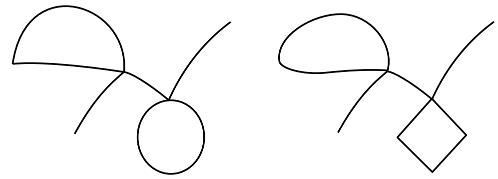
# La Característica de Euler

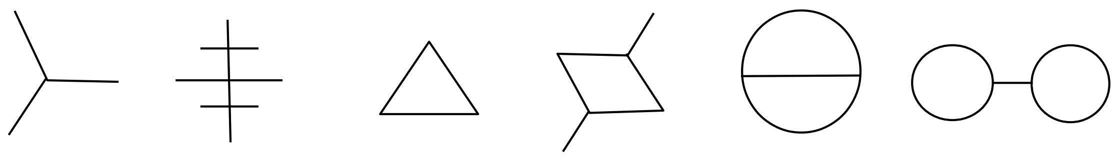
Un invariante topológico es algo (un número, por ejemplo) que le asociamos a un espacio $X$ y que solo depende de la forma topológica de $X$, es decir que no cambia al hacer homeomorfismos. Los invariantes topológicos son uútiles para distinguir formas topológicas. Por ejemplo, el número de componentes conexas de un espacio $X$ es un invariante topológico, ya que los homeomorfismos las preservan.

Si $G$ es una gráfica (formada por arcos homeomorfos a [0,1] que se pegan en sus extremos) podemos contar el número $a$ de arcos y el número de $v$ vértices donde se pegan. Estos números no son invariantes topológicos ya que sin cambiar la forma topológica de $G$ podemos partir una arista en dos (lo que aumenta $v$ en 1 y aumenta $a$ en 1). Reciprocamente, si hay un vértice donde solo llegan dos aristas, podemos unirlas y eliminar el vértice (esto disminuye $a$ en 1 y disminuye $v$ en 1). Así que $v - a$ no cambia. Esto dice que $v - a$ es un invariante topológico, llamado la **caracteristica de Euler** de $G$ y denotado por $\chi(G)$.



| | |
|---|---|
| v = 5 | v = 7 |
| a = 6 | a = 8 |
| v - a = -1 | v - a = -1 |

Ejemplos.



| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $v = 4$ | $v = 11$ | $v = 3$ | $v = 6$ | $v = 2$ | $v = 2$ |
| $a = 3$ | $a = 10$ | $a = 3$ | $a = 6$ | $a = 3$ | $a = 3$ |
| $\chi = 1$ | $\chi = 1$ | $\chi = 0$ | $\chi = 0$ | $\chi = -1$ | $\chi = -1$ |

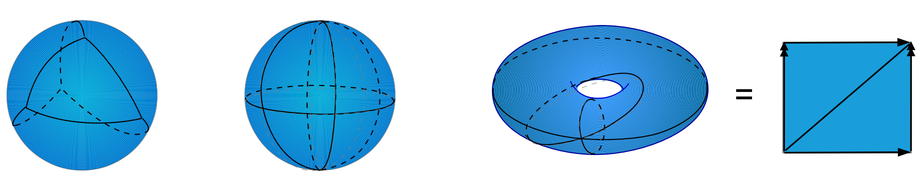
.

Asi que dos gráficas homeomorfas deben tener la misma $\chi$, pero dos graficas con la misma $\chi$ no son necesitan ser homeomorfas. Pregunta: ¿Que dice $\chi(G)$ de $G$?

Si $S$ es una superficie o una superficie con borde, podemos triangularla y contar el número de vértices, aristas y triángulos de la triangulación. Estos números no son invariantes topológicos ya que hay triangulaciones de $S$ con distinto número de triangulos, aristas y vertices, pero podemos intentar combinarlos para obtener un invariante.

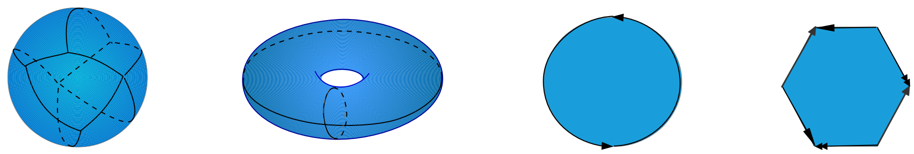
La **característica de Euler** de una triangulación es el número $v - a + t$.

Ejemplos.



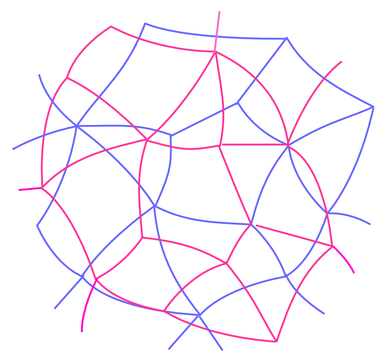
| | | |
|---|---|---|
| $v = 4$ | $v = 6$ | $v = 1$ |
| $a = 6$ | $a = 12$ | $a = 3$ |
| $t = 4$ | $t = 8$ | $t = 2$ |
| $v - a + t = 2$ | $v - a + t = 2$ | $v - a + t = 0$ |

En lugar de dividir una superficie en triángulos, podemos dividirla en discos poligonales (que se toquen en aristas o en vértices) y podemos definir la característica de Euler de la subdivisión como $v - a + d$ donde $d$ es el número de discos.



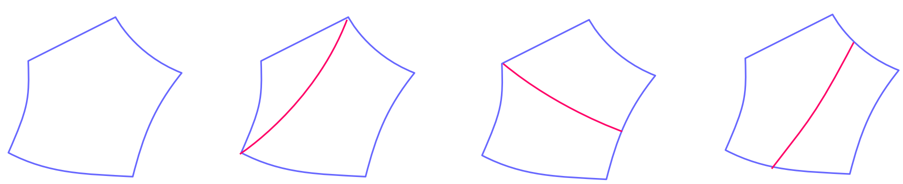
| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $v = 6$ | $v = 1$ | $v = 1$ | $v = 2$ | . |
| $a = 10$ | $a = 2$ | $a = 1$ | $a = 3$ | . |
| $d = 6$ | $d = 1$ | $c = 1$ | $c = 1$ | . |
| $v - a + d = 2$ | $v - a + d = 0$ | $v - a + d = 1$ | $v - a + d = 0$ | . |

**Teorema**: La característica de Euler $\chi(S) = v - a + d$ es un *invariante topológico* de la superficie $S$: solo depende de la forma topológica de $S$ y no de la subdivisión.



*Demostración*. Hay que ver que para cualesquiera dos subdivisiones de $S$ en discos poligonales el número $v-a+d$ es el mismo. Dadas dos subdivisiones de $S$ es posible deformar la gráfica que define a una para que intersecte a la gráfica que define a la otra en un número finito de puntos. Entonces la unión de las dos gráficas es una gráfica que divide a la superficie en discos poligonales y esto da una subdivisión común a las dos divisiones originales.

Así que para ver que $\chi$ es invariante bajo subdivisiones, basta ver que al subdividir un disco en discos mas pequeños el número $v - a + d$ no cambia. Como cualquier subdivisión se puede hacer por pasos, cortando cada vez un disco a lo largo de un arco que lo cruza, basta ver que el conteo no cambia al hacer un corte. Hay 3 casos depediendo de si el arco una vértices y/o aristas del discoempieza en vértice del disco:



| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $v$ | $v$ | $v+1$ | $v+2$ | . |
| $a$ | $a+1$ | $a+2$ | $a+3$ | . |
| $d$ | $d+1$ | $d+1$ | $d+1$ | . |

En los 3 casos, como el incremento en aristas cancela a los incrementos en vértices y celdas, $v - a + c$ no cambia. Esto prueba que $v - a + d$ no depende de la subdivisión. •

Ojo: Si se divide a la superficie en regiones que no son discos, el número $v - a + r$ **no** es un invariante.

Como la caracteristica de Euler solo depende de la forma topológica, dos superficies con distinta característica deben ser distintas, pero dos superficies con la misma característica no tienen que ser iguales.

**Ejemplos**. Ya vimos que $\chi(S^2) = 2$, $\chi(T^2) = 0$ y $\chi(P^2) = 1$ así que la característica puede distinguir entre la esfera, el toro y el plano proyectivo. Pero $\chi(D^2) = 1$ y $\chi(K^2) = 0$, asi que la característica no distingue el disco del plano proyectivo, y tampoco distingue el toro de la botella de Klein.

Veamos cuales superficies sí puede distinguir y cules no. Sabemos que todas las superficies compactas son homeomorfas a esferas o sumas conexas de toros o planos proyectivos,

**Afirmación**. $\chi(mT^2) = 2 - 2m$ y $\chi(nP^2) = 2 - n$

*Demostración.* La suma conexa de $m$ toros se obtiene de un poligono de 4n lados de modo que todos sus vertices se identifican y sus lados se identifican en pares, así que $\chi(mT^2) = 1 - 2m + 1 = 2 - 2m$. La suma conexa de $n$ planos proyectivos se obtiene de un poligono de 2n lados de modo que todos sus vertices se identifican y sus lados se identifican en pares, así que $\chi(nP^2) = 1 - n + 1 = 2 - n$. •

Ahora podemos probar que las distintas sumas conexas de toros o de planos proyectivos son topológicamente distintas.

**Teorema**. La forma topológica de las superficies compactas está determinada por su caracteristica de Euler y su orientabilidad.

*Demostración.* Todas las superficies compactas son homeomorfas a esferas o sumas conexas de toros o planos proyectivos. Las fórmulas anteriores muestran que si $S$ es una superficie compacta entonces $\chi(S) \leq 2$, y que $\chi(S) = 2$ solamente si $S$ es una esfera. Además, si $m \neq m'$ entonces $\chi(mT^2) = 2 - 2m \neq 2 - 2m' = \chi(m'T^2)$ por lo que $mT^2$ y $m'T^2$ no pueden ser homeomorfas. Por la misma razón, si $n \neq n'$ entonces $\chi(nP^2) = 2 - 2n \neq 2 - 2n' = \chi(n'P^2)$ por lo que $nP^2$ y $n'P^2$ no pueden ser homeomorfas. Así que las unicas sumas distintas con la misma caracteristica de Euler son $mT^2$ y $nP^2$ donde $2 - 2m = 2 - n$, es decir, $n = 2m$: la suma de $m$ toros y la suma de $2m$ planos proyectivos. Pero estas superficies no son homeomorfas porque la primera es orientable y la segunda no lo es. •

**Corolario**. Las superficies con borde compactas estan determinadas por su caracteristica de Euler, su orientabilidad y el número de componentes del borde.

*Demostración.* Si $S$ es una superficie con borde compacta podemos pegarle a $S$ un disco por cada componente del borde y obtener una superficie compacta (sin borde) $S'$. Además $\chi(S') = \chi(S) + k$ donde $k$ es el número de discos que pegamos, que es el número de componentes del borde de $S$. Así que sabiendo la característica de $S$ y el numero de componetes del borde conocemos la caracteristica de $S$, y como $S'$ es orientable si y solo si $S$ es orientable, ya sabemos la forma de $S$. •

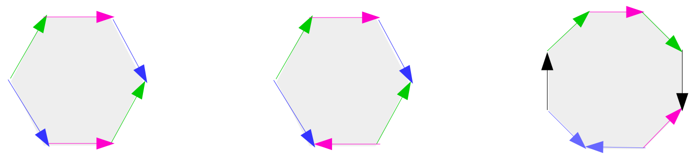
**Ejemplo**. Si $S$ es una superficie no orientable con 3 bordes y $\chi(S) = -2$, y tapamos los bordes con discos para obtener una superficie sin bordes $S'$ entonces $\chi(S') = \chi(S) + 3 = 1$, asi que $S'$ es un plano proyectivo y $S$ es un plano proyectivo con 3 agujeros.

**Afirmación**. La caracter;istica de Euler es, salvo múltiplos, la única combinación lineal de $v$, $a$ y $c$ que es un invariante topológico de las superficies.

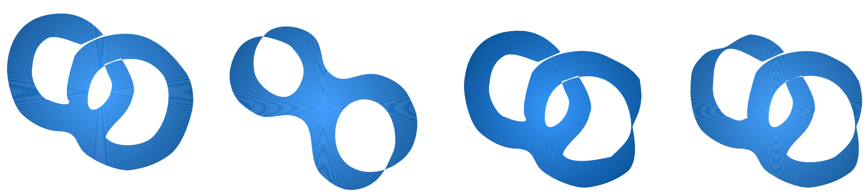
*Demostración.* Sea $\psi = lv + ma + nd$ con $l, m, n \in \mathbb{Z}$ y supongamos que $\psi$ es invariante bajo subdivisiones.
Como vimos en la prueba de que $\chi$ no cambia al dividir un disco por un arco, si el arco une dos vértices $v$ no cambia, $a$ aumenta en 1 y $c$ aumenta en 1, así que para que $\psi$ no cambie $m + n = 0$. Al dividir al disco con un arco que une un vértice con una arista, $v$ aumenta en 1, $a$ aumenta en 2 y $c$ aumenta en 1, así que para que $\psi$ no cambie $l + 2m + n = 0$. Por lo tanto $l = -m = n$. •

## Problemas

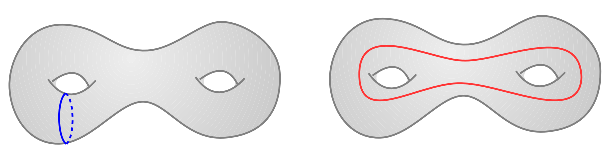
1. ¿Si $G$ es una gráfica, que dice $\chi(G)$ de $G$?
2. ¿En cuantas regiones divide al plano una gráfica conexa con $v$ vertices y $a$ aristas?
3. Muestra que si $S$ y $S'$ son dos superficies entonces $\chi(S+S') = \chi(S) + \chi(S') - 2$. (Hint: usa las subdivisiones de $S$ y de $S'$ para obtener una subdivisión de $S + S'$)
4. ¿Cual es la característica de Euler de una superficie orientable de genero $g$ con $n$ agujeros?
5. ¿Cuales superficies con o sin borde tienen la misma característica de Euler que la esfera? ¿Y que el plano proyectivo? ¿Y que el toro?
6. ¿Que superficies son estas? (sin modificar el diagrama, calcula $\chi$ y usa la orientabilidad)



7. ¿Que superficies con bordes son estas? (usa $\chi$, orientabilidad y el número de bordes)



8. Muestra que si $S$ es cualquier superficie cerrada orientable y $c$ y $c'$ son dos curvas no separantes en $S$, entonces hay un homeomorfismo $h : S \to S$ tal que $h(c) = c'$ (hint: Usa la caracteristica de Euler para mostrar que la superficie que se obtiene al cortar $S$ por $c$ es homeomorfa a la que se obtiene al cortar $S$ por $c'$)



9. Demuestra que si $S$ es una superficie de género $g$ entonces cualquier colección de $g+1$ curvas simples, cerradas y ajenas en $S$ dividen a $S$. (hint: ¿Como cambia el genero de $S$ al cortarla por una curva no separante?)