Metrizabilidad

Un espacio topologico(X, τ) es **metrizable** si la topologia viene de alguna metrica en X.

Observaciones

- La única topología metrizable en un espacio finito es la topología discreta.
- Los espacios metrizables son necesariamente normales y primero numerables.
- Hay espacios normales y primero numerables que no son metrizables, como la recta de Sorgenfrey.

Observar que los subespacios de espacios metrizables son metrizables (con la misma métrica), y que el producto de dos espacios metrizables es metrizable. Pero los productos infinitos de espacios metrizables (con la topología producto) pueden no ser meterizables (tarea).

Una manera de ver que un espacio X es metrizable es viendo que X puede encajarse de un espacio metrico. Un **encaje** de un espacio topológico X en un espacio Y es un homeomorfismo de X a un subespacio de Y, es decir, una función continua e inyectiva $f : X \to Y$ tal que $f : X \to f(X)$ es un homeomorfismo. Así que si un espacio X se puede encajar en un espacio métrico Y entonces X es metrizable.

Teorema de Metrización de Urysohn: Todo espacio normal y segundo numerable puede encajarse en $[0,1]^{\mathbb{N}}$ y por lo tanto es metrizable.

Para demostrar el teorema hay que dar una función continua e inyectiva de X al producto $[0,1]^{\mathbb{N}}$. Esto equivale a darles (una infinidad de) coordenadas a los puntos de X, de modo que cada coordenada varíe continuamente al variar los puntos y que las coordenadas distingan a los puntos (que dos puntos distintos tengan al menos una coordenada distinta).

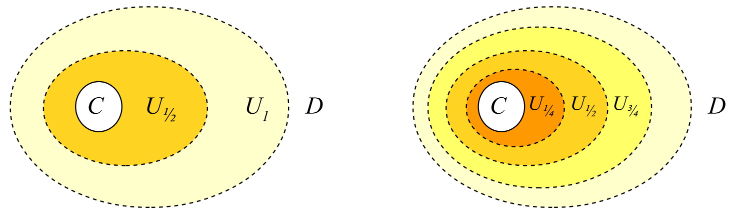
El ingrediente crucial para hacerlo es el siguiente lema:

Lema de Urysohn: Si C y D son dos cerrados ajenos en espacio normal X, entonces existe una función continua $f : X \to [0,1]$ tal que $f|_C \equiv 0$ y $f|_D \equiv 1$.

Demostración. Necesitamos definir la función f usando los abiertos y cerrados de X. Observemos que si tal función f existe, entonces para cada $q \in (0,1)$, el conjunto $f^{-1}[0,q)$ es un abierto de X que contiene a C y está contenido en $X - D$ y para $q < q'$ se tiene que $f^{-1}[0,q] \subset f^{-1}[0,q')$. La idea de Urysohn es empezar por construir abiertos U_q que contengan a C y esten contenidos en $X - D$ de modo que para $q < q'$ se tenga que $\overline{U}_q \subset U_{q'}$ y definir la función f a partir de ellos.

Paso 1: Construcción de los U_q para cada q de la forma $\frac{m}{2^n}$.

Sea $U_1 = X - D$.



Como X es normal, existe un abierto $U_{\frac{1}{2}}$ tal que $C \subset U_{\frac{1}{2}} \subset \overline{U}_{\frac{1}{2}} \subset U_1$

Como X es normal, existe un abierto $U_{\frac{1}{4}}$ tal que $C \subset U_{\frac{1}{4}} \subset \overline{U}_{\frac{1}{4}} \subset U_{\frac{1}{2}}$ y existe un abierto $U_{\frac{3}{4}}$ tal que $\overline{U}_{\frac{1}{2}} \subset U_{\frac{3}{4}} \subset \overline{U}_{\frac{3}{4}} \subset U_1$

Como X es normal, existen abiertos $U_{\frac{1}{8}}, U_{\frac{3}{8}}, U_{\frac{5}{8}}, U_{\frac{7}{8}}$ tales que $C \subset U_{\frac{1}{8}} \subset \overline{U}_{\frac{1}{8}} \subset U_{\frac{1}{4}} \subset \overline{U}_{\frac{1}{4}} \subset U_{\frac{3}{8}} \subset \overline{U}_{\frac{3}{8}} \subset U_{\frac{1}{2}} \subset \overline{U}_{\frac{1}{2}} \subset U_{\frac{5}{8}} \subset \overline{U}_{\frac{5}{8}} \subset U_{\frac{3}{4}} \subset \overline{U}_{\frac{3}{4}} \subset U_{\frac{7}{8}} \subset \overline{U}_{\frac{7}{8}} \subset U_1$.

Una vez que se han elegido los abiertos de la forma $U_{\frac{n}{2^m}}$, con $\overline{U}_{\frac{n}{2^m}} \subset U_{\frac{n+1}{2^m}}$, podemos elegir abiertos $U_{\frac{2n+1}{2^{m+1}}}$ de modo que $\overline{U}_{\frac{n}{2^m}} \subset U_{\frac{2n+1}{2^{m+1}}} \subset \overline{U}_{\frac{2n+1}{2^{m+1}}} \subset U_{\frac{n+1}{2^m}}$.

Paso 2: Definición de la función f en términos de los abiertos U_q.

Para todos los valores de q en un subconjunto denso de $[0,1]$ hemos elegido abiertos U_q de modo que $U_q \subset \overline{U}_q \subset U_{q'}$ siempre que $q < q'$.

Definamos $f : X \to [0,1]$ como $f(x) = \inf\{q \;/\; x \in U_q\}$

Para demostrar que f es continua hay que ver que la imagen inversa bajo f de cada abierto de $[0,1]$ es un abierto de X, y para esto basta considerar la imagen inversa de intervalos abiertos (r,s).

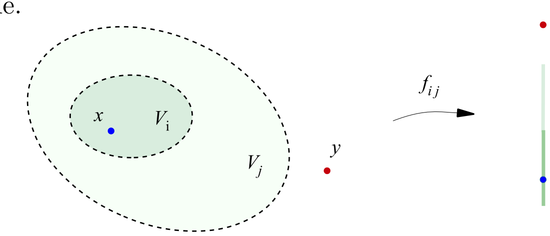
Observar que

$f(x) < s \iff x \in U_q$ para alguna $q < s \iff x \in \bigcup_{q<s} U_q$ y el conjunto $\bigcup_{q<s} U_q$ es un abierto de X.

$f(x) > r \iff x \notin U_q$ para alguna $q > r \iff x \notin \overline{U}_{q'}$ para alguna $q' > r \iff x \notin \bigcap_{q'>r} \overline{U}_{q'}$

Así que $f^{-1}(r,s) = \bigcup_{q<s} U_q - \bigcap_{q>r} \overline{U}_q$. y este es un abierto de X. •

Demostración del Teorema de Urysohn. Si $\{V_n\}$ es una base numerable para X, el conjunto P de pares de abiertos básicos (V_i, V_j) tales que $\overline{V_i} \subset V_j$ es numerable.



Por el lema de Urysohn, para cada $(V_i, V_j) \in P$, existe una función continua $f_{ij} : X \to [0,1]$ que vale 0 en $\overline{V_i}$ y vale 1 en $X - V_j$. Sea $F : X \to [0,1]^P$ la función cuyas coordenadas son las funciones f_{ij}.

1. F es continua, ya que las funciones coordenadas lo son.

2. F es inyectiva, ya que dados $x \neq y$ en X, existe una pareja $(V_i, V_j) \in P$ tal que $x \in V_i$ and $y \notin V_j$, así que $f_{ij}(x) = 1$ y $f_{ij}(y) = 0$ y por lo tanto $F(x) \neq F(y)$.

3. F es abierta sobre su imagen: Dado $x \in X$ y un abierto V que lo contenga, existe un par $(V_i, V_j) \in P$ con $x \in V_i \subset \overline{V_i} \subset V_j \subset V$, asi que $f_{ij}(x) = 1$ y $f_{ij} \equiv 0$ en V^c. Como la coordenada (V_i, V_j) de $f(x)$ es 1 y la coordenada (V_i, V_j) de los puntos en $f(V^c)$ es 0, la vecindad de $f(x)$ formada por los puntos con esa coordenada mayor que 0 no contiene puntos de $f(V^c)$, todos los puntos de $f(X)$ en esa vecindad son puntos de $f(V)$. Así que $f(V)$ es abierto en $f(X)$.

Lo anterior muestra que F es un encaje de X en $[0,1]^{\mathbb{N}}$, para demostrar el teorema sólo falta probar que el espacio $[0,1]^{\mathbb{N}}$ con la topología producto es metrizable. Este es un ejercicio de tarea. •

El Teorema de Urysohn no caracteriza a todos los espacios metrizables ya que existen espacios metrizables que no son segundo numerables (tarea).

Teorema de extensión de Tietze: Si X es un espacio normal y C es un cerrado en X, entonces toda función continua $f : C \to [0,1]$ puede extenderse a una función continua $F : X \to [0,1]$

El teorema de Tietze es una generalización del Lema de Urysohn (cuando C es la unión de los dos cerrados ajenos y f es la función que vale 0 en uno y 1 en el otro).

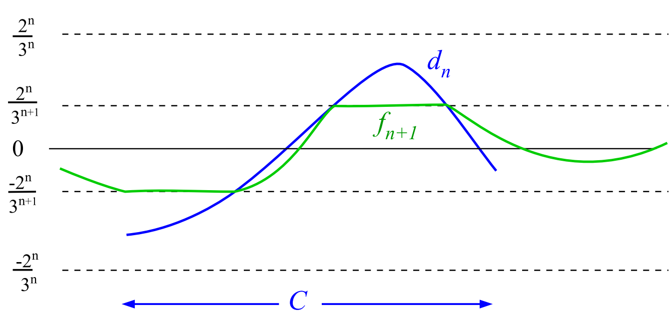
Demostración. La función F se construye como el límite de una sucesión de funciones continuas rn S que aproximan cada vez mejor a la función f en C.

La primera aproximación es $f_0 = 0$, que es continua en todo X. La diferencia entre f y f_0 es a lo mas 1.

Consideremos la diferencia $d_0 = f - f_0 : C \to [1,1]$. Sea $C_{-1} = d_0^{-1}[-1, -\frac{1}{3}]$ y $C_1 = d_0^{-1}[\frac{1}{3}, 1]$. Como C_{-1} y C_1 son cerrados ajenos en X, por el lema de Urysohn hay una función continua $f_1 : X \to [-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}]$ que vale $-\frac{1}{3}$ en C_{-1} y vale $\frac{1}{3}$ en C_1. Entonces la diferencia en C entre f y f_1 es a lo mas $\frac{2}{3}$.

Tomemos la diferencia $d_1 = f - f_1 : C \to [-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}]$. Sea $C_{-2} = d_1^{-1}[-\frac{2}{3}, -\frac{2}{9}]$ y $C_2 = d_1^{-1}[\frac{2}{9}, \frac{1}{3}]$. Como C_{-2} y C_2 son cerrados ajenos en X, por el lema de Urysohn hay una función continua $f_2 : X \to [-\frac{2}{9}, \frac{2}{9}]$ que vale $-\frac{2}{9}$ en C_{-2} y vale $\frac{2}{9}$ en C_2. La diferencia entre d_1 y f_2 en C es a lo mas $\frac{4}{9}$, asi que la diferencia entre f y $f_1 + f_2$ es a lo mas $\frac{4}{9}$.

Ahora la diferencia $d_2 = f - (f_1 + f_2) : C \to [-\frac{4}{9}, \frac{4}{9}]$. Sea $C_{-3} = f^{-1}[-\frac{4}{9}, -\frac{4}{27}]$ y $C_3 = f^{-1}[\frac{4}{27}, \frac{4}{9}]$. Como C_{-3} y C_3 son cerrados ajenos en X, por el lema de Urysohn hay una función continua $f_3 : X \to [-\frac{4}{27}, \frac{4}{27}]$ que vale -$\frac{4}{27}$ en C_{-3} y vale $\frac{4}{27}$ en C_3. La diferencia entre d_2 y f_3 en C es a lo mas $\frac{8}{27}$, asi que la diferencia entre f y $f_1 + f_2 + f_3$ es a lo mas $\frac{8}{27}$.



En general, consideremos la diferencia
$d_n = f - (f_1 + f_2 + ... + f_n) : C \to [-\frac{2^n}{3^n}, \frac{2^n}{3^n}]$. Sea $C_{-(n+1)} = f^{-1}[-\frac{2^n}{3^n}, -\frac{2^n}{3^{n+1}}]$ y $C_{n+1} = f^{-1}[\frac{2^n}{3^{n+1}}, \frac{2^n}{3^n}]$. Como $C_{-(n+1)}$ y C_{n+1} son cerrados ajenos en X, hay una función continua $f_{n+1} : X \to [-\frac{2^n}{3^{n+1}}, \frac{2^n}{3^{n+1}}]$ que vale -$\frac{2^n}{3^{n+1}}$ en $C_{-(n+1)}$ y vale $\frac{2^n}{3^{n+1}}$ en C_{n+1}. La diferencia entre d_n y f_{n+1} en C es a lo mas $\frac{2^{n+1}}{3^{n+1}}$, asi que la diferencia entre f y $f_1 + f_2 + f_3 + ... + f_{n+1}$ es a lo mas $\frac{2^{n+1}}{3^{n+1}}$.

Queremos ver que la serie infinita $\sum f_n$ es una función continua que extiende a f.

Sea $F_n = f_1 + f_2 + f_3 + ... + f_n$, entonces F_n es continua ya que es suma de funciones continuas y

$|F_n(x) - F_m(x)| \leq |f_{m+1}(x)| + |f_{m+2}(x)| + ... + |f_n(x)| \leq (\frac{2}{3})^m[\frac{1}{3} + (\frac{1}{3})^2 + ... + (\frac{1}{3})^{n-m}] < (\frac{2}{3})^m$ por lo que para cada x la sucesión $F_n(x)$ es de Cauchy, así que tiene un límite, que definimos como $F(x)$. Además las funciones $F_n(x)$ convergen uniformamente a $F(x)$ y por lo tanto $F(x)$ es continua. •

Corolario: Si X es un espacio normal y C es un cerrado en X, entonces toda función continua $f : C \to \mathbb{R}^n$ puede extenderse a una función continua $\bar{f} : X \to \mathbb{R}^n$.

Demostración. Basta ver que cada una de las funciones coordenadas $f_i : C \to \mathbb{R}$ puede extenderse a una función continua $\bar{f}_i : X \to \mathbb{R}$. Para poder aplicar el teorema de Tietze necesitamos que la imagen de la función f_i sea acotada, si no lo es tomamos un homeomorfismo $h : \mathbb{R} \to (0,1)$ y consideramos la función continua $h \circ f_i : C \to (0,1)$, que por Tietze tiene una extensión continua $\overline{h \circ f_i} : X \to \mathbb{R}$. La extensión de f_i es $h^{-1} \circ \overline{h \circ f_i}$. •

El corolario no vale para funciones cuyo codominio no es $\mathbb{R}^n$. Por ejemplo, la función identidad de S^1 en S^1 no puede extenderse a una función continua de D^2 a S^1 porque la extensión daría una retracción de D^2 a S^1.

Problemas

1. Muestra que todos los espacios finitos metrizables son discretos.
2. Muestra que ningun espacio conexo numerable es metrizable.
3. Muestra que en $[0,1]^{\mathbb{N}}$ con la topologia producto es metrizable. Hint: considera la métrica $d_0((a_1, a_2, a_3, ...), (b_1, b_2, b_3, ...)) = sup\{|a_i - b_i|/i\}$
4. Muestra que en $[0,1]^{\mathbb{N}}$ con la topologia de las cajas no es metrizable.
5. Prueba que un producto de espacios topológicos es metrizable si y solo si cada factor es metrizable y hay a lo mas una cantidad numerable de factores con mas de un punto.
6. Muestra que existen espacios metrizables que no son segundo numerables, pero que los espacios metrizables compactos si son segundo numerables.
7. Demuestra que si X es normal y $A \subset X$ *no* es cerrado, entonces hay una función continua $f : A \to [0,1]$ que *no* puede extenderse a una función continua $\bar{f} : X \to [0,1]$. Hint: Urysohn.
8. Recordar que una retraccion de un espacio X a un subespacio Y es una función continua $f : X \to Y$ que es la identidad en Y. Demuestra que hay una retracción de $\mathbb{R}^3$ a la linea anudada. Hint: Tietze.