Los axiomas de separación

Muchos espacios topológicos tienen propiedades adicionales a las que se piden en la deficnición de topología, que tienen que ver con que tantos subconjuntos de X se pueden separar usando abiertos.

T_0 : Dados dos puntos de X hay una vecindad de alguno de ellos que no contiene al otro.

T_1 : Dados dos puntos de X hay una vecindad de cada uno que no contienen al otro.

T_2 : Cada par de puntos de X tienen vecindades ajenas.

T_3 : Cada punto y cada cerrado de X que no lo contenga tienen vecindades ajenas.

T_4 : Cada par de cerrados ajenos de X tienen vecindades ajenas.

Observaciones:

- X es $T_0 \iff$ Puntos distintos tienen cerraduras distintas.
- X es $T_1 \iff$ Los puntos son cerrados.
- X es $T_2 \iff$ La diagonal $\{(x,x)/x \in X\}$ es cerrada en $X \times X$
$\iff$ La grafica de cada funcion continua $f : Y \to X$ es cerrada en $Y \times X$
- X es $T_3 \iff$ Cada vecindad de un punto contiene a la cerradura de otra vecindad.
- X es $T_4 \iff$ Cada vecindad de un cerrado contiene a la cerradura de otra vecindad.

Un espacio topologico es **Hausdorff** si es T_2, **regular** si es T_1 y T_3, y **normal** si es T_1 y T_4.

$$\text{Metrico} \Rightarrow \text{Normal} \Rightarrow \text{Regular} \Rightarrow \text{Hausdorff} \Rightarrow T_1 \Rightarrow T_0$$

Ejemplos:

- $\mathbb{R}$ con la topología que tiene como base a los intervalos (a, ∞) es T_0 pero no T_1.
- $\mathbb{N}$ con la topología cofinita es T_1 pero no es T_2.
- Un espacio T_2 pero no T_3 es $\mathbb{R}$ con la topología en que los abiertos son de la forma $U - N$ con U un abierto usual de $\mathbb{R}$ y N un subconjunto numerable de $\mathbb{R}$. Con esta topología el conjunto $\{\frac{1}{n}/n \in \mathbb{N}\}$ es cerrado y no se puede separar del punto 0, porque todas las vecindades del conjunto intersectan a las vecindades de 0. .
- Un espacio T_3 pero no T_4 es el semiplano superior $\{(x, y) \ / \ x, y \in \mathbb{R}, y \geq 0\}$ con la topología que tiene como base a los discos abiertos contenidos en el semiplano superior y a los discos abiertos tangentes al eje x junto con su punto de tangencia. Con esta topología todos los subconjuntos del eje x son cerrados, pero no es posible separar a $\mathbb{Q}$ de $\mathbb{I}$.
- Existen espacios normales que no son métricos (tarea)

Lema. Los subespacios de espacios T_i son T_i si $i = 0, 1, 2, 3$ (los subespacios de espacios T_4 no son siempre T_4).

Demostración. El resultado es inmediato para $i = 0, 1, 2$. Para ver que cada subesepacio Y de un espacio regular X es regular, hay que tomar un punto $y \in Y$ y un cerrado C de Y que no contenga a y y ver que existen abiertos ajenos de Y que contienen a y y C. Observar que $C = Cl_y(C) = Cl_X(C) \cap Y$, asi que como $y \in Y$ pero $y \notin C$ entonces $y \notin Cl_X(C)$. Como $Cl_X(C)$ es un cerrado en X que no contiene a y y X es normal, existen abiertos ajenos U y V de X que contienen a y y a $Cl_X(C)$ respectivamente. Entonces $U \cap Y$ y $V \cap Y$ son abiertos ajenos de Y que contienen a y y C. •

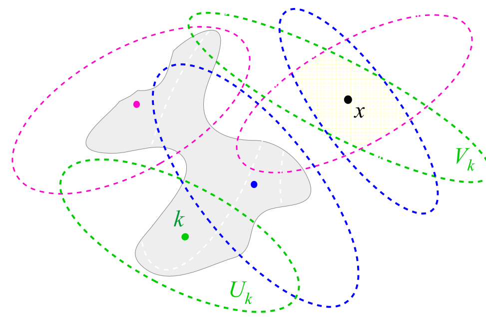
Lema. Los productos de espacios T_i son T_i si $i = 0, 1, 2, 3$ (los productos de espacios T_4 no son siempre T_4).

Demostración. . El resultado es inmediato para $i = 0, 1, 2$. Para ver que el producto $\prod X_i$ de espacios regulares es regular, hay que tomar un punto $x = (x_i) \in \prod X_i$ y una vecindad U de x y ver que existe otra vecindad V de x tal que $V \subset \bar{V} \subset U$. Sea U' una vecindad básica contenida en U, entonces $U' = \prod U_i$ donde cada U_i es abierto en X_i y $U_i = X_i$ para casi todo i. Como X_i es regular, existe una vecindad V_i de x_i tal que $V_i \subset \bar{V}_i \subset U_i$ y podemos tomar $V_i = U_i$ si $U_i = X_i$. Entonces $\prod V_i$ es una vecindad de x, y $\prod V_i \subset \prod \bar{V}_i \subset \prod U_i \subset U$. •

Las imagenes continuas de espacios T_i no tienen que ser T_i, de hecho hay cocientes de espacios normales que ni siquiera tienen que ser T_0. (tarea)

Lema. Los compactos en un espacio de Hausdorff son cerrados.

Demostración. Sea X un espacio de Hausdorff y $K \subset X$ compacto. Hay que ver que si $x \notin K$ entonces hay una vecindad V de x que no intersecta a K. Como X es Hausdorff para cada $k \in K$ existen abiertos ajenos U_k y V_k de X que contienen a k y a x respectivamente. Los abiertos U_k forman una cubierta abierta de K Como K es compacto, hay una colección finita $U_{k_1}, U_{k_2}, , \ldots U_{k_n}$. tal que $K \subset \cup U_{k_i}$. Entonces $V = \cap V_{k_i}$ es una vecindad de x y V no intersecta a K, ya que $K \subset \cup U_{k_i} \subset \cup V_{k_i}^c = (\cap V_{k_i})^c = V^c$. •



Lema. Los espacios de Hausdorff compactos son normales.

Demostración. Sea X un espacio de Hausdorff compacto. Veamos primero que X es regular. Sea C un cerrado de X y x un punto de $X - C$. Entonces para cada $c \in C$ existen abiertos ajenos U_c y V_c que contienen a c y x respectivamente. Como C es un cerrado en un compacto, C es compacto, asi que hay una coleccion finita $U_{c_1}, U_{c_2}, ..., U_{c_n}$ que cubren a C. Entonces $U_{c_1} \cup U_{c_2} \cup ... \cup U_{c_n}$ y $V_{c_1} \cap V_{c_2} \cap ... \cap V_{c_n}$ son abiertos ajenos que contienen a C y a x respectivamente.

Veamos ahora que X es normal. Sean C y D dos cerrados ajenos en X. Como X es regular, para cada $d \in D$ existen abiertos ajenos U_d y V_d que contienen a C y a d respectivamente. Como D es cerrado en X entonces C es compacto, asi que hay una coleccion finita $U_{c_1}, U_{c_2}, ..., U_{c_n}$'s que cubren a C. Entonces $U_{c_1} \cup U_{c_2} \cup ... \cup U_{c_n}$ y $V_{c_1} \cap V_{c_2} \cap ... \cap V_{c_n}$ son abiertos ajenos que contienen a C y a D respectivamente. •

Lema. Si X es un espacio de Hausdorff y $X_1 \supset X_2 \supset X_3 \supset ... \supset X_n \supset ...$ son compactos no vacíos en X entonces su intersección es compacta y no vacía. Si además los X_i son conexos, su intersección es conexa.

Demostración. Como los X_i son compactos en un espacio de Hausdorff entonces los X_i son cerrados y por lo tanto $\cap X_i$ es cerrado. Como $\cap X_i$ es un subconjunto cerrado del compacto X_1, $\cap X_i$ es compacto. Falta ver que $\cap X_i$ no es vacío. Elijamos puntos $x_i \in X_i$ y consideremos al conjunto $Y = \{x_1, x_2, x_3, ..\}$. Si Y tiene algun punto de acumulación $x \in X$ entonces x es un punto de acumulación de cada subconjunto $Y_n = \{x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, ..\} \subset X_n$ y como X_n es cerrado, entonces x está en X_n. Así que x está en $\cap X_i$.
Si Y no tiene puntos de acumulación entonces Y es cerrado en X y cada subconjunto Y_n es cerrado en X. Pero la intersección de cualquier familia finita de Y_i's es no vacía y la intersección de todos los Y_i's es vacía, lo que contradice que el conjunto X_1 que contiene a todos los Y_i's es compacto.

Supongamos ahora que cada X_i es conexo y mostremos que $\cap X_i$ es conexo. Si $\cap X_i$ no fuera conexo, $\cap X_i$ sería la unión de dos cerrados ajenos no vacíos C y D de $\cap X_i$. Como cada X_i es cerrado (porque es compacto en un Hausdorff) entonces $\cap X_i$ es cerrado en X y por lo tanto C y D son cerrados en X y por lo tanto compactos. Como X es hausdorff, C y D están contenidos en dos abiertos ajenos A y B de X. Si ningun X_i está contenido en el abierto $A \cup B$ consideramos los cerrados $X_i' = X_i \cap (A \cup B)^c$. Entonces $X_1' \supset X_2' \supset X_3' \supset ... \supset X_n' \supset ...$ son compactos no vacíos en X y por la parte 1 su intersección es no vacía, pero la intersección es $\cap X_i \cap (A \cup B)^c = (A \cup B) \cap (A \cup B)^c = \phi$. Por lo tanto algún X_i está contenido en $A \cup B$, lo que implica que X_i no es conexo ya que X_i es la unión de dos abiertos ajenos no vacios: $X_i \cap A$ y $X_i \cap B$. •

El resultado anterior no es cierto si el espacio no es Hausdorff.

Ejemplo. $\mathbb{N}$ con la topología cofinita es compacto, es segundo numerable y es T_1 pero no es T_2. Considera los subconjuntos $X_n = \{n, n+1, n+2, \ldots\}$. La topología inducida en cada X_n es la cofinita y por lo tanto cada X_n es compacto. La intersección de cualquier familia finita de X_i no es vacía. Pero la intersección de todos los X_i es vacía. Este ejemplo puede modificarse añadiendole dos puntos a $\mathbb{N}$ y a cada X_n para obtener un espacio en que la intersección de compactos conexos no sea conexa.

Problemas

1. Demuestra cuidadosamente que los espacios métricos son normales.

2. Muestra que $\mathbb{R}$ con la topología que tiene como subbase a los intervalos abiertos y a $\mathbb{Q}$ es Hausdorff pero no es regular.

3. El semiplano superior $\mathbb{R}^{2+} = \{(x, y)/y \geq 0\}$ con la topología que tiene como base a los discos abiertos en el interior de $\mathbb{R}^{2+}$ y a los discos abiertos tangentes al eje y junto con su punto de tangencia, es un espacio regular que no es normal. (Hint: $\{(q, 0)/q \in \mathbb{Q}\}$ y $\{(i, 0)/i \in \mathbb{I}\}$ son cerrados que no pueden separarse por abiertos).

4. Para $i = 0, 1, 2, 3$ los subespacios de espacios T_i son T_i y el producto de espacios es T_i.

5. Muestra que los cocientes de espacios T_i no tienen que ser T_i (hint: basta con hallar cocientes de $\mathbb{R}$ que no sean T_0).

6. Sea S la recta de Sorgenfrey (el conjunto de numeros reales con la topologia que tiene por base a los intervalos [a,b))

   a. S es normal.

   b. S no es metrizable.

   c. $S \times S$ no es normal. (hint: considera los cerrados $\{(q, -q)/q \in \mathbb{Q}\}$ y $\{(i, -i)/i \in \mathbb{I}\}$)

7. Sea $\mathbb{N}$ el conjunto de números naturales y sea $U(a, b) = \{a + nb/n \in \mathbb{Z}\} \cap \mathbb{N}$. Muestra que todos los $U(a, b)$ con a y b primos relativos son la base de una topología en $\mathbb{N}$, y que con esta topología

   a. El conjunto de múltiplos de cada número primo es cerrado en $\mathbb{N}$.

   b. $\mathbb{N}$ es Hausdorff.

   c. $\mathbb{N}$ es conexo.

8. Demuestra que toda función continua y biyectiva de un espacio compacto a un espacio Hausdorff es un homeomorfismo.