Cocientes

Un **espacio cociente** se obtiene identificando diferentes puntos de un espacio topológico X por medio de una relación de equivalencia $\sim$, y dándole al conjunto resultante $X/\sim$ la topología mas fina que hace que la proyección canónica $p : X \to X/\sim$ sea continua. Esta topología, llamada la **topología cociente**, es la que tiene por abiertos a los subconjuntos de $X/\sim$ cuyas preimagenes bajo p son abiertos de X.

Ejemplos:

1. Si $X = \mathbb{R}$ y $(x \sim -x \quad \forall x \in \mathbb{R})$ entonces $X/\sim$ es homeomorfo a $\mathbb{R}^+$.

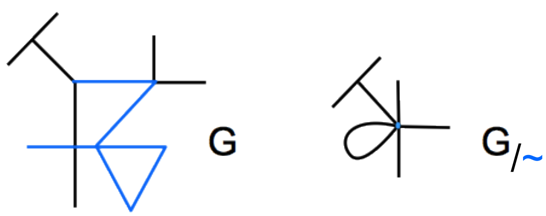
2. Si $X = S^1$ y $(1 \sim -1)$ entonces $X/\sim$ es homeomorfo a ∞.

3. Si $X = \mathbb{R}^2$ y $(x \sim y \iff |x| = |y|)$ entonces $X/\sim$ es homeomorfo a $\mathbb{R}^+$.

4. Si $X = \mathbb{R}$ y $(x \sim y \iff x$ y y tienen el mismo signo) entonces $X/\sim$ es un espacio con 3 puntos $\{+, -, 0\}$ con la topologia $\tau = \{\emptyset, \{+\}, \{-\}, \{+,-\}, \{+,-,0\}\}$.

5. Cada producto $X \times Y$ tiene como cocientes a sus factores X y Y.

6. Si en la gráfica G identificamos todos los puntos de la subgráfica azul en un solo punto obtenemos como cociente a la gráfica $G/\sim$.



7. Si en $\mathbb{R}$ identificamos a todos los puntos del intervalo (-1,1) a un solo punto obtenemos un espacio que se ve como $\mathbb{R}$ pero con dos 0's (las imágenes de -1 y de 1) que comparten todas sus vecindades.

8. La esfera S^2 es un cociente del disco D^2 (donde $x \sim y \iff \quad \forall x, y \in S^1$).

9. Todas las superficies compactas son cocientes de D^2 por una relación de equivalencia que identifica algunos puntos en la orilla del disco con otros.

Otros ejemplos interesantes de cocientes se obtienen de la acción de un grupo de homeomorfismos en un espacio X, identificando las imágenes de cada punto de X bajo los elementos del grupo G para obtener el espacio de órbitas X/G,

Ejemplos:

- $\mathbb{Z}$ actúa en $\mathbb{R}$ por traslaciones: $T_n(x) = x + n$.
  $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ es homeomorfo a S^1.
- $\mathbb{Z}_n$ actúa en $\mathbb{C}$ por rotaciones: $R_i(z) = e^{2\pi i/n} z$.
  $\mathbb{C}/\mathbb{Z}_n$ es homeomorfo a un cono infinito, que es homeomorfo a $\mathbb{C}$.
- Si $\mathbb{Z}^2$ actúa en $\mathbb{R}^2$ por traslaciones: $T_{(m,n)}(x, y) = (x + m, y + n)$.
  $X/\mathbb{Z}^2$ es homeomorfo al toro T^2.
- $\mathbb{Z}$ actúa en $\mathbb{R}$ por homotecias: $H_n(x) = 2^n x$, ¿quien es $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$?

  La órbita de cada punto x en $\mathbb{R}$ es el conjunto $\{..., x/8, x/4, x/2, x, 2x, 4x, 8x, ...\}$. Las órbitas de puntos positivos están representadas por puntos en el intervalo $[1, 2]$ (donde 1 y 2 están en la misma órbita), las órbitas de x negativos están representadas en el intervalo $[-2, -1]$ (donde -1 y -2 en la misma órbita) y la orbita de 0 es $\{0\}$. Así que $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ consta de dos círculos y un punto, donde los círculos tienen la topología usual pero cualquier vecindad de 0 contiene a ambos círculos (el único abierto que contiene a 0 es el total).

Si X es cualquier espacio topológico y $\sim$ es una relación de equivalencia en X entonces la proyección natural $p : X \to X/\sim$ es continua y suprayectiva. Una pregunta natural es si siempre que tenemos una función continua y suprayectiva $f : X \to Y$ entonces Y es homomorfo a un cociente de X. La relación $x \sim x' \iff f(x) = f(x')$ define clases de equivalencia en X, y hay una biyeccion entre las clases de equivalencia en X y los elementos de Y. Lo que hay que averiguar es si las topologías en $X/\sim$ y en Y son las mismas.

Ejemplo. Si X es un conjunto $\{-1, 0, 1\}$ con la topología discreta y Z es el conjunto $\{0, 1\}$ con la topologia trivial entonces $f : X \to Z$ dada por $f(a) = |a|$ es continua y suprayectiva. Pero $X/\sim$ es el conjunto $\{0, 1\}$ con la topologia discreta (porque las preimagenes de todos los conjuntos son abiertos), que no es la topología que tiene Z.

Recordar que una función $f : X \to Y$ es abierta si la imagen de cada abierto de X es un abiarto de Y, y es cerrada si la imagen de cada cerrado de X es cerrada en Y.

Lema. Si $f : X \to Y$ es una función continua, suprayectiva y f es abierta o cerrada entonces Y es homomorfo a $X/\sim$ (donde $x \sim x'$ si $f(x) = f(x')$).

Demostración. Sea $p : X \to X/\sim$ la proyección canónica. Por definición de $\sim$ hay una biyección $b : X/\sim \to Y$ y $f = b \circ p$. Afirmamos que si f es continua entonces b es continua: Si A es un abierto de Y entonces $f^{-1}(A)$ es un abierto de X, pero $f^{-1}(A) = p^{-1}(b^{-1}(A))$ y esto dice que $(b^{-1}(A))$ es abierto en la topología cociente en $X/\sim$.

Para ver que b es un homeomorfismo basta ver que b es abierta o cerrada, y para esto necesitamos la hipótesis de que f es abierta (o cerrada): Cada abierto (cerrado) B de $X/\sim$ es de la forma $p(A)$ para algún abierto (cerrado) A de X. Como $b(B) = b(p(A)) = f(A)$ entonces si f es abierta (cerrada) entonces $b(B)$ es abierto (cerrado) asi que la función b es abierta (cerrada). •

Corolario. Si $f : X \to Y$ es una función continua y $\sim$ es una relación de equivalencia en X tal que $f(x) = f(x')$ siempre que $x \sim x'$ entonces f determina una función continua $\tilde{f} : X/\sim \to Y$.

Demostración. Es muy parecida a primera parte de la demostración anterior.

Si $p : X \to X/\sim$ es la proyección canónica entonces la función $\tilde{f} : X/\sim \to Y$ dada por $\tilde{f}([x]) = f(x)$ esta bien definida y $f = p \circ \tilde{f}$.

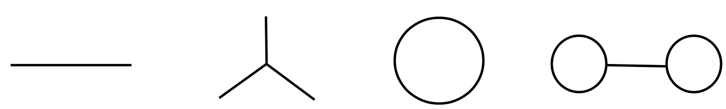
Falta ver que $\tilde{f}$ es continua. Si A es un abierto de Y entonces como f es continua $f^{-1}(A)$ es un abierto de X. Como $f^{-1}(A) = p^{-1}(\tilde{f}^{-1}(A))$ entonces $p^{-1}(\bar{f}^{-1}(A))$ es abierto en X, y esto dice que $\tilde{f}^{-1}(A)$ es abierto en $X/\sim$. •

Ejemplos:

- Toda función continua de $f : D^2 \to X$ que valga lo mismo en todos los puntos del borde de D^2 determina una función continua $\tilde{f} : S^2 \to X$.
- Toda función lineal con coeficientes enteros determina una función continua del toro en el toro.

Problemas

1. Muestra que cada una de las siguientes gráficas es cociente de las otras:



2. Describe el espacio cociente de $\mathbb{R}^2$ bajo las siguientes relaciones: de equivalencia:
   a) $(x, y) \sim (y, x)$
   b) $(x, y) \sim (-x, -y)$
   c) la relación de equivalencia generada por $(x, y) \sim (x + 1, -y)$
3. Muestra que los cocientes de espacios conexos son conexos, y los cocientes de espacios compactos son compactos.
4. Muestra la proyección canónica $p : X \to X/\sim$ no es necesariamente abierta o cerrada.
5. Muestra que si X es imágen del intervalo [0,1] bajo alguna función continua e inyectiva entonces X es un cociente de [0,1].
6. Si en $\mathbb{R}^2$ se colapsa el disco abierto unitario a un punto, ¿cómo queda el cociente?
7. $\mathbb{Z}$ actúa en $\mathbb{R}^2$ por homotecias: $n(x, y) = 2^n(x, y)$ ¿Como es $\mathbb{R}^2 - (0, 0)/\mathbb{Z}$?