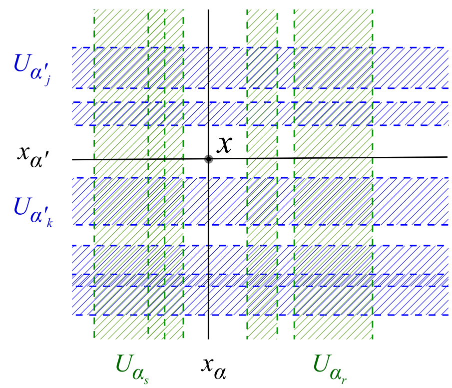
Productos Infinitos

Ya sabemos que el producto de una colección finita de espacios topoloógicos es compacto si y solamente si los factores son compactos, una pregunta natural es que sucede con los productos infinitos, como el cubo de Hilbert $[0,1]^{\mathbb{N}}$. La respuesta depende del Lema de Zorn, que equivale al axioma de elección en la teoría de conjuntos.

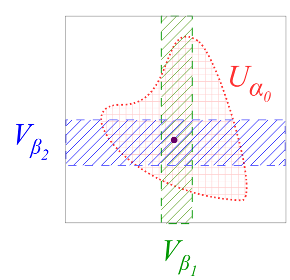
Teorema de Tichonoff: El producto de cualquier familia de espacios compactos (con la topología producto) es compacto.



Demostración. Recordar que el producto $\prod X_\alpha$ tiene una subbase formada por productos de algún abierto de algún X_α por todos los demas X_α's. Estos productos son las preimágenes de abiertos de X_α bajo la proyección $p_\alpha : \prod X_\alpha \to X_\alpha$. Consideremos primero el caso de una cubierta de $\prod X_\alpha$ está formada por los abiertos de esta tipo. Dividamos la cubierta en las subfamilias $\{U_{\alpha_i}\}$ formadas por preimágenes de abiertos en cada X_α. Si para alguna X_α las proyecciones $\{p_\alpha U_{\alpha_i}\}$ cubren a X_α entonces como X_α es compacto $\{p_\alpha U_{\alpha_i}\}$ debe contener una subcubierta finita de X_α, y por tanto $\{U_{\alpha_i}\}$ contiene una subcubierta finita de $\prod X_\alpha$. La otra posibilidad es que $\{p_\alpha U_{\alpha_i}\}$ no sea una cubierta de X_α para ningún α. En este caso para cada X_α existe $x_\alpha \notin \bigcup p_\alpha U_{\alpha_i}$ y entonces $x = (x_\alpha)$ no está en $\bigcup U_{\alpha_i}$, contradiciendo que $\bigcup\{U_{\alpha_i}\}$ es una cubierta de $\prod X_\alpha$.

El caso general es consecuencia del caso anterior y del siguiente lema, que es válido para cualquier espacio, no solo para productos:

Lema de la subbase de Alexander: Si cada cubierta formada por elementos de una subbase $\{V_\beta\}$ de la topología de un espacio X tiene una subcubierta finita, entonces X es compacto.



Demostración del lema. Supongamos que todas las cubiertas subbasicas de X tienen subcubiertas finitas pero que X tiene otras cubierta abiertas sin subcubiertas finitas. Entonces, por el Lema de Zorn, existe una cubierta abierta maximal $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ sin subcubiertas fintas. Así que si V es cualquier otro abierto de X entonces $\{V\} \cup \{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ sí tiene una subcubierta finita. Considerar la subfamilia $\{U_\beta\}_{\beta\in B}$ de todos los elementos de $\{U_\alpha\}$ que son subbasicos. Si esta subfamilia cubriera a X entonces por hipotesis tendria una subcubierta finita, como $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ no la tiene, entonces existe $x \in X$ que no está cubierto por $\{U_\beta\}_{\beta\in B}$. Como $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ si cubre a X, existe un U_{α_0} que contiene a x. Como $\{V_\beta\}$ es subbase, existen $V_{\beta_1}, V_{\beta_2}, ..., , V_{\beta_n}$ tales que $x \in \bigcap V_{\beta_i} \subset U_{\alpha_0}$. Como $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ es maximal, entonces, para cada i, $\{V_{\beta_i}\} \cup \{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ ya tiene una subcubierta finita $\{V_{\beta_i}, U_{\alpha_{i1}}, U_{\alpha_{i2}}, ...U_{\alpha_{im}}\}$. Ahora $\bigcup_{i=1}^n \{U_{\alpha_{i1}}, U_{\alpha_{i2}}, ...U_{\alpha_{im}}\}$ cubre a $X - \bigcap V_{\beta_i} \subset U_{\alpha_0}$ por lo tanto $\{U_{\alpha_0}\} \bigcup_{i=1}^n \{U_{\alpha_{i1}}, U_{\alpha_{i2}}, ...U_{\alpha_{im}}\}$ cubre a X, contradiciendo que $\{U_\alpha\}$ no tenia subcubiertas finitas. $\bullet$

No es dificil mostrar (tarea) que un producto infinito con la topología de las cajas no es compacto. Esta es otra razón para considerar que la topología producto es mas natural que la topología de las cajas.

Ejemplo. El conjunto de Cantor es homeomorfo a un producto infinito de espacios discretos.

El conjunto de Cantor C se construye empezando con el intervalo $C_0 = [0,1]$ y borrando el tercio central para obtener un conjunto C_1 formado por dos intervalos $[0, \frac{1}{3}]$ y $[\frac{2}{3}, 1]$. Luego se borran los tercios centrales de estos dos intervalos para obtener un conjunto C_2 formado por 4 intervalos $[0, \frac{1}{9}]$, $[\frac{2}{9}, \frac{1}{3}]$, $[\frac{2}{3}, \frac{7}{9}]$, $[\frac{8}{9}, 1]$. Luego se borran los tercios centrales de estos 4 intervalos para obtener un conjutno C_3 formado por 8 intervalos, y se repite: en el paso n-esimo se borran los tercios centrales de los 2^{n-1} intervalos de C_{n-1} para obtener un conunto C_n formado por 2^n intervalos cerrados. El conjunto de Cantor es el resultado de repetir esto una infinidad de veces: es la intersección de los compactos anidados C_n así que es un conjunto compacto. .

Por construcción, los puntos del conjunto de Cantor son los puntos x del intervalos [0,1] cuya expansión en base 3 ($x = 0.a_1a_2a_3 \dots a_n \dots$ con $a_i \in \{0, 1, 2\}$ y sin colas de 2's.) contiene unicamente 0's y 2's.

Las sucesiones de 0's y 2's se pueden identificar con los puntos del conjunto $\{0, 2\}^{\mathbb{N}}$. Afirmamos que el conjunto de Cantor es homeomorfo a $\{0, 2\}^{\mathbb{N}}$ con la topología producto. Para ver esto, definamos $h : C \to \{0, 2\}^{\mathbb{N}}$ como

$$h(0.a_1a_2a_3 \dots a_n \dots) = (a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots)$$

Es facil ver que la función h está bien definida y es biyetiva. Para ver que h es un homeomorfismo basta observar que la n-esima funcion coordenada de dos puntos x y x' del Cantor es distinta si y solo si los n-esimos digitos de la expansion ternaria de x y x' son distintos, y esto pasa si y solo si los puntos están en distintos intervalos de C_n.

Problemas

1. Demuestra que $[0, 1]^{\mathbb{N}}$ es compacto sin usar el teorema de Tichonoff, probando que toda sucesión en $[0, 1]^{\mathbb{N}}$ (que es una sucesión de sucesiones en $[0, 1]$) tiene una subsucesión convergente (como hablamos de la topología producto, la convergencia a considerar es la puntual).

2. Muestra que un producto infinito de espacios compactos con mas de un punto, con la topologia de las cajas, no es compacto.

3. Demuestra que $\mathbb{I}^+$ (el conjunto de los irracionales positivos) es homeomorfo a $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. (Hint: Cada $i \in \mathbb{I}$ puede representarse por una sucesión de fracciónes $r_1, r_2, \dots, r_n, \dots$ que convergen a i, donde r_n es la fracción con denominador n mas cercana a i. Los numeradores de las r_n's definen para cada $i \in \mathbb{I}$ una función $f_i : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$).

4. Muestra que todo espacio normal X puede encajarse en un espacio normal compacto. (hint: muestra que X puede encajarse en algún producto $[0, 1]^A$)