· (el análogo al axioma de suma de segmentos, pero para ángulos)

· (LAL) Si dos triángulos ABC y $A'B'C'$ son tales que AB es congruente a $A'B'$ y AC es congruente a $A'C'$ y el ángulo en A es congruente al ángulo en A' entonces los triángulos son congruentes.

Paralelas

· (Axioma de Euclides) Si un punto p no está en una línea L, entonces p está en a lo mas una línea paralela a L.

Continuidad

· (Axioma de Arquimedes). Si AB y CD son dos segmentos en una línea, entonces CD está contenido en una unión finita de segmentos congruentes a AB.

· (Axioma de completitud) La colección de puntos y líneas no puede ampliarse mas de modo que se sigan cumpliendo todos los axiomas anteriores.

Como en todo sistema axiomático, uno tiene que hacerse algunas preguntas:

1. ¿Como sabemos que estos axiomas son necesarios (que uno no es consecuencia de los otros)?
2. ¿Como sabemos que estos axiomas son suficientes (que no faltan mas axiomas)?

3. ¿Como sabemos que estos axiomas se pueden cumplir juntos, que no son contradictorios?

Se puede probar la consistencia mostrando que existe un *modelo* que cumple todos los axiomas. y se puede probar la independencia hallando modelos que cumplan todos los axiomas excepto uno.

Problemas

3. ¿Como definirías ángulos usando sólo segmentos de recta?¿Cuando dirías que son congruentes?
4. Supongamos que hay un plano que cumple todos los axiomas, pero que sólo nos fijamos en una parte de el, digamos lo que queda en el interior de un círculo ¿Cuales axiomas se cumplen ahi y cuales no?
5. Supongamos que en los axiomas de Hilbert intercambiamos *puntos* por *líneas* ¿Como cambia la interpretación de cada axioma? ¿Lo que se obtiene es otra vez un plano euclidiano?

El plano cartesiano

En el siglo XVII Descartes propuso un modelo del plano euclidiano basado en los números reales:

$$\mathbb{R}^2 = \{(x, y)/x, y \in \mathbb{R}\}$$

Cada punto del plano está representado por una pareja de números (x, y). Cada línea recta es el conjunto de soluciones de una ecuación $Ax + By = C$ con $A, B, C \in \mathbb{R}$ y $A \neq 0$ o $B \neq 0$.

El que $\mathbb{R}^2$ sea un **modelo** del plano euclidiano significa que cumple todos los axiomas.

Para ver que por dos puntos pasa una recta hay que ver que dados dos pares de números (x_1, y_1) y (x_2, y_2) existe una ecuación $Ax + By = C$ de la que ambos son soluciones. Para esto basta tomar $A = y_2 - y_1$, $B = x_1 - x_2$ y $C = y_2x_1 - x_2y_1$

Para ver que dos rectas distintas se cruzan a lo mas en un punto basta mostrar que si $Ax + By = C$ y $A'x + B'y = C'$ tienen dos soluciones comunes entonces sus coeficientes son proporcionales y por lo tanto tienen las mismas soluciones.

Para ver que por un punto fuera de una línea recta pasa exactamente una paralela basta ver que las paralelas a $Ax + By = C$ tienen ecuaciones de la forma $Ax + By = C'$ con $C' \neq C$, de modo que si (x_1, y_1) no está en $Ax + By = C$ (es decir, si $Ax_1 + By_1 = C' \neq C$) entonces la paralela es $Ax + By = C'$.

Si en lugar de $\mathbb{R}$ utilizamos otro campo $\mathbb{K}$, como $\mathbb{Q}$ (los racionales), o $\mathbb{A}$ (los números algebraicos) o $\mathbb{C}$ (los números complejos), obtenemos un plano $\mathbb{K}^2$ donde las líneas cumplen estos mismos axiomas, pero en otros aspectos pueden ser muy distintas. Para que se cumplan los otros axiomas los campos necesitan tener otras propiedades, y se puede demostrar que el único que las tiene todas es $\mathbb{R}$.

Cada línea recta en $\mathbb{R}^2$ se puede escribir como un conjunto $\{(at+b, ct+d)/t \in \mathbb{R}\}$, y podemos definir los segmentos de recta como los conjuntos $\{(at+b, ct+d)/t_0 \leq t \leq t_1\}$.

La distancia entre dos puntos $p = (x_1, y_1)$ y $q = (x_2, y_2)$ se define como $d(p,q) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$.

Los axiomas de orden son consecuencias de la desigualdad del triángulo: $d(p,q) \leq d(p,r) + d(r,q)$ donde la igualdad se da si y solo si p, q, r están alineados y r está entre p y q. Para los axiomas de congruencia definimos la longitud de un segmento como la distancia entre sus puntos extremos y decimos que dos segmentos son congruentes si tienen longitudes iguales. Pero falta definir la congruencia de ángulos.

Los axiomas de continuidad son consecuencia de los axiomas de los números reales.

Al utilizar coordenadas podemos describir propiedades geométricas usando ecuaciones. De este modo muchos problemas geométricos se convierten en problemas algebraicos, y viceversa. Por ejemplo, el círculo de radio r centrado en (x_1, y_1) es el conjunto de soluciones de la ecuación $(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2 = r^2$. Los polinomios de grado 2 corresponden a las cónicas y los de grado mayor dan otras curvas especiales llamadas curvas algebraicas. Sin embargo no todas las curvas son algebraicas, y el álgebra no basta para definir otras propiedades geométricas, como las longitudes de las curvas o las áreas que encierran. Para esto hacen falta vectores y el cálculo.

Problemas

6. Muestra que en $\mathbb{Q}^2$
   a. Hay líneas que pasan por el centro de un círculo que no intersectan al círculo.
   b. No todos los ángulos pueden bisectarse.
   c. No hay segmentos congruentes en todas las rectas.
   d. ¿Existen triángulos equiláteros ?

7. *a.* ¿Que forma tienen las líneas en $\mathbb{C}^2$?
   b. ¿Que ecuación tiene la línea que pasa por $(1, i)$ y $(i, 0)$?
   c. ¿En que punto se intersectan las líneas $x + iy = 1$ y $ix + y = 1$?

8. *a.* ¿Como definirías la distancia entre dos puntos en $\mathbb{C}^2$?
   b. ¿Que forma tienen los círculos en $\mathbb{C}^2$?
   c. ¿En cuantos puntos se intersectan dos círculos en $\mathbb{C}^2$?

Vectores

Un **vector** en $\mathbb{R}^2$ es un segmento dirigido entre dos puntos. Al vector de $p = (x_1, y_1)$ a $q = (x_2, y_2)$ se le denota como $\vec{pq} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$, que no guarda la información de donde empieza ni donde termina, de modo que podemos identificar a cada vector del plano con uno que comienza en el origen y podemos identificar a cada punto del plano con el vector que va del origen al punto.

La **norma** del vector $V = (x, y)$ es la longitud del segmento, que es $|V| = \sqrt{x^2 + y^2}$. Los vectores se pueden sumar y multiplicar por números reales: Si $U = (x, y)$ y $V = (x', y')$ entonces $U + V = (x + x', y + y')$ y $kU = (kx, ky)$. La suma de vectores y el producto por reales tienen significados geométricos independientes de las coordenadas: $U + V$ es la diagonal del paralelogramo determinado por U y V, y kU es un vector con la misma dirección que U pero escalado por el factor k.

Los vectores pueden usarse para describir lineas rectas: la recta que pasa por el punto P en dirección del vector V es $\{P + tV/t \in \mathbb{R}\}$ y el segmento de recta que va de P a Q es $\{(1-t)P + tQ/,0 \leq t \leq 1\}$.

Por la desigualdad del triángulo $|U + V| \leq |U| + |V|$ y la igualdad se da si y solo si U y V tienen la misma dirección y sentido.

Por la ley de los cosenos $|U - V|^2 = |U|^2 + |V|^2 - 2|U||V|cos(\phi)$ donde ϕ es el ángulo que forman los dos vectores basados en el mismo punto. Si lo escribimos usando coordenadas queda

$(x - x')^2 + (y - y')^2 = x^2 + y^2 + x'^2 + y'^2 - 2|U||V|cos(\phi)$ y simplificando queda $xx' + yy' = |U||V|cos(\phi)$

Así que el número real $xx' + yy'$ guarda información geométrica sobre los vectores. A este número se le llama el **producto interno** de U y V y se le denota por $U \cdot V$.

Observar que

- $U \cdot U = |U|^2$ así que el producto interno determina las normas de los vectores.
- $U \cdot V \leq |U||V|$ y la igualdad se da si y solo si U y V tienen la misma dirección y sentido.
- $U \cdot V = 0$ si y solo si U y V son perpendiculares.
- $cos(\phi) = \frac{U \cdot V}{|U||V|}$ de modo que el producto interno determina los ángulos entre vectores.

Problemas

9. Demuestra la desigualdad del triángulo algebráicamente, sin usar geometría.
10. *a*. ¿Como se ven todos los vectores cuyo producto punto con un vector fijo es constante?

    b. ¿Cuantos vectores existen cuyo producto punto con $[3, -2]$ sea 4 y su producto punto con $[1, 4]$ sea -1?
11. Si U, V son vectores del plano y $|U| = 2$, $|V| = 3$ y $|U + V| = 4$. Calcula $U \cdot V$ y $|U - V|$.

12. Demuestra que el área del paralelogramo determinado por dos vectores u y v del plano es $u \cdot v^\perp$, donde $v^\perp$ es un vector perpendicular a v y del mismo tamaño.

Transformaciones

Una **transformación** del plano es una función $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ que es continua y tiene inversa continua.

Nos interesa ver como son las transformaciones del plano que envían rectas en rectas, y como son las que preservan distancias, o ángulos o áreas. Las transformaciones del plano que envían rectas en rectas, y preservan distancias y ángulos se llaman **transformaciones rígidas**, porque son las que no cambian la forma de las figuras. Si una transformación del plano preserva distancias entre puntos entonces por la desigualdad del triángulo debe enviar líneas rectas en líneas rectas, y por la ley de los cosenos debe preservar ángulos, por lo tanto es una transformación rígida Pero hay transformaciones que preservan rectas que no preservan distancias o ángulos.

Ejemplo. $\cdot$ Si (a,b) es cualquier vector entonces la función $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por $T(x,y) = (x+a, y+b)$ preserva distancias y por lo tanto es una transformación rígida.

Ejemplo. $\cdot$ La función $M(x,y) = (ax, by)$ con $a, b \neq 0$ envía rectas en rectas y preserva la suma de vectores, pero solo preserva distancias si $|a| = |b| = 1$ y solo preserva ángulos si $|a| = |b|$.

Si una transformación biyectiva $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ envía rectas en rectas entonces debe mandar paralelas en paralelas, así que si T fija al origen entonces debe preservar la suma de vectores. De modo que si $T(1,0) = (a,b)$ y $T(0,1) = (c,d)$ entonces $T(x,y) = T(x(1,0) + y(0,1)) = x(a,b) + y(c,d) = (ax+cy, bx+dy)$. Así que T esta totalmente determinada por las imágenes de $(1,0)$ y $(0,1)$ y cualquier transformación de esta forma envía rectas en rectas. Las transformaciones que envían rectas en rectas y preservan el origen se llaman *transformaciones lineales*. Las que envían rectas en rectas (pero no necesariamente preservan el origen) se llaman *afines*.

Si una transformación lineal T preserva distancias, entonces T debe enviar los vectores $(1,0)$ y $(0,1)$ a dos vectores que tengan el mismo tamaño y que formen el mismo ángulo, de modo que $T(1,0)$ y $T(0,1)$ deben ser vectores perpendiculares y de tamaño 1. Por lo tanto T es de la forma $T(x,y) = (ax+by, \pm bx \mp ay)$ con $a^2 + b^2 = 1$ y todas las transformaciones de esta forma son rígidas (tarea).

Teorema. Si dos segmentos de recta tienen la misma longitud, existen transformaciones rígidas que llevan uno al otro. Si dos triángulos tienen lados iguales, existe una transformación rígida que lleva uno al otro.

Problemas

13. Muestra que las transformaciones de $\mathbb{R}^2$ de la forma $T(x,y)=(ax+by+c,-bx+ay+d)$ con $a^2+b^2=1$ son rotaciones, y las de la forma $T(x,y)=(ax+by+c,bx-ay+d)$ son reflexiones.

14. *a*. Encuentra una transformación del plano que preserve ángulos pero no preserve distancias.

    b. Encuentra una transformación del plano que preserve áreas pero no preserve distancias.

    c. Muestra que si una transformación lineal del plano preserva áreas y ángulos entonces preserva distancias.

15. Demuestra que si una transformación lineal del plano aumenta todas las longitudes entonces debe aumentar todas las áreas. Muestra el recíproco no es cierto.

16. ¿Que tanto cambia las longitudes la transformación $T(x,y)=(x+y,x)$? Encuentra los factores máximo y mínimo.

17. ¿Será cierto que si T es una transformación lineal del plano entonces las direcciones donde T alarga mas y menos son perpendiculares?

Curvas

Una **curva parametrizada** en el plano es un conjunto de puntos de la forma $c(t)=(x(t),y(t))$ donde las coordenadas $x(t)$ y $y(t)$ son funciones continuas para t en un intervalo en $\mathbb{R}$. Continuidad es lo menos que podemos pedirle a las curvas, pero aún así las curvas pueden ser mucho mas feas de lo que uno se imagina: hay curvas que no tienen una dirección definida en ningún punto, y otras que pasan por todos los puntos del plano.

La curva $c(t)=(x(t),y(t))$ es una **curva diferenciable** si $x(t)$ y $y(t)$ son funciones diferenciables. Si pensamos que $c(t)$ da la posición de un punto en movimiento en el instante t entonces la derivada $c'(t)$ da la velocidad del punto en ese instante. En este caso $c'(t)=(x'(t),y'(t))$ es un vector tangente a la curva en el punto $c(t)$, y si $|c'(t)|\neq 0$ entonces podemos decir que la curva tiene una dirección bien definida en ese punto.

Ejemplo. La curva $c(t)=(t,t^2)$ describe una parábola, un vector tangente a la curva en el punto $c(t)$ es $c'(t)=(1,2t)$.

Podemos calcular el ángulo entre dos curvas que se intersectan como el ángulo entre sus vectores tangentes en el punto de intersección.

Los axiomas de la geometría euclidiana solo dan una manera de medir segmentos de recta, ángulos y áreas de rectángulos, con lo que podemos medir longitudes y areas de polígonos y arcos de círculos. Para otras curvas necesitamos usar limites y cálculo.

Podemos estimar la longitud de una curva $c(t)$ para $t \in [a, b]\}$ aproximándola con poligonales, dividiendo el intervalo $[a, b]$ en subintervalos pequeños $[t_0, t_1], [t_1, t_2], ..., [t_i, t_{i+1}], ..., [t_{n-1}, t_n]$ y considerando los segmentos de recta que unen a los puntos de la curva correspondientes a los t_i's. Si asumimos que los segmentos de recta son los caminos mas cortos entre los puntos entonces su longitud $l(c)$ es mayor o igual que la longitud de la poligonal $l(c) \geq \sum_1^n |c(t_i) - c(t_{i-1})|$ y si tomamos subdivisiones cada vez mas finas esperaríamos aproximarnos cada vez mas a $l(c)$, de modo que $l(c) = sup\{\sum_1^n |c(t_i) - c(t_{i-1})|\}$ donde el supremo se toma sobre todas las subdivisiones del intervalo. (pero es posible que las sumas no estén acotadas y entonces el supremo no exista)

Si la curva $c(t)$ es continuamente diferenciable en el intervalo $[a, b]$ entonces cuando $|t_i - t_{i-1}|$ es pequeño el vector $c(t_i) - c(t_{i-1})$ se parece a $(t_i - t_{i-1})c'(t')$ para $t_{i-1} \leq t' \leq t_i$ y se puede demostrar que $l(c) = \int_a^b |c'(t)|dt$.

Ejemplo. Calculemos la longitud del segmento de recta entre los puntos (a, b) y (c, d) con esta definición. El segmento puede parametrizarse $c(t) = (a + t(c - a), b + t(d - b))$ para $0 \leq t \leq 1$, de modo que $c'(t) = (c - a, d - b)$ y su longitud es $\int_0^1 |c'(t)|dt = \int_0^1 \sqrt{(c-a)^2 + (d-b)^2}dt = \sqrt{(c-a)^2 + (d-b)^2}$ que es la distancia entre los puntos.

Teorema. En $\mathbb{R}^2$ la trayectoria mas corta entre dos puntos es el segmento de recta que los une.

Demostración. Podemos suponer que los puntos están sobre el eje x, ya que hay isometrías del plano que envían a cualquier segmento de recta a un segmento así, y las isometrías preservan la longitud de las curvas (tarea).

Supongamos que los puntos son $(a, 0)$ y $(b, 0)$ con $a < b$ y sea $c(t) = (x(t), y(t))$, $0 \leq t \leq 1$ una trayectoria diferenciable entre ellos. Entonces la longitud de c es

$$\int_0^1 |c'(t)|dt = \int_0^1 \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}dt \geq \int_0^1 \sqrt{x'(t)^2}dt = \int_0^1 |x'(t)|dt \geq \int_0^1 x'(t)dt = x(1) - x(0) = b - a.$$

La primera desigualdad es estricta a menos que $y'(t) = 0$ para $0 \leq t \leq 1$, lo que dice que $y(t)$ es constante y por lo tanto $c(t)$ es una trayectoria horizontal. (la segunda desigualdad es estricta a menos que $|x'(t)| = x'(t)$ para $0 \leq t \leq 1$ lo que dice que $x'(t) \geq 0$ y por lo tanto $x(t)$ es no decreciente, por lo que $q(t)$ recorre el segmento siempre en la misma dirección). •

Aunque la integral para calcular la longitud de una curva parece sencilla, en la práctica puede ser muy difícil. Por ejemplo, no hay fórmulas explícitas para el perímetro de una elipse.

Problemas

18. Muestra que la curva $c(t) = (t^3, t^5)$ tiene una dirección bien definida en todos los puntos excepto quizás en uno. ¿que sucede ahi?

19. ¿Con que ángulo se cruza a sí misma la curva $c(t) = (t^3 - t, t^2)$?

20. Construye una curva $c : [0, 1] \to \mathbb{R}^2$ que tenga longitud infinita. (asegurate que sea continua)

21. Demuestra que las transformaciones rígidas preservan las longitudes de todas las curvas (no solo las líneas rectas)

Transformaciones y derivadas

Usando cálculo podemos ver como es que las transformaciones y otras funciones diferenciables de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$ cambian las longitudes, los ángulos y las áreas. Para hacer esto conviene pensar a las curvas parametrizadas como trayectorias de puntos en movimiento.

Ejemplo. La transformación $T(x, y) = (2x + y, x - y)$ es lineal y por lo tanto envía rectas en rectas y paralelas en paralelas. Por ejemplo, envía la recta $r(t) = (t+3, 2t-1)$ a la recta $T \circ r(t) = (4t+2, -t+4)$ y envía el círculo $r(t) = (cos(t), sen(t))$ a la curva $T \circ r(t) = (2cos(t) + sen(t), cos(t) - sen(t))$ (que curva es esta?)

T envía los vectores $[1, 0]$ y $[0, 1]$ a los vectores $[2, 1]$ y $[1, -1]$ respectivamente (sin importar donde estén basados). T cambia las longitudes de los vectores dependiendo de su dirección: los vectores en la dirección de $[1, 0]$ se alargan por un factor $\sqrt{5}$ y los vectores en la dirección de $[0, 1]$ se alargan por un factor $\sqrt{2}$. T cambia los ángulos entre vectores: como unos aumentan otros deben disminuir Y T convierte a los cuadrados determinados por los vectores $[1, 0]$ y $[0, 1]$ (que tienen área 1) en paralelogramos determinados por los vectores $[2, 1]$ y $[1, -1]$ (que tienen área 3). Así que T triplica el área de todos los cuadrados horizontales, y por lo tanto triplica el área de todas las figuras del plano.

Algo similar ocurre con todas las transformaciones lineales: cambian las longitudes dependiendo solo de la dirección, aumentan unos ángulos y disminuyen otros, y cambian las áreas de todas las figuras por igual. Todos estos cambios se pueden leer de la matriz de la transforación.

Una transformación no lineal puede deformar al plano mucho mas: no tiene por que enviar rectas a rectas, pero si es diferenciable sí podemos decir que envía vectores en vectores. Si pensamos en un vector v basado en el punto p como la velocidad de una trayectoria que pasa por p, entonces T manda la trayectoria a otra trayectoria que pasa por el punto $T(p)$ y la velocidad de esta trayectoria es otro vector al que podemos pensar como la imagen de v.

Las funciones diferenciables envían vectores en vectores, pero pueden cambiar sus direcciones y tamaños y los ángulos que forman dependiendo del punto donde están basados, y pueden cambiar las áreas de distintas maneras en distintos puntos. Estos cambios miden como es que la función deforma *infinitesimalmente* al plano.

Ejemplo. La función $f(x, y) = (x + y, y^3)$ envía el punto $(0, 1)$ al punto $(1, 1)$ y el punto $(1, 2)$ al punto $(3, 8)$. f envía la recta $r(t) = (t, 2)$ a $f \circ r(t) = (t + 2, 8)$ que es otra recta, pero f envía la recta $r(t) = (0, t)$ a $f \circ r(t) = (t, t^3)$ que no es una recta,

¿A donde va el vector $[1, 0]$ basado en el punto $(0, 2)$? $[1, 0]$ es la velocidad de la trayectoria $r(t) = (t, 2)$ para cada t, esta va a dar a la trayectoria $s(t) = (t^2 + 2, 2t)$ cuya velocidad en el instante t es

$s'(t) = [2t, 2]$ que en $t = 0$ es $[0, 2]$. ¿Y a donde va el vector $[1, 0]$ basado en el punto $(1, 1)$? $[1, 0]$ es la velocidad de $r(t) = (t, 1)$ para cada t, esta trayectoria va a dar a $s(t) = (t^2 + 1, t)$ cuya velocidad en el instante t es $s'(t) = [2t, 1]$ que en $t = 1$ es $[2, 1]$.

La derivada de una función $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ en un punto p es una función lineal que manda a cada vector v basado en el punto p a otro vector basado en el punto $F(p)$. Podemos hallar la imagen de v tomando una trayectoria $c(t)$ que pase por p con velocidad v, aplicandole F para obtener la trayectoria $f \circ p(t)$ y calculando la velocidad con que esta trayectoria pasa por $F(p)$, este vector es la imagen de v.

Si $F(x, y) = (u(x, y), v(x, y))$ entonces la derivada de F en el punto (x, y) está dada por la matriz cuyas columnas son las derivadas parciales de las funciones u y v:

$$DF_{(x,y)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{bmatrix}$$

Ejemplo. $f(x, y) = (x^2 + y, xy)$ entonces $Df_{(x,y)} = \begin{bmatrix} 2x & 1 \\ y & x \end{bmatrix}$.

Si $p = (2, 3)$ entonces $f(2, 3) = (7, 6)$ y $Df_{(2,3)} = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ y esto dice que el vector $[1, 0]_{(2,3)}$ va a dar al vector $[4, 3]_{(7,6)}$ y el vector $[1, 0]_{(2,3)}$ va a dar al vector $[1, 2]_{(7,6)}$. Y como $Df_{(2,3)}$ es una función lineal el vector $[a, b]$ va a dar al vector $[4a + b, 3a + 2b]$, que podemos calcular fácilmente usando el producto

$$Df_{(2,3)}[a, b] = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4a + b \\ 3a + 2b \end{bmatrix}$$

Las matrices $DF_{(x,y)}$ guardan la información mas importante del comportamiento local de la función F en cada punto (x, y): dicen a donde van a dar todos los vectores basados en el punto y como cambian sus longitudes y los ángulos entre ellos, y esto dice como es que F cambia las direcciones, las longitudes, los ángulos y las áreas muy cerca de cada punto.

La función F preserva (infinitesimalmente) las distancias en el punto p si y solo si la matriz DF_p tiene columnas que son vectores ortogonales y unitarios, y F preserva (infinitesimalmente) los ángulos en p si y solo si la matriz DF_p tiene columnas que son vectores ortogonales y distintos de $(0, 0)$. La función F preserva (infinitesimalmente) las áreas en p si y solo si la matriz tiene determinante ± 1.

Ejemplo. Ya vimos que si $f(x, y) = (x^2 + y, xy)$ entonces $Df_{(x,y)} = \begin{bmatrix} 2x & 1 \\ y & x \end{bmatrix}$. La función f preserva (infinitesimalmente) áreas en los puntos (x, y) donde $2x^2 - y = \pm 1$ y estos puntos forman dos parábolas. La función f preserva (infinitesimalmente) distancias en los puntos donde $2x + xy = 0$, $4x^2 + y^2 = 1$ y $1 + x^2 = 1$ y estas condiciones se cumplen sólo cuando $x = 0$ y $y^2 = 1$, es decir en los puntos $(0, 1)$ y en $(0, -1)$.

Las transformaciones del plano que envían rectas en rectas y preservan angulos deben cambiar todas las longitudes en la misma proporción, (independientemente de la dirección y del punto). Uno puede preguntarse si existirán funciones que preserven ángulos y no envíen rectas en rectas o cambien las longitudes en diferentes proporciones.

Ejemplo. $g(x, y) = (x^2 - y^2, 2xy)$ entonces $Dg_{(x,y)} = \begin{bmatrix} 2x & -2y \\ 2y & 2x \end{bmatrix}$ que tiene columnas ortogonales y del mismo tamaño por lo tanto la función g preserva los ángulos en todos los puntos excepto quizas en $(0, 0)$ (donde el tamaño es 0). Pero la función g multiplica (infinitesimalmente) las áreas por el factor $2x^2 + 2y^2$ que depende del punto (x, y).

Problemas

22. Considera la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por $f(x, y) = (x + y, xy)$ Dibuja una cuadrícula y su imagen bajo la función. Calcula Df y dí en que puntos preserva (infinitesimalmente)
    - *a*. distancias
    - *b*. ángulos
    - *c*. áreas
23. Si $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ es una función diferenciable, como debe ser la matriz DF para que F ...
    - *a*. aumente infinitesimalmente las longitudes?
    - *b*. aumente infinitesimalmente las áreas?
24. Encuentra una función diferenciable $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ que preserve los ángulos pero que
    - *a*. cambie las longitudes dependiendo del punto.
    - *b*. no envíe rectas en rectas.

Números complejos

Los puntos del plano euclidiano también pueden identificarse con los números complejos. Las operaciones complejas se relacionan con la geometría del plano euclidiano de manera similar a como ñas operaciones reales se relacionan la geometría de la recta euclidiana.

Las funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ de la forma $f(x) = ax + b$ (con $a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0$) corresponden a las transformaciones de la recta que preservan proporciones, multiplicando las distancias por a e invirtiendo la orientación si $a < 0$. Las funciones $f(x) = ax + b$ con $|a| = 1$ corresponden a las isometrías de la recta (traslaciones y reflexiones)

Las funciones de $\mathbb{C}$ en $\mathbb{C}$ de la forma $f(z) = az + b$ (con $a, b \in \mathbb{C}, a \neq 0$) son transformaciones del plano que preservan las proporciones y la orientación, multiplicando las distancias por $|a|$ y rotando por $arg(a)$. Las funciones $f(z) = az + b$ con $|a| = 1$ dan todas las isometrías del plano que preservan la orientación (traslaciones y rotaciones en algun punto).

Ejemplo. La función $f(z) = (2+i)z + 3$ estira por un factor $|2+i| = \sqrt{5}$ y rota por un ángulo $arg(2+i) \sim 26{,}565$ grados.

Para cada función derivable $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, la derivada $f'(x)$ da el factor de estiramiento de la función en x, y el signo dice si la función preserva o invierta la orientación alrededor de x.

Para cada función derivable $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ la derivada $f'(z)$ da el factor de estiramiento y rotación de la función en z: $|f'(z)|$ indica el estiramiento y $arg f'(z)$ indica la rotación. Todas las funciones derivables complejas preservan orientación, y todas preservan ángulos en los puntos donde $f'(z) \neq 0$

Ejemplo. La función $f(z) = z^3 + z$ tiene derivada $f'(z) = 3z^2 + 1$. En $z = 0$ la función no rota y preserva (infinitesimalmente) las distancias. En $z = 1$ y en $z = -1$ la función no rota y estira (infinitesimalmente) al cuádruple. En $z = i$ y en $z = -i$ la función rota 180 grados y estira (infinitesimalmente) al doble. En $z = \frac{1}{\sqrt{3}}i$ la derivada es 0, ahi la función encoge las distancias (infinitesimalmente) a 0.

Problemas

25. a. Muestra que la función $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ dada por $f(z) = -iz + 2$ corresponde a una rotación del plano y encuéntra el centro.

    b. Muestra que la función $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ dada por $f(x) = (1-i)(z+1)$ corresponde a una homotecia y rotación del plano alrededor de un punto. Da el factor de estiramiento y rotación y el punto.

26. Da la función compleja $f(z) = az + b$ que corresponde a rotar el plano 45 grados alrededor de 1.

27. Considera la función de $\mathbb{C}$ en $\mathbb{C}$ dada por $f(z) = z^3 - z^2$.

    a. ¿Cuantas veces cubre f al plano? (¿cuantos puntos van a dar a un mismo punto?)

    b. ¿En que puntos f preserva (infinitesimalmente) las distancias? ¿En que puntos multiplica (infinitesimalmente) las distancias por 2?

    c. ¿En que puntos f no rota? ¿En que puntos rota -90 grados?

28. La inversión compleja es la función $I : \mathbb{C} - 0 \to \mathbb{C} - 0$ dada por $I(z) = 1/z$.

    a. Describe geométricamente lo que hace esta transformación.

    b. Muestra que I no preserva rectas pero si preserva ángulos.

    c. ¿Cuanto estira y cuanto rota I alrededor de 1? ¿Y alrededor de $1+i$? ¿Existen puntos donde I no estire ni rote?