Topología de Conjuntos

Abiertos

La forma topológica y todos los conceptos relacionados con ella (conexidad, compacidad, continuidad, homomorfismo) están definidos únicamente en terminos de los abiertos del espacio. Aunque los abiertos en los espacios métricos se definen a partir de la métrica, una vez que los abiertos están definidos la métrica ya no juega ningún papel. Todo se basa en algunas propiedades de los abiertos, que son capturadas por la siguiente definición.

Una **topología** en un conjunto X es una colección τ de subconjuntos de X, llamados **abiertos,** tales que:

1. La unión de abiertos es un abierto.
2. La intersección de dos abiertos es un abierto.
3. X y ϕ son abiertos.

Un **espacio topológico** es un conjunto X con una topología fija τ. Al espacio topológico se le denota como (X, τ), o simplemente como X (si τ queda implícita) .

Ejemplos:

1. Si X es un conjunto, la topología cuyos abiertos son todos los subconjuntos de X se llama la **topología discreta**. La topología cuyos abietos son únicamente X y ϕ es la **topología trivial**.
2. Si X es un espacio métrico, la topología inducida por la métrica o **topología métrica** es la que tiene por abiertos a las uniones de bolas abiertas.
3. La colección de todos los intervalos (t, ∞) $t \in R$, junto con ϕ y $\mathbb{R}$, forma una topología en $\mathbb{R}$.
4. Si $X = \{a, b, c\}$, $\tau = \{\emptyset, \{a\}, \{a, b\}, \{abc\}\}$ es una topología en X y $\tau' = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \{abc\}\}$ es otra topología, mientras que $\{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, c\}, \{abc\}\}$ y $\{\emptyset, \{a\}, \{a, b\}, \{b, c\}, \{abc\}\}$ no lo son (a la primera le falta una unión y a la segunda una intersección)

Cerrados

En un espacio topológico un subconjunto es **cerrado** si su complemento es abierto.

Los cerrados de un espacio topologico tienen propiedades duales a los abiertos:

1. La intersección de cerrados es un cerrado.
2. La unión de dos cerrados es un cerrado.
3. X y ϕ son cerrados.

Estas propiedades son consecuencia de las leyes de De Morgan: $X - \cap S_i = \cup(X - S_i)$ y $X - \cup S_i = \cap(X - S_i)$.

Observar que cualquier familia de subconjuntos de un conjunto con estas propiedades determina una topología en el conjunto, cuyos abiertos son los complementos de estos cerrados.

Ejemplos:

1. Si X es en un conjunto infinito y definimos como cerrados a X y a los subconjuntos finitos de X obtenemos una topología llamada la **topología cofinita** (los abiertos son los complementos de conjuntos finitos y el vacío).
2. Si en $\mathbb{R}^n$, definimos como cerrados a los conjuntos de soluciones de polinomios de n variables (y a todo $\mathbb{R}^n$), obtenemos una topología llamada la **topologia de Zarisky** (Tarea).
3. Los subconjuntos compactos de un espacio métrico M son los cerrados de una topología en M (que coincide con la topología métrica si M es compacto).

Interior, cerradura y frontera.

Sea X un conjunto con una topología τ. Si A es un subconjunto de X, el **interior** de A (denotado por $Int(A)$ o A) es el abierto mas grande contenido en A, y la **cerradura** de A (denotada por $Cl(A)$ o $\bar{A}$) es el cerrado mas pequeño que contiene a A. La **frontera** de A (denotada por $Fr(A)$ o A) es $Cl(A) - Int(A)$.

Observaciones:

1. $x \in Int(A)$ si y solo si existe un abierto de X que contiene a x y está contenido en A.
2. $x \in Cl(A)$ si y solo si cada abierto de X que contiene a x intersecta a A.

Ejemplos:

1. En $\mathbb{R}$ con la topología cuyos abiertos son los intervalos (a, ∞), el interior del intervalo (a, b) es ϕ y su cerradura es $(-\infty, b]$
2. Si $X = \{a, b, c\}$ y $\tau = \{\emptyset, \{a\}, \{a, b\}, \{a, b, c\}\}$:

Subconjunto	Interior	Cerradura	Frontera
$\{a\}$	$\{a\}$	$\{a, b, c\}$	$\{b, c\}$
$\{b\}$	$\emptyset$	$\{b, c\}$	$\{b, c\}$
$\{c\}$	$\emptyset$	$\{c\}$	$\{c\}$
$\{a, b\}$	$\{a, b\}$	$\{a, b, c\}$	$\{c\}$
$\{b, c\}$	$\emptyset$	$\{b, c\}$	$\{b, c\}$
$\{a, c\}$	$\{a\}$	$\{a, b, c\}$	$\{b, c\}$

3. En un conjunto infinito X con la topología cofinita, los únicos subconjuntos con interior distinto de $\emptyset$ son los abiertos, y los únicos subconjuntos con cerradura distinta de X son los cerrados.
4. En $\mathbb{R}$, con la topología conumerable (donde los cerrados son los conjuntos a lo mas numerables y $\mathbb{R}$), $Int(\mathbb{Q}) = \phi$, $Cl(\mathbb{Q}) = \mathbb{Q}$, $Int(\mathbb{I}) = \mathbb{I}$, $Cl(\mathbb{I}) = \mathbb{R}$. $Fr(\mathbb{Q}) = Fr(\mathbb{I}) = \mathbb{Q}$,

Mas observaciones:

1. A es cerrado si y solo si $Fr(A) \subset A$.
2. $Cl(A) = X - Int(X - A)$
3. $Fr(A) = Cl(A) \cap Cl(X - A) = Fr(X - A)$

Bases y subbases

Una **base** de la topología τ en X es una familia de abiertos cuyas uniones son todos los abiertos de τ.

Ejemplos:

1. En $\mathbb{R}^n$ las bolas abiertas con centros en $\mathbb{Q}^n$ y radio $1/n, n \in \mathbb{N}$ forman una base de la topologia usual.
2. Los rectángulos $(a, b) \times (c, d)$ forman una base de la topología usual del plano.

Una **subbase** de la topología τ en X es una familia de abiertos cuyas *intersecciones finitas* son una base.

Ejemplos:

1. Los semiplanos abiertos forman una subbase de la topología usual de $\mathbb{R}^2$ (ya que las intersecciones de 4 semiplanos dan los rectángulos que forman una base de la topología usual).
2. Una subbase para a topologia cofinita en un conjunto X esta formada por los conjuntos $X - \{x\}$ para x en X.

Distintas topologías

Observar que un conjunto X puede tener muchas topologías distintas, y que la intersección de topologías en X es una topología en X, pero la unión de topologías no necesariamente lo es.

Dada cualquier colección $\{A_\alpha\}$ de subconjuntos de un conjunto X, siempre existen topologías en X donde los A_α's son abiertos. La **topología generada** por los A_α's es la intersección de todas las topologías en X en las que los A_α's son abiertos.

Las topologías que contienen a los A_α's deben contener a todas sus intersecciones finitas. Como el conjunto de todas las uniones de intersecciones fintas de A_α's ya forman una topología, esta es la topología generada por los A_α's, de la que los A_α's forman una subbase.

Ejemplos:

1. La topologia generada por las bolas abiertas de radio fijo r en $\mathbb{R}^n$ es la topologia usual.
2. Si X es un conjunto infinito, la topología generada por los subconjuntos infinitos de X es la topología discreta (ya que cada punto de X es la intersección de dos subconjuntos infinitos de X).

Dadas dos topologías τ y τ' en X, decimos que τ' es **mas fina** que τ y que τ es mas gruesa que τ' si $\tau \subset \tau'$, es decir, si todos los abiertos de X segun τ son abiertos de X segun τ'. Asi, la topología generada por una familia de subconjuntos de X es la topología mas gruesa en X que los hace a todos abiertos.

Ejemplos:

1. (La recta de Sorgenfrei) La topología en $\mathbb{R}$ generada por los intervalos semiabiertos $[a, b)$ es una topología mas fina que la topología usual (ya que cada intervalo abierto es unión de intervalos semiabiertos). En esta topología de $\mathbb{R}$ los intervalos $[a, b)$ son simultaneamente abiertos y cerrados.

2. En el conjunto de funciones continuas del intervalo $[a, b]$ en si mismo, la topología generada por la métrica $d_0(f, g) = \sup |f(x) - g(x)|$ es mas fina que la topología generada por la métrica $d_1(f, g) = \int_0^1 |f(x) - g(x)|dx$ (ya que cada bola de radio ϵ de d_0 está contenida en una bola de radio $(b - a)\epsilon$ de d_1 y por lo tanto las bolas de d_1 son uniones de bolas de d_0).

3. La topología mas gruesa del plano en la que los puntos son cerrados es la cofinita. La topología mas gruesa del plano en la que las rectas son cerradas es la que tiene por cerrados a las uniones finitas de rectas y puntos.

Subespacios

Si X es un espacio topológico y $A \subset X$, la **topología inducida** en A es la que tiene por abiertos a las intersecciones de abiertos de X con A. Con esta topología A es un **subespacio** de X.

Ejemplos:

1. En un espacio métrico X, la topología inducida en un subconjunto S coincide con la topología generada por la métrica en X restringida a S.

2. Si $\mathbb{R}$ tiene la topología conumerable, la topología inducida en $\mathbb{Q}$ es la topología discreta, pero en la topología inducida en $\mathbb{I}$ todos los abiertos no vacíos de $\mathbb{I}$ se intersectan.

3. Si τ es la topología $\mathbb{R}^2$ cuya base son los intervalos abiertos horizontales, entonces la topología inducida por τ en las rectas horizontales es la topología usual, pero la topología inducida en todas las otras rectas es la topología discreta.

4. Sea S el conjunto de las sucesiones reales que convergen a 0, con la métrica

   $$d((s_i), (s'_i)) = sup\{|s_i - s'_i|\}_{i \in \mathbb{N}}$$

   Entonces el subespacio de S formado por las sucesiones que se hacen 0 después de n pasos se puede ver como $\mathbb{R}^n$ con la topología usual.

Problemas

1. Encuentra 3 métricas en el plano cuyas topologías inducidas sean distintas.
2. Muestra que en un conjunto infinito solo hay una topología en la que todos los subconjuntos infinitos son abiertos (¿cual es?)
3. (La topología de Zarisky) En $\mathbb{R}^n$ definimos como cerrados a los conjuntos de soluciones de algún polinomio de n variables (o todo $\mathbb{R}^n$).

   a. Demuestra que la unión y la intersección de dos cerrados es cerrado.

   b. ¿Que habría que demostrar para ver que la intersección de una familia infinita de cerrados es cerrado? (este es un teorema famoso de álgebra)
4. Encuentra el interior, la cerradura y la frontera del conjunto $\mathbb{Q}^+$ como subconjunto de $\mathbb{R}$ con las siguientes topologías:

   a) la usual.

   b) la discreta.

   c) la que tiene por abiertos a los intervalos (a, ∞).

   d) la cofinita.

   e) la conumerable (cuyos cerrados son los conjuntos a lo mas numerables, y $\mathbb{R}$).
5. Considera al conjunto de funciones continuas de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ con las dos distancias

   $$d_0(f,g) = sup|f(x) - g(x)| \qquad\qquad d_1(f,g) = \int_{\mathbb{R}} |f(x) - g(x)|dx.$$

   Aunque estas distancias pueden ser infinitas, sus bolas abiertas generan dos topologías en el conjunto de funciones continuas. Demuestra que ninguna de estas dos topologías es mas fina que la otra. (Hint: basta ver que ninguna bola de la primera esta contenida en una bola de la segunda y visceversa)
6. Si τ es la topología en el plano que tiene por base a los intervalos abiertos verticales y τ' es la topología que tiene por base a los intervalos abiertos horizontales, ¿Que relación tienen estas topologías con la topología usual? ¿Que relación tiene la topología $\tau \cap \tau'$ con la topología usual?
7. ¿Existe una topología en el plano que induzca la topología discreta en cada recta y que no sea la topologia discreta? ¿Existe una topología en el plano tal que induzca la topología usual en cada recta y que no sea la topologia usual?
8. * En un espacio topológico la operación cerradura tiene las siguientes propiedades:

   1. $Cl(\phi) = \phi$
   2. $A \subset Cl(A)$
   3. $Cl(Cl(A)) = Cl(A)$
   4. $Cl(A \cup B) = Cl(A) \cup Cl(B)$

   Demuestra que cualquier operación en un conjunto X con las propiedades 1-4 es la cerradura en una topología en X.