Axiomas de numerabilidad

Si X es un espacio topológico, una **vecindad** de un punto x es un abierto de X que contiene x. Decimos que una sucesión de puntos $x_1, x_2, x_3, \ldots$ **converge** a x si si cada vecindad de x contiene a casi todos los x_i's (a todos a partir de alguna i).

Recordar que en los espacios métricos se cumplen:

1. $x \in Cl(A) \iff$ existe una sucesión de puntos de A que converge a x.
2. $f : X \to Y$ es continua $\iff$ f envía sucesiones convergentes en sucesiones convergentes.
3. X es compacto $\iff$ cada sucesión de puntos en X tiene una subsucesión convergente.

Cuales de las implicaciones anteriores serán válidas para todos los espacios topológicos?

1. $\Leftarrow$ Si una sucesión de puntos en A converge a x entonces todas las vecindades de x intersectan a A, así que $x \in Cl(A)$.

   $\not\Rightarrow$ En $\mathbb{R}$ con la topología conumerable, la cerradura de $\mathbb{I}$ es todo $\mathbb{R}$, pero ninguna sucesión $i_1, i_2, i_3, \ldots$ en $\mathbb{I}$ puede converger a un punto $r \notin \mathbb{I}$ ya que $\mathbb{R} - \{i_1, i_2, i_3, \ldots\}$ es una vecindad de r que no contiene puntos de la sucesión. De hecho las únicas sucesiones convergentes en este espacio son las que son constantes a partir de algun momento.

2. $\Rightarrow$ Si $f : X \to Y$ es continua y la sucesión (x_n) converge a x, entonces para cada vecindad V de $f(x)$, $f^{-1}(V)$ es una vecindad de x. Como (x_n) converge a x casi todos los x_i's están en $f^{-1}(V)$, por lo tanto casi todos los $f(x_i)$ están en V. Así que $(f(x_n))$ converge a $f(x)$.

   $\not\Leftarrow$ Si X es el espacio de los números reales con la topología conumerable, las sucesiones convergentes en X son las casi constantes. Asi que cualquier función $f : X \to X$ manda sucesiones convergentes en sucesiones convergentes. Pero no cualquier función $f : X \to X$ es continua: por ejemplo la función que manda a los racionales a 0 y a los irracionales a 1 no es continua porque la imagen inversa de $\{1\}$ (que es cerrado) es $\mathbb{I}$ (que no es cerrado).

3. $\not\Rightarrow$ $[0,1]^{\mathbb{R}}$ es compacto y tiene sucesiones sin subsucesiones convergentes (no es facil de demostrar)

   $\not\Leftarrow$ Los ejemplos son muy raros (la recta larga, si alguien tiene curiosidad...)

Una colección de vecindades de un punto x es una **base local** en X si cada vecindad de x contiene alguna vecindad de esa colección.

Un espacio topológico es **primero numerable** (o satisface el primer axioma de numerabilidad) si tiene bases locales numerables. Un espacio topológico es **segundo numerable** (o satisface el segundo axioma de numerabilidad) si tiene alguna base (global) numerable.

Ejemplos:

1. Todo espacio métrico es primero numerable: para cada x las bolas con radio $\frac{1}{n}$ $(n \in N)$ y centro en x son una base local numerable.

2. $\mathbb{R}^n$ es segundo numerable: una base numerable está formada por las bolas con centros racionales y radios racionales.

3. $\mathbb{R}$ con la topologia conumerable no es primero numerable porque dada cualquier colección numerable de vecindades $U_1, U_2, U_3, \ldots$ de x, existe una vecindad de x que no contiene a ninguna de ellas: si elegimos $x_n \neq x$ en U_n entonces $\mathbb{R} - \{x_1, x_2, x_3, \ldots\}$ es una vecindad de x que no contoene a ninguna de las vecindades U_n.

4. $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ con la topología del supremo es primero numerable pero no es segundo numerable.

5. $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ con la topología de las cajas no es primero numerable (tarea).

6. Un espacio no numerable con la topología discreta es primero numerable pero no es segundo numerable.

Observaciones

- Si X es un espacio primero numerable, entonces $x \in Cl(A) \iff$ existe una sucesión de puntos en A que convergen a x.

  $\Leftarrow$ pasa en todos los espacios topológicos.

  $\Rightarrow$ Sea $x \in Cl(A)$ y sea $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una base local numerable en x. Para cada n, $\cap_{i\leq n} U_i$ es una vecindad de x, asi que contiene un punto $a_n \in A$ y la sucesión $a_1, a_2, a_3, \ldots$ converge a x.

- Si X es un espacio primero numerable, entonces una función $f : X \to Y$ es continua $\iff$ f envía sucesiones convergentes en X a sucesiones convergentes en Y.

  $\Rightarrow$ pasa en todos los espacios topológicos.

  $\Leftarrow$ Para ver que las imagenes inversas de abiertos en Y son abiertos en X basta ver que para cada $y \in Y$, la imagen inversa de una vecindad V de y contiene vecindades de los puntos de $f^{-1}(y)$. Tomemos $x \in f^{-1}(y)$ y sea $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una base local en x. Entonces las intersecciones $A_n = U_1 \cap U_2 \cap \cdots \cap U_n$ son vecindades de x. Si ninguna A_n estuviera contenida en $f^{-1}(V)$ entonces para cada n podemos elegir $x_n \in A_n$ tal que $f(x_n) \notin V$. Entonces la sucesión $x_1, x_2, x_3, \ldots$ converge a x (ya que cada vecindad de y contiene a algun U_n y todos los x_i con $i \geq n$ están en U_n). Pero sus imagenes $f(x_1), f(x_2), f(x_3), \ldots$ no convergen a $f(x) = y$ ya que están fuera de V.

- Si X es un espacio segundo numerable, entonces X es compacto $\iff$ cada sucesión de puntos en X tiene una subsucesión convergente.

  $\Rightarrow$ En esta dirección basta que X sea primero numerable: Si $x_1, x_2, x_3, \ldots$ es una sucesión en X sin subsucesiones convergentes entonces ningún x_i se repite una infinidad de veces y tomando una subsucesión podemos suponer que todos los x_i son distintos. Los conjuntos $C_n = \{x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots\}$ son cerrados (porque cada punto en la cerradura de C_n es limite de una sucesión de puntos en C_n, y por lo tanto sería limite de una subsucesión convergente de x_i's). La intersección de cualquier coleccion finita de C_i's es el C_i con indice mayor, pero la intersección de todos los C_i es vacía, así que X no tiene la propiedad de la intersección finita y por lo tanto X no es compacto.

  $\Leftarrow$ Supongamos que X no es compacto, entonces X tiene una cubierta abierta $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ sin subcubiertas finitas. Como X es segundo numerable esa cubierta tiene una subcubierta numerable $\{U_1, U_2, U_3, \ldots\}$ (tarea). Para cada n elijamos $x_n \notin U_1 \cup U_2 \cup \cdots \cup U_n$ (estos x_n existen porque $U_1 \cup U_2 \cup \cdots \cup U_n$ no es todo X). Entonces la sucesión $x_1, x_2, x_3, dots$ no tiene subsucesiones convergentes: Cada $x \in X$ está en algún U_n y por construcción ningún x_i con $i > n$ está en U_n, asi que esa vecindad de x no puede contener mas que un numero finito de puntos de la sucesión.

  (para cada punto x de X hay un abierto U de la cubierta existe un abierto de la base numerable que contiene a x y esta contenido en U

Densidad y separabilidad

Un subconjunto A de un espacio topológico X es **denso** si la cerradura de A es todo X. Observar que A es denso en X si y sólo si cada abierto de X contiene puntos de A.

Ejemplos:

1. En $\mathbb{R}$ con la topología usual, $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{I}$ son densos. En $\mathbb{R}$ con la topología conumerable, $\mathbb{I}$ es denso pero $\mathbb{Q}$ no lo es.

2. En el espacio de funciones continuas del intervalo [0,1] con la métrica del supremo, las funciones diferenciables forman un subconjunto denso.

3. Los subconjuntos densos de un espacio con la topología cofinita son los subconjuntos infinitos.

Un espacio topológico es **separable** si tiene un subconjunto denso numerable.

Ejemplos:

1. $\mathbb{R}^n$ es separable: $\mathbb{Q}^n$ es un subconjunto denso numerable.

2. El espacio de las sucesiones reales acotadas con la métrica del supremo no es separable: las sucesiones formadas por 0's y 1's forman un subconjunto no numerable de puntos a distancia 1, y un conjunto denso debería contener puntos en todas las bolas de radio 1/2 con centros en esos puntos.

3. El espacio de las sucesiones reales convergentes, con la métrica del supremo, si es separable: el conjunto de las sucesiones racionales casi constantes es un subconjunto denso numerable.

Observaciones:

- Los espacios segundo numerables son separables: tomando un punto en cada abierto de la base numerable se obtiene un denso numerable.
- Los espacios separables no necesariamente son segundo numerables (tarea)
- Los espacios metricos son separables si y solo si son segundo numerables: las bolas de radios racionales centradas en puntos del denso forman una base numerable.

Problemas

1. Si X es un espacio segundo numerable entonces toda cubierta abierta de X tiene una subcubierta numerable.
2. $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ con la topología de las cajas no es primero numerable. (muestra que para cada colección numerable de cajas abiertas alrededor de un punto existe una caja abierta alrededor del punto que no contiene a ninguna).
3. Muestra que los subespacios de un espacio segundo numerables son segundo numerables, pero que los subespacios de un espacio separable no son necesariamente separables.
4. Demuestra que todos los subespacios de $\mathbb{R}$ son separables.
5. Muestra que las imagenes continuas de espacios separables son separables. ¿Será cierto que las imagenes continuas de espacios segundo numerables son segundo numerables?
6. Muestra que la recta de Sorgenfrei ($\mathbb{R}$ con la topología que tiene por base a los intervalos semiabiertos $[a, b)$) es separable y 1^{ero} numerable pero no es 2^{o} numerable. Por lo tanto esta topología no viene de *ninguna* métrica en $\mathbb{R}$.