Funciones continuas y homeomorfismos

Funciones continuas

La noción de continuidad en espacios métricos puede generalizarse a todos los espacios topológicos:
Si X y Y son espacios topológicos, una función $f : X \to Y$ es **continua** si la imagen inversa bajo f de cada abierto de Y es un abierto de X.

Son equivalentes:

1. $f : X \to Y$ es una función continua.
2. La imagen inversa bajo f de cada cerrado de Y es un cerrado de X.
3. $f(Cl(A)) \subset Cl(f(A))$ para cada $A \subset X$ (Tarea).

Observaciones:

- La composición de funciones continuas es una función continua.
- Las restricciones de funciones continuas son continuas.
- Si damos a X dos topologías distintas τ y τ', entonces la función identidad $id : (X, \tau) \to (X, \tau')$ es continua solo si τ es igual o mas fina que τ'.
- Una función continua $f : X \to Y$ sigue siendo continua si refinamos la topologia en X o engrosamos la de Y

Ejemplos:

1. Si $\mathbb{I}$ es el conjunto de irracionales con la topología usual, las funciones de $\mathbb{I}$ en $\mathbb{I}$ dadas por $r(i) = \sqrt{i}$ y $s(i) = \frac{1}{i}$ son continuas.
2. En la recta de Sorgenfrey ($\mathbb{R}$ con la topología cuya base son los intervalos semiabiertos $[a, b)$ la función $f(x) = -x$ no es continua.
3. Si X es un espacio con la topologia cofinita, cuales son las funciones continuas de X en X? Como una función es continua si la preimagen de cada cerrado es un cerrado, y los cerrados en X son los subconjuntos finitos de X y todo X, entonces las funciones continuas son las funciones constantes y aquellas que mandan solo una cantidad finita de puntos al mismo punto.
4. Si C es el conjunto de funciones continuas de $[0, 1]$ en $[0, 1]$, τ_0 y τ_1 son las topologías en C generadas por las métricas $d_0(f, g) = sup\{|f(x) - g(x)| \ / \ x \in \mathbb{R}|\}$ y $d_1(f, g) = \int_0^1 |f(x) - g(x)|$ entonces $Id : (C, \tau_0) \to (C, \tau_1)$ es continua pero $Id : (C, \tau_1) \to (C, \tau_0)$ no lo es. (ya que todos los abiertos de τ_1 son abiertos de τ_0, pero los abiertos de τ_0 no son necesariamante abiertos de τ_1).

Homeomorfismos

Una función $f : X \to Y$ es un **homeomorfismo** si f es continua y tiene inversa continua. X y Y son **homeomorfos** (se escribe $X \cong Y$) si existe un homeomorfismo entre X y Y. Como la composición de homomorfismos es un homomorfismo, ser homeomorfos es una relación de equivalencia entre espacios topológicos.

Observaciones:

- Un homomorfismo es una biyección entre los puntos de X y Y que da una biyección entre los abiertos de X y los de Y.
- Si $h : X \to Y$ es un homeomorfismo entonces para cada subespacio S de X, $h|_s : S \to f(S)$ es un homeomorfismo.
- La función identidad $Id : (X, \tau) \to (X, \tau')$ es un homomorfismo si y solo si $\tau = \tau'$.
- Dos espacios discretos son homeomorfos si y solo si tienen la misma cardinalidad.

Ejemplos:

1. $\mathbb{Q}$ con la topología discreta es homeomorfo a $\mathbb{N}$ con la topología usual.
2. El intervalo $[0, 1)$ tiene una topología que lo hace homomorfo a un círculo con la topología usual (¿Como la definirías?).
3. Como $\mathbb{R}$ y $\mathbb{R}^n$ tienen la misma cardinalidad, $\mathbb{R}$ tiene una topología que lo hace homeomorfo a $\mathbb{R}^n$.
4. Si en $\mathbb{N}$ definimos como cerrados a todos los subconjuntos finitos y a todos los subconjuntos que contienen al 0, obtenemos una topología que hace a $\mathbb{N}$ homeomorfo al conjunto $\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots, 0\}$ con la topología usual.
5. El conjunto de las rectas que pasan por el origen en $\mathbb{R}^3$, tiene una topología natural, cuya base esta formada por los conjuntos de rectas que forman un ángulo menor que ϵ con una recta dada. El espacio de rectas con esta topología se puede identificar con el espacio de puntos antípodas de la esfera (con la topología que tiene como base a los pares de discos antipodas) y este espacio es homeomorfo al plano proyectivo.
6. Si C es el conjunto de funciones continuas de $[0, 1]$ en $[0, 1]$, τ_1 y τ_2 son las topologías en C generadas por las métricas $d_1(f, g) = \int_0^1 |f(x) - g(x)|dx$ y $d_2(f, g) = \int_0^1 |f(x) - g(x)|^2 dx$, entonces la función identidad $Id : (C, \tau_0) \to (C, \tau_1)$ no es un homeomorfismo (¿que falla?) pero esto no implica (C, τ_1) y (C, τ_1) no sean homeomorfos.

Tarea 12

1. Muestra que si $A \subset X$ entonces la topología inducida es la topología mas gruesa en que hace que la inclusión $i : A \to X$ sea continua.

2. Muestra que $f : X \to Y$ es continua si y solo si $f(Cl(A)) \subset Cl(f(A))$ para todo $A \subset X$. (Sale en 3 lineas con la definición de continuidad y de cerradura usando abiertos)

3. Muestra que si X es la unión de dos subespacios cerrados C y D y $f : X \to Y$ es una función cuyas restricciones a C y D son continuas, entonces f es continua.

4. Muestra que si todas las funciones de X a X son continuas entonces X tiene la topología discreta.

5. Da un ejemplo de una función de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ que sea continua con la topología usual (en dominio y codominio) pero no con la topología de Sorgenfrei, y otra función que sea continua con la topología de Sorgenfrei (en dominio y codominio) pero no con la topología usual.

6. ¿Cuantos espacios topológicos no homomorfos con 3 puntos existen?

7. ¿A que espacio es homeomorfo el conjunto $X = \mathbb{R}^2 \cup \{*\}$ con la topología cuyos abiertos son los abiertos usuales de $\mathbb{R}^2$ y las uniones de $\{*\}$ con complementos de compactos usuales de $\mathbb{R}^2$?

8. Muestra que si (X, τ) es un espacio topológico y f es cualquier función de X a un conjunto Y, entonces f induce una topología τ' en Y. Muestra que si X es un conjunto y g es una función de X a un espacio topológico (Y, τ), entonces g induce una topología τ' en X.

9. Sea $C[0,1]$ el conjunto de las funciones continuas de $[0,1]$ en $[0,1]$. La evaluación en un punto x define una función $e_x : C[0,1] \to [0,1]$ donde $e_x(f) = f(x)$

   a. ¿Si a $C[0,1]$ le damos la topología de la metrica $d(f,g) = sup\{|f(x) - g(x)\}$, e_x será continua?

   b. ¿Si a $C[0,1]$ le damos la topología de la metrica $d(f,g) = \int |f(x) - g(x)|dx$, e_x será continua?