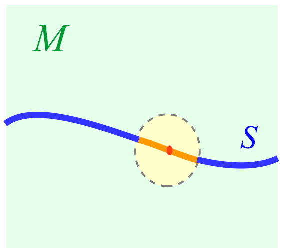
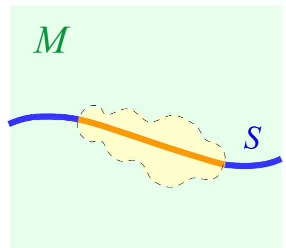
Subespacios

Si M es un espacio métrico entonces cada subconjunto S de M también es un espacio métrico (con la misma métrica). Decimos entonces que S es un **subespacio** de M. Para ver que relación hay entre la topología de S y la de M, basta observar que la bolas en S son intersecciones de bolas en M con S.





Afirmación. Si S es un subespacio de M, entonces

1. A es abierto en S si y solo si A es la intersección de un abierto de M con S.

2. C es cerrado en S si y solo C si es la intersección de un cerrado de M con S.

Demostración.
1. Las bolas en S son intersecciones de bolas en M con S, y cada abierto A en S es la unión de bolas abiertas en S. Si $A = \cup B_p$ y $B_p = D_p \cap S$ para alguna bola abierta D_p en M, entonces $A = \cup(D_p \cap S) = (\cup D_p) \cap S$ donde $\cup D_p$ es abierto en M.
2. C es cerrado en $S \Leftrightarrow S - C$ es abierto en $S \Leftrightarrow S - C = D \cap S$ donde D es abierto en $M \Leftrightarrow C{=}(M - D) \cap S$ donde $M - D$ es cerrado en M.

Ejemplos.

1. Si consideramos al intervalo $(0, 1]$ como subespacio de $\mathbb{R}$, entonces
   a. $(\frac{1}{2}, 1]$ es abierto en $(0, 1]$ ya que es la intersección del abierto $(\frac{1}{2}, \infty)$ de $\mathbb{R}$ con $(0, 1]$.
   b. $(0, \frac{1}{2}]$ es cerrado en $(0, 1]$ ya que es la intersección del cerrado $(-\infty, \frac{1}{2}]$ de $\mathbb{R}$ con $(0, 1]$.

2. $\mathbb{Q}$ es un subespacio de $\mathbb{R}$.
   a. El conjunto de racionales mayores que 0 es abierto en $\mathbb{Q}$.
   b. El conjunto de racionales mayores o iguales a 0 es cerrado en $\mathbb{Q}$.
   c. El conjunto de racionales mayores que $\sqrt{2}$ es abierto y cerrado en $\mathbb{Q}$, ya que es la intersección de $(\sqrt{2}, \infty)$ con $\mathbb{Q}$ y tambien es la intersección de $[\sqrt{2}, \infty)$ con $\mathbb{Q}$.

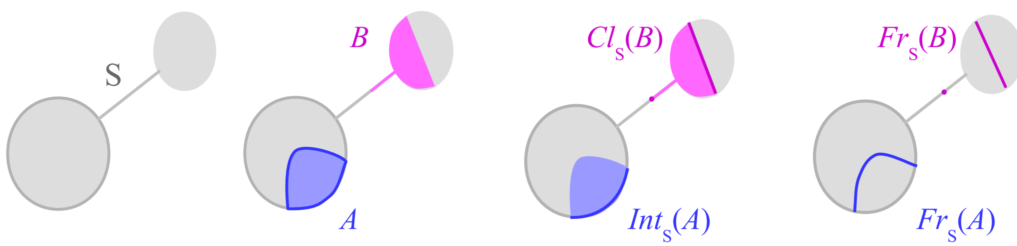
3. La esfera unitaria $S^2 = \{(x, y, z) \ / \ x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ es un subespacio de $\mathbb{R}^3$. Los abiertos de S^2 son las intersecciones de abiertos de $\mathbb{R}^3$ con S^2. Por ejemplo, el hemisferio norte de la esfera (sin el ecuador) es un abierto de S^2.

4. Las matrices invertibles forman un subespacio abierto del espacio de matrices reales de 2×2, mientras que las matrices diagonales forman un subespacio cerrado de este espacio. Así que las matrices diagonales invertibles forman un subespacio cerrado del espacio de matrices invertibles, y un subespacio abierto del espacio de matrices diagonales, aunque no forman un subespacio abierto ni cerrado del espacio de todas las matrices de $n \times n$.

El lema anterior muestra que si S es un subespacio de un espacio métrico M, entonces la topología de S es la restricción de la topología de M a S. Decimos que S tiene la **topología relativa**.

Podemos hablar del interior, cerradura y frontera de un subconjunto A de S respecto a S o respecto a M, para distinguirlos escribimos $Int_S(A)$, $Cl_S(A)$ y $Fr_S(A)$.

Ejemplo.



Problemas

1. ¿Cuales son todos los subconjuntos abiertos de $\{0, 1, 1/2, 1/3, 1/4, ...\}$ como subespacio de $\mathbb{R}$?
2. ¿Puedes encontrar $A \subset S \subset \mathbb{R}^3$ tales que...
   a. A sea abierto en S pero no es abierto en $\mathbb{R}^3$?
   b. A no es abierto en S pero si lo es en $\mathbb{R}^3$?
   c. A es abierto en S y cerrado en $\mathbb{R}^3$?
   d. A es cerrado en S y abierto en $\mathbb{R}^3$?
3. Demuestra que si $A \subset S \subset M$ entonces $Int_M A \subset Int_S A$ y $Cl_M A \supset Cl_S A$.
4. Muestra que $Fr_S(A) = \emptyset$ si y solo si A es simultáneamente abierto y cerrado en S.
5. ¿Si $S \subset M$ y todos los abiertos de S son abiertos de M, que sabes de S? ¿Y si ningún abierto no vacío de S es abierto de M?
6. Si S y T son subespacios de M y A es abierto en S y B es abierto en T, ¿sera cierto que $A \cup B$ es abierto en $S \cup T$? ¿y que $A \cap B$ es abierto en $S \cap T$?
7. En el espacio F de las funciones de $[0, 1]$ en $[0, 1]$ con la métrica uniforme, consideremos al subespacio C de las funciones continuas, y al subespacio D de las funciones diferenciables.
   a. ¿D es cerrado en C? ¿D es cerrado en F?
   b. ¿Cual es el interior de D en C? ¿Cual es el interior de C en F?
   c. ¿Cual será la cerradura de D en C? ¿Y la cerradura de D en F?