Productos

Si X y Y son espacios topológicos la **topología producto** en $X \times Y$ es la que tiene por base a los productos de abiertos de X con abiertos de Y.

Ejemplos:

- La topología producto en $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ tiene por base a los rectángulos abiertos $(a, b) \times (c, d)$ y es la misma que la topología usual en $\mathbb{R}^2$.
- Un anillo es el producto de un circulo y un intervalo.
- El toro es homeomorfo al producto $S^1 \times S^1$, el toro sólido es homeomorfo a $D^2 \times S^1$.
- $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \cong \mathbb{N}$

Ejercicio: ¿Como es el producto $\mathsf{Y} \times \mathsf{Y}$?

Observaciones:

- La topología producto en $X \times Y$ hace a las proyecciones $p_1 : X \times Y \to X$ y $p_2 : X \times Y \to Y$ continuas y es la topología mas gruesa en $X \times Y$ con esta propiedad.
- Una función $f : X \to Y \times Z$ es continua si y solo si las funciones coordenadas $f_1 : X \to Y$ y $f_2 : X \to Z$ son continuas (ya que si $A \times B$ es un abierto básico de $Y \times Z$, entonces $f^{-1}(A \times B) = (f_1^{-1}(A) \cap (f_2^{-1}(B))$.

Productos infinitos

Si $\{X_\alpha\}_{\alpha\in A}$ es una familia de espacios topológicos entonces su producto $\prod X_\alpha$ tiene al menos dos topologías que parecen naturales:

1. La topologia que tiene por base a los productos $\prod U_\alpha$ con U_α abierto en X_α, llamada a veces topología de las cajas.

2. La topología mas gruesa que hace que las proyecciones $p_\alpha : \prod X_\alpha \to X_\alpha$ sean continuas, llamada **topología producto**.

Observaciones:

- La topología de las cajas y la topología producto coinciden en los productos finitos, pero son distintas en los productos infinitos..

- La topología producto tiene como base a los productos $\prod U_\alpha$ donde cada U_α es abierto en X_α y casi todos los U_α son iguales a X_α.

- En los productos infinitos la topología producto es mas gruesa que la topología de las cajas.

Una buena razón para considerar que la topología producto es mas natural que la de las cajas es la siguiente:

Lema. Una función $f : X \to \prod Y_\alpha$ con la topología producto es continua si y solo si las funciones coordenadas son continuas. Esto no es cierto para la topología de las cajas.

Demostración. Las funciones coordenadas f_α son la composición de f con las proyecciones p_α, así que si f es continua las funciones coordenadas son continuas (esto también vale para la topología de las cajas). Reciprocamente, si $\prod U_\alpha$ es un producto de abiertos en $\prod Y_\alpha$ entonces $f^{-1}(\prod U_\alpha) = \cap f_\alpha^{-1}(U_\alpha)$. Si las f_α son continuas los conjuntos $f_\alpha^{-1}(U_\alpha)$ son abiertos en X. La intersección infinita es abierta si casi todos los U_α son iguales a Y_α porque entonces casi todos los $f_\alpha^{-1}(U_\alpha)$ son iguales a X.

El conjunto de funciones de un conjunto A a un conjunto B puede identificarse con B^A (el producto de $|A|$ copias de B) mandando cada función $f : A \to B$ al punto con coordenadas $(f(a))_{a\in A}$, así que la topología en B puede usarse para dar topologías al espacio de funciones de cualquier conjunto A en B.

Ejemplo. El conjunto de sucesiones de números reales puede identificarse con el producto infinito $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ y tiene muchas topologías "naturales"distintas: la topología producto, la de las cajas, la de la métrica del supremos...

Problemas

1. Demuestra que si X y Y son espacios topológicos entonces

   a. $X \times Y$ es conexo si y solo si X y Y son conexos.

   b. $X \times Y$ es compacto si y solo si X y Y son compactos.

2. ¿Cuales de los siguientes espacios son productos?

   a. $\mathbb{R}^3 - \{\bar{0}\}$

   b. $\mathbb{Q}$

   c. El espacio formado por las elipses en el plano.

   d. El espacio formado por las rectas en el plano.

3. Da una fórmula para la frontera de un subconjunto $A \times B$ de $X \times Y$, en términos de las fronteras de A y B en X y Y. (no necesitas demostrar la fórmula, solo asegurate que es correcta)

4. Muestra que $X \times Y \cong X \times Z$ no implica que $Y \cong Z$. (Hint: considera distintos productos de intervalos.)

5. Considera al conjunto de sucesiones en el intervalo [0,1] con la topología producto, la de las cajas y la de la métrica del supremo.

   a. Muestra que la sucesión $(1, 0, 0, 0, 0, ...)$, $(0, 1, 0, 0, 0, ...)$, $(0, 0, 1, 0, 0, ...)$,... converge en una de esas topologías, pero no en las otras.

   b. Muestra que la sucesión $(1, 0, 0, 0, 0, ...)$, $(0, \frac{1}{2}, 0, 0, 0, ...)$, $(0, 0, \frac{1}{3}, 0, 0, ...)$, ... converge en dos de esas topologías, pero no en la otra.

   c. ¿Que relación hay entre las 3 topologías?

6. Muestra que la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ dada por $f(t) = (t, 2t, 3t, .., nt, ...)$ es continua con la topología producto, pero no con la métrica del supremo. La función $f(t) = (t, t/2, t/3, ..., t/n, ...)$ es continua con la métrica del supremo, pero no con la topología de las cajas.