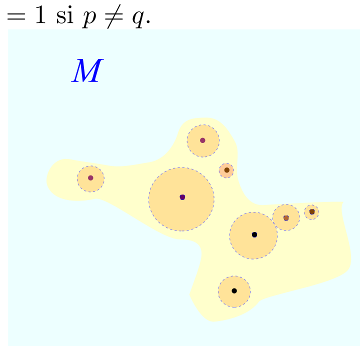
Abiertos y cerrados en espacios métricos

Un **espacio métrico** es un conjunto M en el que esta definida la distancia entre puntos. La distancia está dada por una función $d : M \times M \to \mathbb{R}$, llamada *métrica*, que tiene las siguientes propiedades:

1. $d(p, q) \geq 0$ y es 0 si y solo si $p = q$.
2. $d(p, q) = d(q, p)$ (simetría)
3. $d(p, r) \leq d(p, q) + d(q, r)$ (la desigualdad triangular)

Ejemplos de espacios métricos:

1. $\mathbb{R}^n$, con la métrica euclidiana $d(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_1 - y_1)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2}$.
2. El conjunto de todas las matrices reales de $n \times n$, con la métrica $d(A, B) = max\{|a_{ij} - b_{ij|}\}$.
3. El conjunto de todas las funciones de $[0, 1]$ a $[0, 1]$, con la *métrica uniforme* $d(f, g) = sup\{|f(x) - g(x)| \ /x \in [0, 1]\}$
4. El conjunto de todas las funciones continuas de $[0, 1]$ a $[0, 1]$, con la métrica $d(f, g) = \int_0^1 |f(x) - g(x)|dx$.
5. Cualquier conjunto X, con la *métrica discreta* $d(p, p) = 0$ y $d(p, q) = 1$ si $p \neq q$.



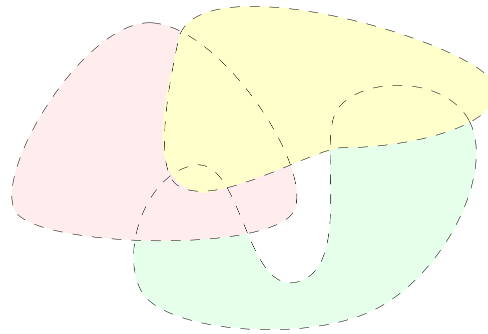
Si M es un espacio métrico y p es un punto de M, la **bola abierta** con centro en p y radio r es el conjunto $B_r(p)$ de puntos de M cuya distancia a p es menor que r. Las bolas abiertas con centro en p son **vecindades** (redondas) de p en M.

Decimos que un subconjunto S de M es **abierto** si cada uno de sus puntos tiene alguna vecindad contenida en S.

Observar que las bolas abiertas son abiertos, ya que cada punto q de $B_r(p)$ está a distancia $s < r$ de p, así que $B_{r-s}(q)$ es una vecindad de q contenida en $B_r(p)$.
Asi que los abiertos de M son precisamente los conjuntos que son uniones de bolas abiertas en M.

Ejemplos:

1. $\{(x, y)/x + 2y < 3\}$ es abierto en $\mathbb{R}^2$, pero $\{(x, y)/x + 2y \leq 3\}$ no es abierto.
2. Las matrices invertibles forman un abierto en el espacio de las matrices de $n\times n$ (esto lo demostraremos mas adelante, hay que ver que todas las matrices que están suficientemente cerca de una matriz invertible son invertibles).
3. Las funciones discontinuas forman una abierto del espacio de funciones de $[0, 1]$ en $[0, 1]$ con la métrica uniforme (ya que todas las funciones que están suficientemente cerca de una funcion discontinua son discontinuas). Pero las funciones continuas no forman una abierto (ya que hay funciones discontinuas arbitrariamente cerca de una función continua).
4. Todos los subconjuntos de un espacio con la métrica discreta son abiertos.



Lema. En cualquier espacio métrico M:

1. $\emptyset$ y M son abiertos.
2. La unión de abiertos es un abierto.
3. La intersección *finita* de abiertos es un abierto.

Demostracion.
1. M es abierto ya que todas las vecindades de todos los puntos de M están contenidas en M. $\emptyset$ es abierto ya que no existe ningun punto en $\emptyset$ para el que la condición de tener una vecindad dentro de $\emptyset$ falle.

2. Sea $S = \cup A_i$ donde los A_i's son abiertos. Si p es un punto de S entonces p está en algún A_i, y como A_i es abierto hay una vecindad de p contenida en A_i. Como $A_i \subset S$, esa vecindad de p está contenida en S.

3. Sea $S = A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n$ donde los A_i son abiertos. Si p es un punto de S entonces p está en cada A_i, y como A_i es abierto, existe una vecindad $B_{\epsilon_i}(p)$ contenida en A_i. Si $\epsilon = min\{\epsilon_1, \epsilon_2, \dots \epsilon_n\}$ entonces la vecindad $B_\epsilon(p)$ está contenida en cada A_i y por lo tanto está contenida en S. •

Al conjunto de todos los abiertos de un espacio métrico M se le llama la **topologia** de M. Todos los conceptos topológicos serán definidos en términos de estos abiertos..

Un subconjunto S de un espacio M es **cerrado** si su complemento $M - S$ es abierto.

Ejemplos.

1. Cada punto de un espacio métrico es cerrado.
2. Las bolas cerradas son cerrados. La bola cerrada con centro en p y radio r es el conjunto $\bar{B}_r(p)$ de puntos del espacio cuya distancia a p es a lo mas r. Si un punto q no está en $\bar{B}_r(p)$ entonces su distancia a p es $s > r$, y la bola abierta $B_{s-r}(q)$ es una vecindad de q que no toca a $\bar{B}_r(p)$.
3. $\{(x, y)/x + 2y \leq 3\}$ es cerrado en $\mathbb{R}^2$.
4. Las funciones continuas forman un cerrado del espacio de funciones de $[0, 1]$ en $[0, 1]$ con la métrica uniforme, ya que las funciones discontinuas forman un abierto de ese espacio.
5. Todos los subconjuntos de un espacio con la métrica discreta son cerrados, ya que sus complementos son abiertos.

Lema. En cualquier espacio métrico M:

1. $\emptyset$ y M son cerrados.
2. La intersección de cerrados de es un cerrado.
3. La unión finita de cerrados de es un cerrado.

Demostración. Sale de las leyes de De Morgan: $(\cap a_i)^c = \cup(A_i^c)$ y $(\cup A_i)^c = \cap(A_i^c)$ y las propiedades de los abiertos.

2. Sea $S = \cap C_i$ donde los C_i son cerrados. Para ver que S es cerrado hay que ver que S^c es abierto. Pero $S^c = (\cap C_i)^c = \cup C_i^c$ y como cada C_i^c es abierto entonces $\cup C_i^c$ es abierto.

3. es análogo a 2, usando $(\cup A_i)^c = \cap(A_i^c)$. •

Ejemplos.

1. En un espacio métrico todos los conjuntos finitos de puntos son cerrados.

2. $\{1, 2, 3, 4, ..., n, ...\}$ es cerrado en $\mathbb{R}$ pero $\{1, 1/2, 1/3, 1/4, ..., 1/n, ...\}$ no lo es, ya que su complemento no es abierto (todas las vecindades de 0 tienen puntos del conjunto).

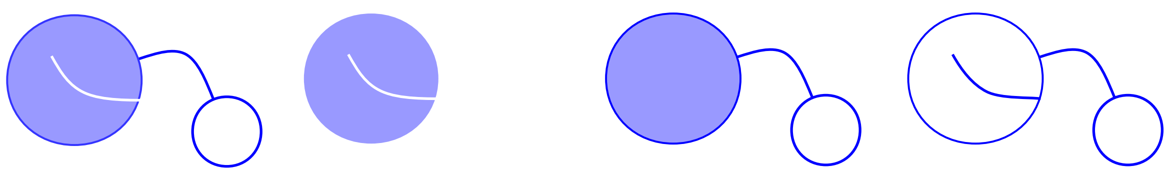
3. $\mathbb{Q}$ (el conjunto de números racionales) no es ni abierto ni cerrado en $\mathbb{R}$, ya que cada vecindad de un racional contiene irracionales, y cada vecindad de un irracional contiene racionales.

4. $\{(x, y)/1 < x + y \leq 2\}$ no es ni abierto ni cerrado en $\mathbb{R}^2$.

Interior, cerradura y frontera

Si S es un subconjunto de M, el **interior** de S denotado por $Int(S)$ o por $\mathring{S}$ es el conjunto de puntos de M que tienen alguna vecindad contenida en S. La **cerradura** de S, denotada por $Cl(S)$ o por $\bar{S}$ es el conjunto de puntos de M tales que todas sus vecindades contienen puntos de S. La **frontera** de S denotada por $Fr(S)$ es el conjunto de puntos de M tales que todas sus vecindades contienen puntos de S y también puntos de $M - S$. Observar que $Int(S) \subset S \subset Cl(S)$ y que $Fr(S) = Cl(S) - Int(S)$.

Ejemplo en el plano:



S $\quad$ $Int(S)$ $\quad$ $Cl(S)$ $\quad$ $Fr(S)$.

Ejemplo en $\mathbb{R}$: $Int(\mathbb{Q}) = \emptyset$, $Cl(\mathbb{Q}) = \mathbb{R}$, $Fr(\mathbb{Q}) = \mathbb{R}$

Lema. Si S es cualquier subconjunto de un espacio métrico M entonces

1. $Int(S)$ es abierto

2. $Cl(S)$ es cerrado

3. $Fr(S)$ es cerrado y $Fr(S) = Fr(M - S)$

Demostración.

1. Para ver que $Int(S)$ es abierto, hay que ver que cada punto de $Int(S)$ tiene una vecindad contenida en $Int(S)$. Si p está en $Int(S)$ entonces p tiene una vecindad $B_\epsilon(p)$ contenida en S. Cada punto q de $B_\epsilon(p)$ tiene una vecindad $B_{\epsilon'}(q)$ que está contenida en $B_\epsilon(p)$ y por lo tanto está contenida en S, asi que q también está en $Int(S)$.

2. Para ver que $Cl(S)$ es cerrado, hay que ver que su complemento es abierto, es decir que cada punto que no está en $Cl(S)$ tiene una vecindad formada por puntos que no están en $Cl(S)$. Si p no está en $Cl(S)$ entonces tiene una vecindad $B_\epsilon(p)$ que no tiene puntos de S. Cada punto q de $B_\epsilon(p)$ tiene una vecindad $B_{\epsilon'}(q)$ que está contenida en $B_\epsilon(p)$ y por lo tanto no contiene puntos de S, asi que q no está en $Cl(S)$.

3. $Fr(S)$ es la intersección de cerrados $Cl(S)$ y $M - Int(S)$. $Fr(S) = Fr(M - S)$ ya que la definición de la forntera es simétrica respecto a S y a su complemento $M - S$. •

Lema. Si S es cualquier subconjunto de un espacio métrico M entonces:

1. $Int(S)$ es al abierto mas grande de M contenido en S, que es la unión de todos los abiertos de M que están contenidos en S.

2. $Cl(S)$ es el cerrado mas chico de M que contiene a S, que es la intersección de todos los cerrados de M que contienen a S.

Demostración.

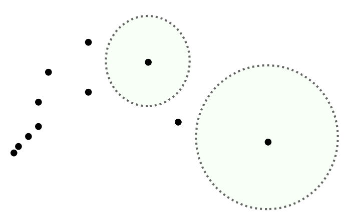
1. $Int(S)$ es un abierto contenido en S, y todo abierto A contenido en S debe estar contenido en $Int(AS)$, ya que cada punto p de A tiene una vecindad contenida en A y por lo tanto en S, así que p está en $Int(A)$.

2. Cl(A) es un cerrado que contiene a S, y todo cerrado C que contiene a S debe contener a $Cl(S)$ ya que $M - C$ es un abierto que no intercecta a S, as que cada punto q de $M - C$ tiene una vecindad que no intercecta a S y por lo tanto q no puede estar en $Cl(S)$. •

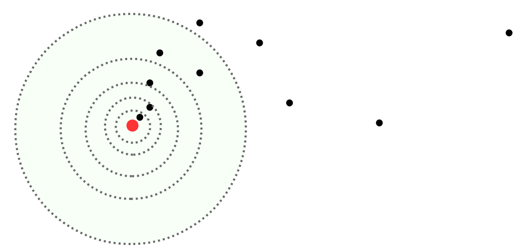
Puntos de acumulación y puntos aislados

$Cl(S)$ contiene dos clases de puntos: los puntos que están en S y tienen alguna vecindad sin otros puntos de S son llamados **puntos aislados** de S, y los puntos (que pueden estar o no estar en S) tales que todas sus vecindades tienen otros puntos de S son llamados **puntos límite** o **puntos de acumulación** de S.

Como S es cerrado si y solo si $S = Cl(S)$ (ya que $Cl(S)$ es el cerrado mas chico que contiene a S), y $Cl(S) = S \cup \{puntos\ de\ acumulacion\ de\ S\}$, entonces S es cerrado si y solo si S contiene a todos sus puntos de acumulación.



Puntos aislados



Punto de acumulación

Ejemplos:

1. Si $S = [0, 1) \subset \mathbb{R}$ entonces ningún punto de S es aislado. Los puntos de acumulación de S son los puntos del intervalo $[0, 1]$.

2. Si $S = \{1, 2, 3, 4, \dots\} \subset \mathbb{R}$ entonces todos los puntos de S son aislados, y S no tiene puntos de acumulación en $\mathbb{R}$.

3. Si $S = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots, 0\} \subset \mathbb{R}$ entonces todos los puntos de S distintos de 0 son aislados, y 0 es el único punto de acumulación de S en $\mathbb{R}$.

4. $\mathbb{Q}$ no tiene puntos aislados en $\mathbb{R}$; todos los puntos de $\mathbb{R}$ son puntos de acumulación de $\mathbb{Q}$. ya que cada vecindad de cualquier real contiene racionales.

Lema. Un punto p de M es punto de acumulación de S si y solo si existe una sucesion de puntos *distintos* en S que convergen a p:

Demostración.

$\Leftarrow$ Si p es límite de una sucesión $(q_1, q_2, q_3, \dots)$ de puntos distintos de p en S entonces para cada $\epsilon > 0$ existe una n tal que $d(q_i, p) < \epsilon$ para $i \geq n$, así que cada vecindad de radio ϵ de p tiene puntos de S distintos de p.

$\Rightarrow$ Si p es punto de acumulación de S, entonces cada vecindad $B_\epsilon(p)$ tiene puntos de S distintos de p. Veamos como construir una sucesión de estos puntos que converja a p. Sea $\epsilon_1 = 1$ y tomemos $q_1 \neq p$ en $B_{\epsilon_1}(p)$. Sea $\epsilon_2 = min\{1/2, d(p, q_1)\}$ y tomemos $q_2 \neq p$ en $B_{\epsilon_2}(p)$. Sea $\epsilon_3 = min\{1/3, d(p, q_2)\}$ y tomemos $q_3 \neq p$ en $B_{\epsilon_3}(p)$. En general, sea $\epsilon_n = min\{1/n, d(p, q_{n-1})\}$ y tomemos $q_n \neq p$ en $B_{\epsilon_n}(p)$. Entonces$(q_1, q_2, q_3, \dots, q_n, \dots)$ es una sucesión de puntos distintos en S que convergen a p. •

Problemas

1. Muestra que los únicos subconjuntos de $\mathbb{R}^n$ que son simultáneamente abiertos y cerrados son $\mathbb{R}^n$ y $\emptyset$.
2. Muestra que cada abierto de $\mathbb{R}^n$ es la unión de bolas con centros racionales y radios racionales.
3. ¿En $\mathbb{R}^n$ hay mas: conjuntos abiertos, o cerrados, o conjuntos que no son ni abiertos ni cerrados? hint: usa el problema anterior
4. Di si los siguientes subconjuntos son abiertos o cerrados o ninguna de los dos cosas:
   a. El conjuntos de las matrices triangulares en el espacio de matrices de $n \times n$
   b. El conjunto de las funciones crecientes en el espacio de funciones de $[0, 1]$ en $[0, 1]$ con la métrica uniforme.
5. Encuentra el interior, la frontera y la cerradura. justifica tus respuestas sin demostrarlas formalmente
   a. $\{(x, y)/0 < x^2 - y^2 \leq 1\}$ como subconjunto de $\mathbb{R}^2$.
   b. Un cuadrado, visto como subconjunto del plano y como subconjunto del espacio.
   c. El conjunto de funciones continuas, en el espacio de funciones de $[0, 1]$ a $[0, 1]$ con la métrica uniforme.
6. Si A es conexo (tiene un solo pedazo) ¿Es posible que $Int(A)$ no sea conexo? ¿Y $Fr(A)$? y ¿Y $Cl(A)$?
7. Demuestra que $Cl(A \cap B) \subset Cl(A) \cap Cl(B)$ y da un ejemplo donde $Cl(A) \cap Cl(B) \not\subset Cl(A \cap B)$
8. ¿Existe alguna relación de contención entre A, $Cl(Int(A))$ y $Int(Cl(A))$?
9. Muestra que puede haber muchos subconjuntos distintos de $\mathbb{R}^n$ con la misma frontera.
10. ¿Para cuales subconjuntos del plano se cumple que $Fr(Fr(A)) = Fr(A)$?
11. ¿Cuales subconjuntos de $\mathbb{R}^n$ son frontera de algún conjunto? ¿Y frontera de algún conjunto abierto? Da condiciones necesarias y suficientes.
12. Muestra que el conjunto de puntos de acumulación de cualquier conjunto A en un espacio métrico es cerrado. ¿Es verdad que el conjunto de puntos aislados de A es cerrado?