Grupos topológicos

Algunos conjuntos tienen simultáneamente estructuras algebráicas y estructuras topológicas que son compatibles.

Un **grupo topológico** es un grupo G con una topología que hace que la multiplicación en G $m : G \times G \to G$ y la inversión $i : G \to G$ que envía cada elemento a su inverso sean continuas.

Se sigue inmediatamente que la inversión es un homemorfismo de G en G, y que para cada elemento g la multiplicación (por la derecha o por la izquierda) por g da un homeomorfismo de G en G.

Ejemplos de grupos topológicos:

1. Cualquier grupo finito, con la topología discreta.
2. $\mathbb{R}$ con la suma.
3. $\mathbb{C} - \{0\}$ con la multiplicación compleja.
4. El conjunto de matrices invertibles de $n \times n$ con la multiplicación de matrices.
5. El conjunto de funciones de un espacio X a $\mathbb{R}$ con la suma. (hay varias topologías posibles: la uniforme, la de convergencia puntual, etc.)
6. El conjunto de homeomorfismos de un espacio métrico M en sí mismo, con la composición. (hay varias topologías posibles en este conjunto)

Lema. Los subgrupos de un grupo topologico son grupos topológicos (con la topología inducida).

Demostración. Si H es un subgrupo de un grupo topológico G entonces a multiplicción y la inversión en H son las restricciones a H de la multiplicación y la inversión en G, que son continuas, por lo tanto estas operaciones en H son continuas. •

Ejemplos:

1. En $\mathbb{C} - \{0\}$ con la multiplicación compleja, los complejos de norma 1 forman el subgrupo S^1.
2. En el grupo de matrices invertibles de $n \times n$ el conjunto de matrices de determinante 1 forman un subgrupo cerrado. y el conjunto de matrices ortogonales forman un subgrupo compacto.

Si G es un grupo topológico y $S \subset G$, denotamos $S^{-1} = \{s^{-1} \ / \ s \in S\}$. Observar que si H es un subgrupo de G entonces $H^{-1} = H$.

Lema. El producto de dos grupos topológicos es un grupo topológico.

Demostración. Si G_1 y $_2$ son grupos, el producto $G_1 \times G_2$ es el grupo formado por las parejas g_1, g_2 con la multiplicación $(g_1, g_2) \cdot (g_1', g_2') = (g_1 g_1', g_2 g_2')$ y la inversión $i(g_1, g_2) = (i_1 g_1, i_2 g_2)$. Si las inversiones en G_1 y en G_2 son continuas entonces la inversión en $G_1 \times G_2$ es continua ya que si U_1 y U_2 son abiertos de G_1 y G_2 entonces $i_1^{-1}(U_1)$ y $i_2^{-1}(U_2)$ son abiertos en G_1 y G_2 y por lo tanto $i^{-1}(U_1 \times U_2) = i_1^{-1}(U_1) \times i_1^{-1}(U_2)$ es abierto en $G_1 \times G_2$.
La prueba de que la multiplicación en $G_1 \times G_2$ es continua siempre que las multiplicaciones en G_1 y en G_2 son continuas es similar. •

Ejemplo: El toro $T^2 = S^1 \times S^1$ es un grupo topológico.

Si G es un grupo y H es un subgrupo de G, los conjuntos de la forma gH dan una particion de G en clases de equivalencia (las clases laterales de H). Al conjunto de clases laterales se le denota por G/H. Si H es un subgrupo normal de G entonces G/H tiene estructura de grupo, definiendo $gH \cdot g'H = gg'H$ y $(gH)^{-1} = g^{-1}H$. Y si G es un espacio topológico entonces G/H es un espacio cociente de G (donde los abiertos de G/H son aquellos subconjuntos de $G?H$ cuyas preimágenes bajo la proyección $p : G \to G/H$ son abiertas en G).

Lema. Si G es un grupo topológico y H es un subgrupo normal de G entonces el cociente G/H es un grupo topológico.

Demostración. ? •

Ejemplos:

1. $\mathbb{Z}$ es un subgrupo normal de $\mathbb{R}$ con la suma. El cociente $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ es el grupo S^1.
2. $\mathbb{Q}$ es un subgrupo normal de $\mathbb{R}$ con la suma. El cociente $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$ es un grupo espantoso que ni siquiera es T_0.

Un *homomorfismo* entre grupos topológicos es un homomorfismo de grupos que es continuo.

Un *isomorfismo* entre grupos topológicos es un isomorfismo de grupos que es un homeomorfismo.

Ejemplos:

1. Si G es un grupo topológico la inversion en G es un isomorfismo de G si y solo si G es abeliano (la inversion es un homeomorfismo, para ser isomorfismo hace falta que $i(gg') = i(g) \cdot i(g')$ pero lo que sucede es que $i(gg') = i(g')i(g)$.
2. La conjugación por un elemento g de G, que envía a cada elemento h a ghg^{-1} es un isomorfismo de G.

Los grupos topológicos son espacios *homogéneos*: para cada par de elementos g y g' de G existe un homeomorfismo de G (la multiplicación por la izquierda por $g'g^{-1}$) que lleva g a g'. Esto hace que los grupos topológicos tengan propiedades muy especiales. Damos unos ejemplos.

Lema. Un grupo topológico es T_0 si y solo $\{e\}$ es cerrado.

Demostración. Supongamos primero que $\{e\}$ es cerrado. Entonces cada punto g de G es cerrado ya la multiplicación por g es un homeomorfismo de G que lleva e a g, así que G es T_1 y por lo tanto es T_0. Supongamos ahora que G es T_0. Para ver que $\{e\}$ es cerrado necesitamos ver que cada $g \neq e$ tiene una vecindad que no contiene a e. Sabemos que para cada g en G existe un abierto U que contiene a g y no contiene a e, o existe un abierto V que contiene a e pero no contiene a g. En el primer caso ya acabamos, en el segundo el abierto $V^{-1}g$ contiene a g (ya que V^{-1} contiene a e) y no contiene a e (si lo contuviera entonces $e = v^{-1}g$ para algun v en V, así que $g = v$, lo que diría que V contiene a g. •

Lema. Si un grupo topológico es T_0 entonces es regular.

Demostración. Hay que ver que si G es T_0 entonces es T_1, T_2 y T_3.

•

Lema. Si H es un subgrupo de un grupo topológico G, entonces su cerradura $\bar{H}$ también es un subgrupo de G.

Demostración. Hay que ver que si $h \in \bar{H}$ entonces $h^{-1} \in \bar{H}$ y que si h y h' están en $\bar{H}$ entonces $h \cdot h' \in \bar{H}$.

Si $h \in \bar{H}$ entonces cada vecindad de h contiene algun elemento de H. Si U es una vecindad de h^{-1} entonces U^{-1} es una vecindad de h, por lo tanto U^{-1} contiene algun elemento de H asi que U contiene algun elemento de $H^{-1} = H$, y esto dice que h^{-1} está en $\bar{H}$.

Si $h, h' \in \bar{H}$ entonces cada vecindad de h y cada vecindad de h' contienen puntos de H. Si U es una vecindad de $h \cdot h'$ entonces como la multiplicación es continua existen vecindades V y V' de h y h' tales que $V \cdot V' \subset U$. Sabemos que V y V' contienen puntos v y v' de H, entonces $v \cdot v'$ está en H y está en $V \cdot V' \subset U$. •

Problemas

1. Si G es un grupo topológico y $C \subset G$ es la componente conexa que contien al elemento identidad e entonces C es un subgrupo normal de G.

2. Si H es un subgrupo de G entonces la proyección de G al conjunto de clases laterales G/H (con la topología cociente) es abierta.

3. Si un subgrupo de un grupo topológico es abierto, entonces también es cerrado.

4. Muestra que $(\mathbb{R}, +)$ (los reales con la suma) es isomorfo a $(\mathbb{R}^+, \cdot)$ (los reales positivos, con el producto).

5. Si $f : G \to H$ es un homomorfismo de grupos topológicos, entonces $G/\ker f$ es isomorfo a $Im(f)$ si y solo si la función f es abierta.

6. Si H es un subgrupo normal de G entonces G/H es un grupo topológico. Si H es cerrado entonces G/H es T_0.

7. Si H es un subgrupo de G entonces su cerradura $\overline{H}$ es un subgrupo de G. Si H es normal entonces $\overline{H}$ tambien es normal.

8. Los subgrupos abiertos de un grupo topológico ons tambien cerrados.