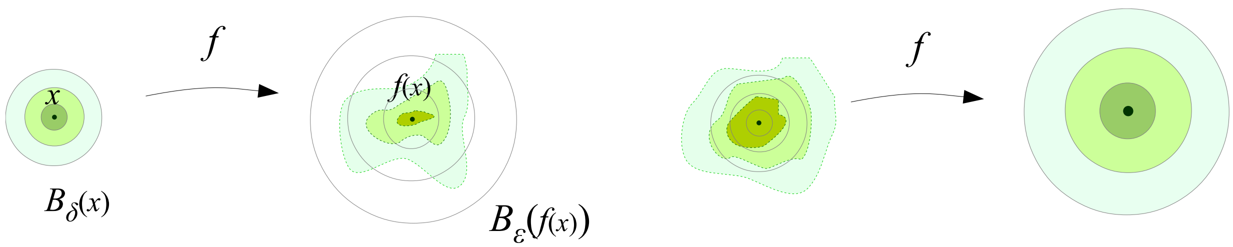
Funciones Continuas

Recordar que una función entre espacios métricos $f : M \to N$ es continua si para cada $x \in M$ y para cada $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $d(x,y) < \delta$ entonces $d(f(x), f(y)) < \epsilon$, o en otras palabras, que $f(B_\delta(x)) \subset B_\epsilon(f(x))$.



Lema. Una función entre espacios métricos $f : M \to N$ es continua si y sólo si la imagen inversa de cada abierto de N es un abierto de M.

Demostración.

$\Rightarrow$ Supongamos que $f : M \to N$ es continua y sea A un abierto de N. Para ver que $f^{-1}(A)$ es abierto hay que ver que todos sus puntos son interiores. Si $x \in f^{-1}(A)$ entonces $f(x) \in A$, así que existe $\epsilon > 0$ tal que $B_\epsilon(f(x)) \subset A$. Como f es continua existe un $\delta > 0$ tal que $f(B_\delta(x)) \subset B_\epsilon(f(x))$. Esto dice que $B_\delta(x) \subset f^{-1}(A)$, asi que $x \in Int f^{-1}(A)$.

$\Leftarrow$ Ahora supongamos que para cada abierto A de N sucede que $f^{-1}(A)$ es abierto en M. Si $x \in M$ y $\epsilon > 0$ la bola $B_\epsilon(f(x))$ es un abierto de N, así que $f^{-1}(B_\epsilon(f(x)))$ es abierto en M. Como $x \in f^{-1}(B_\epsilon(f(x)))$ que es abierto, existe $\delta > 0$ tal que $B_\delta(x) \subset f^{-1}(B_\epsilon(f(x)))$, así que $f(B_\delta(x)) \subset B_\epsilon(f(x))$ •

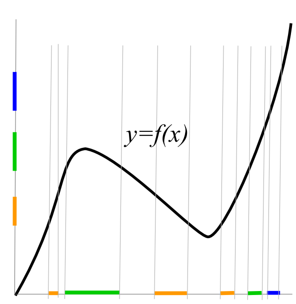
El lema anterior permite hablar de continuidad en espacios donde estan definidos los abiertos, aunque no este definida una métrica.

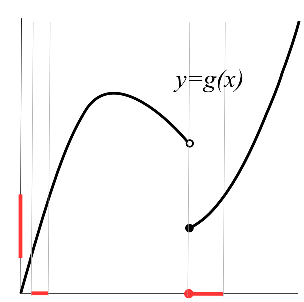
Una función $f : X \to Y$ es **continua** si para cada abierto A de Y, $f^{-1}(A)$ es un abierto de X.

Ejemplo. Como los abiertos de $\mathbb{R}$ son las uniones de intervalos abiertos, para ver si una función de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ es continua basta ver si las imágenes inversas de intervalos abiertos son uniones de intervalos abiertos.

Consideremos las funciones f y g cuyas gráficas se muestran.

Las preimagenes bajo f de los intervalos abiertos consisten de uno, dos o tres intervalos abiertos, asi que f es continua.
Pero las preimagenes bajo g de algunos intervalos abiertos (como el rojo) consisten de un intervalo abierto y un intervalo que no es abierto, asi que g no es continua.

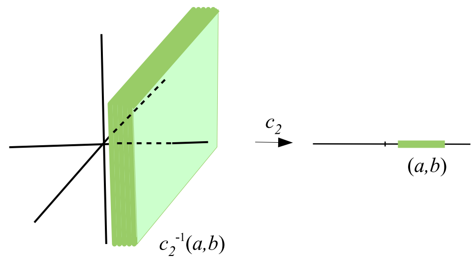




Lema. Si $f : X \to Y$ y $g : Y \to Z$ son funciones continuas entonces la composición $g \circ f : X \to Z$ es continua.

Demostración. Sea A un abierto de Z. Como g es continua, $g^{-1}(A)$ es un abierto de Y y como f es continua, $f^{-1}(g^{-1}(A))$ es un abierto en X. Como $f^{-1}(g^{-1}(A)) = (g \circ f)^{-1}(A)$, esto dice que $g \circ f$ es continua. $\bullet$

Ejemplo. En $\mathbb{R}^n$ las *funciones coordenadas* $c_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_i$ son funciones continuas, ya que la preimagen de cada intervalo abierto en $\mathbb{R}$ es un abierto en $\mathbb{R}^n$.



Lema. Una función $f : X \to \mathbb{R}^n$ es continua si y solo si sus funciones coordenadas son continuas.

Demostración. $\Rightarrow$ Sea $f = (f_1, f_2, \ldots, f_n)$. Si f es continua entonces cada f_i es continua porque es la composicion de f con la función coordenada c_i.

$\Leftarrow$ Sean $f_1, f_2, \ldots, f_n$ funciones continuas de X en $\mathbb{R}$. Para ver que $f = (f_1, f_2, \ldots, f_n)$ es una función continua de X en $\mathbb{R}^n$ basta ver que la imagen inversa de cada abierto de $\mathbb{R}^n$ es un abierto de X. Como los abiertos de $\mathbb{R}^n$ son uniones de abiertos de la forma $I_1 \times I_2 \times \cdots \times I_n$ (donde los I_i son intervalos abiertos), basta hacerlo para estos conjuntos. Pero $f^{-1}(I_1 \times I_2 \times \cdots \times I_n) = f_1^{-1}(I_1) \cap f_2^{-1}(I_2) \cap \cdots \cap f_n^{-1}(I_n)$ que es una intersección de abiertos ya que las f_i's son funciones continuas. $\bullet$

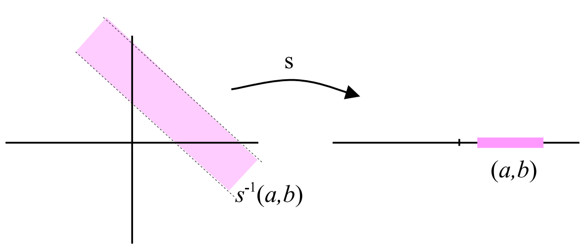
Lema. La suma y el producto de números reales son funciones continuas de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}$.

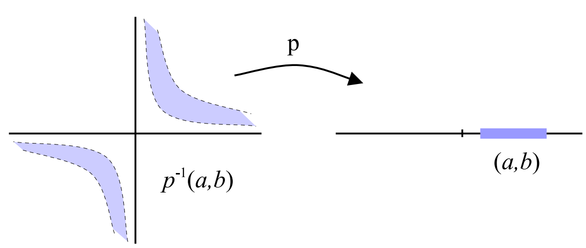
La inversión $i(x) = \frac{1}{x}$ es una función continua de $\mathbb{R} - \{0\}$ en $\mathbb{R} - \{0\}$.

Demostración.

1. Sean $s : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $s(x, y) = x + y$ y $p : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $p(x, y) = x \times y$. Para ver que s y p son continuas hay que ver que las imágenes inversas bajo s y p de cada abierto de $\mathbb{R}$ son abiertos de $\mathbb{R}^2$. Como cada abierto de $\mathbb{R}$ es unión de intervalos abiertos, basta considerar las imágenes inversas de intervalos abiertos. $s^{-1}(a, b) = \{(x, y)/a < x + y < b\}$ que es la franja del plano comprendida entre las líneas $x + y = a$ y $x + y = b$ y $p^{-1}(a, b) = \{(x, y)/a < xy < b\}$ que es la región del plano entre las hipérbolas $xy = a$ y$xy = b$.

2. Para ver que la función $i : \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R} - \{0\}$ dada por $i(x) = \frac{1}{x}$ es continua, basta ver que las imágenes inversas de intervales abiertos en $\mathbb{R} - \{0\}$ son abiertos en $\mathbb{R} - \{0\}$. Si el intervalo (a, b) no contiene al 0, su imagen inversa es el intervalo $(\frac{1}{b}, \frac{1}{a})$. $\bullet$





Lema. Si $f, g : X \to \mathbb{R}$ son funciones continuas, entonces $f + g$ y $f \times g$ son continuas y $\frac{1}{f}$ es continua en el subespacio de X donde está definida.

Demostración. Como f y g son continuas entonces la función $(f, g) : X\mathbb{R}^2$ que envía a cada punto x a la pareja $(f(x), g(x))$ es continua. La función $f + g : X \to \mathbb{R}$ es la composición de $(f, g) : X \to \mathbb{R}^2$ con la función suma $s : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Y la función $f \times g : X \to \mathbb{R}$ es la composición de (f, g) con la función producto $p : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, así que ambas funciones son continuas.

La función $\frac{1}{f}$ es la composición de la función f con la función $i(x) = \frac{1}{x}$, que está definida y es continua para $x \neq 0$, asi que $\frac{1}{f}$ está definida y es continua en el conjunto de puntos de X donde $f(x) \neq 0$. •

Ejemplos.

1. Los polinomios en n variables son funciones continuas de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}$, ya que son sumas de productos de las coordenadas, que son continuas.

2. Si $M_{n\times n}$ es el espacio de matrices reales de $n \times n$, entonces la función de $M_{n\times n}$ en $\mathbb{R}$ que a cada matriz le asocia su determinante es una función continua, ya que el determinante es un polinomio de las entradas de la matriz. Por ejemplo,

$$Det \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{bmatrix} = x_1y_2z_3 + x_2y_3z_1 + x_3y_1z_2 - x_3y_2z_1 - x_2y_1z_3 - x_1y_3z_2.$$

Convergencia y continuidad

Es mas fácil definir convergencia de sucesiones en espacios métricos usando solamente los abiertos. Las **vecindades** de un punto p en un espacio X son los abiertos de X que contienen a p. Decimos que una sucesión de puntos $p_1, p_2, p_3, ...p_n...$ en X **converge** a un punto p si cada vecindad de p contiene a *casi todos* los p_n's, es decir, a todos salvo un número finito de ellos. Esta definición es equivalente a la definición de convergencia en espacios métricos, que dice que para toda $\epsilon > 0$ existe un n_ϵ tal que para toda $n \geq n_\epsilon$, $d(p_n, p) < \epsilon$.

Afirmación. Una función entre espacios métricos $f : M \to N$ es continua si y solo si para cada sucesión de puntos en M que convergen a un punto x, la sucesión de sus imágenes convergen a $f(x)$.

Demostración. $\Rightarrow$ Supongamos que f es continua, asi que la imagen inversa de cada abierto de N es un abierto de M. Sea $x_1, x_2, x_3, ...x_n...$ una sucesión de puntos que converge a x en M. Para cada vecindad V de $f(x)$, su imagen inversa $f^{-1}(V)$ es un abierto de M que contiene a x. Como los x_n's convergen a x, los x_n's estn contenidos en $f^{-1}(V)$ a partir de algún n. Pero entonces los $f(x_n)$'s están contenidos en $f(f^{-1}(V)) = V$ a partir de algún n. Como esto vale para cualquier vecindad V de $f(x)$, la sucesión $f(x_1), f(x_2), f(x_3), ...$ converge a $f(x)$.

$\Leftarrow$ Supongamos que f no es continua, así que hay un abierto A de N tal que $f^{-1}(A)$ no es un abierto de M. Entonces $f^{-1}(A)$ contiene al menos un punto x en su frontera. Como toda vecindad de x contiene puntos de $M - f^{-1}(A)$, hay una sucesión de puntos $x_1, x_2, x_3, \ldots$ en $M - f^{-1}(A)$ que converge a x. Pero la sucesión de sus imágenes $f(x_1), f(x_2), f(x_3), \ldots$ no puede converger a $f(x)$ porque los $f(x_i)$ están en $f(M - f^{-1}(A)) = f(M) - A$ y por lo tanto no están en ninguna vecindad de x contenida en A. •

Problemas

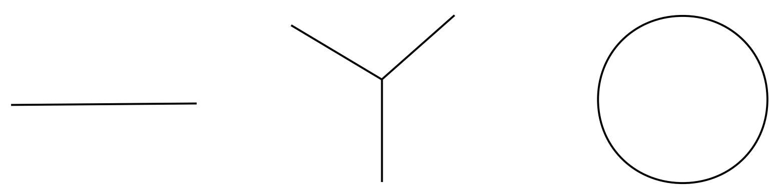
1. Demuestra que una función $f : X \to Y$ es continua si y sólo si la imagen inversa de cada cerrado de Y es un cerrado de X.

2. ¿Será cierto que las funciones continuas envían abiertos en abiertos? ¿Y cerrados en cerrados?

3. Demuestra que si $f : X \to Y$ es continua, las restricciones de f a los subespacios de X y a los subespacios de Y que contengan a sus imágenes son continuas.

4. Muestra que $f : X \to Y$ es continua si y solo si $f(Cl(A)) \subset Cl(f(A))$ para todo $A \subset X$.
   ¿Será cierto que $f(Cl(A)) = Cl(f(A))$?

5. Encuentra funciones continuas y suprayectivas que envíen a cada uno de los siguientes conjuntos en los otros.

   (muestra que las dos funciones que diste entre el intervalo y el círculo son realmente continuas)

6. Sea $M_{n\times n}$ el espacio de matrices reales de $n \times n$.
   a. Da varias funciones continuas de $M_{n\times n}$ en $M_{n\times n}$.
   b. Da varias funciones continuas de $M_{n\times n}$ en $\mathbb{R}$.

7. Sea $C(I)$ el espacio de funciones continuas de $[0, 1]$ en $[0, 1]$, con la métrica uniforme.
   a. Da algunas funciones continuas de $C(I)$ en $C(I)$.
   b. Da algunas funciones continuas de $C(I)$ en $\mathbb{R}$.
   c. Da algunas funciones continuas de $\mathbb{R}$ en $C(I)$.
   No es necesario demostrar que las funciones que den son continuas, solo convénzanse que lo son

8. * a. Da una función continua y suprayectiva de $[0, 1)$ en $\mathbb{R}$.
   b. Demuestra que no hay ninguna función continua y suprayectiva de $[0, 1]$ en $\mathbb{R}$.

9. * Considera la función $\phi : (0, 1)\times(0, 1) \to (0, 1)$ dada por $\phi(0.a_1a_2a_3..., 0.b_1b_2b_3...) = 0.a_1b_1a_2b_2a_3b_3....$
   ¿ϕ será continua? ¿ϕ tendrá inversa? ¿y será continua?