Homeomorfismos.

Un **homeomorfismo** de un espacio X a un espacio Y es una función continua $h : X \to Y$ que tiene inversa continua. Si existe una función así decimos que X es **homeomorfo** a Y.

Observaciones.

- Un homeomorfismo entre X y Y es una biyección entre los puntos de X y los puntos de Y que induce una biyección entre los abiertos de X y los de Y.
- Si X es homeomorfo a Y entonces cada subconjunto de X es homeomorfo al correspondiente subconjunto de Y.

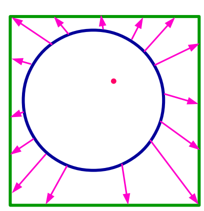
Lema. Ser homeomorfos es una relación de equivalencia entre espacios topológicos.

Demostración. La relación es reflexiva porque la identidad es un homeomorfismo de X a X, es simétrica porque si $h : X \to Y$ es un homeomorfismo, entonces $h^{-1} : Y \to X$ es un homeomorfismo, y es transitiva porque la composición de homeomorfismos es un homeomorfismo.

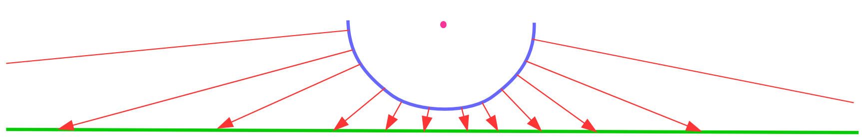
Si X y Y son homeomorfos diremos que X y Y tienen la misma **forma topológica** y escribimos $X \cong Y$. Observar que la forma topológica de un espacio solo depende de sus abiertos, ya que cualquier biyección entre dos espacios que preserva sus abiertos es un homeomorfismo.

Ejemplos:

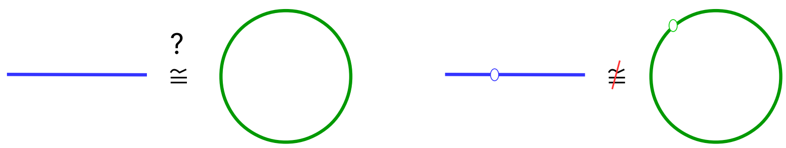
1. Un círculo es homeomorfo a un cuadrado: podemos dar un homeomorfismo dibujando el círculo dentro del cuadrado y proyectando desde un punto interior a los dos.



2. Todos los intervalos cerrados son homeomorfos.
3. Los intervalos abiertos son homeomorfos a $\mathbb{R}$: podemos dar un homeomorfismo doblando el intervalo abierto a un semicirculo y luego proyectando el semicirculo desde el centro hacia todo $\mathbb{R}$.



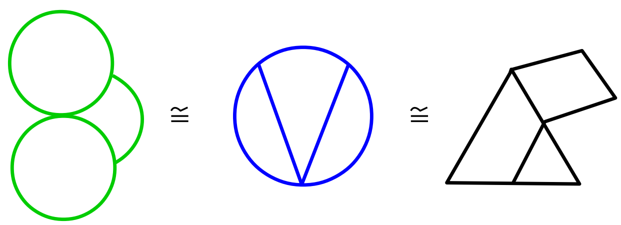
4. $\mathbb{R}$ no es homeomorfo al círculo S^1. Si lo fueran, $\mathbb{R}$ menos un punto y S^1 menos el punto correspondiente serían homeomorfos. Pero $\mathbb{R}$ menos un punto son dos intervalos abiertos, y S^1 menos un punto es homeomorfo a un intervalo abierto. Pero una función continua no puede mandar un intervalo en dos intervalos.



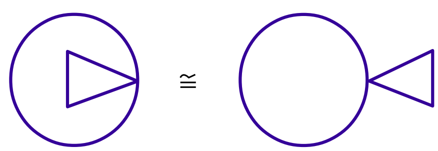
5. $\{1, 2, 3, 4 \ldots\}$ es homeomorfo a $\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots\}$: un homeomorfismo esta dado por $h(x) = \frac{1}{x}$ que es continua y biyectiva en $\mathbb{R} - \{0\}$, y su inversa es la misma función.

   Pero $\{0, 1, 2, 3, 4 \ldots\}$ no es homeomorfo a $\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots, 0\}$, ya que todos los subconjuntos de $\{0, 1, 2, 3, 4 \ldots\}$ son abiertos, y eso no sucede en $\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots, 0\}$.

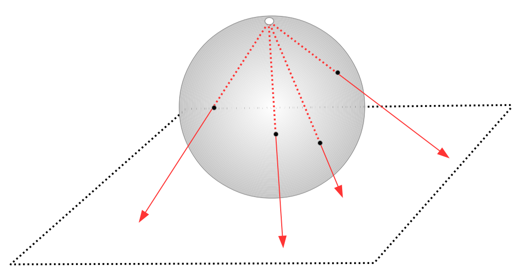
6. Estas tres graficas son homeomorfas:



7. Estas dos gráficas son homeomorfas, pero no existe ningún homomorfismo del plano en el plano que lleve una a la otra. (el homeomorfismo esta definido entre las gráficas, no en todo el plano)



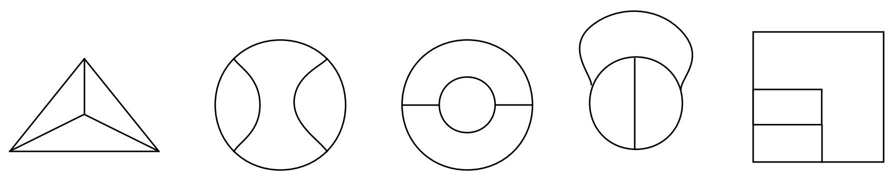
8. La esfera menos un punto es homeomorfa al plano. Un homeomorfismo está dado por la proyección estereográfica.



Problemas

1. Da un homeomorfismo entre una bola abierta en $\mathbb{R}^n$ y todo $\mathbb{R}^n$.

2. ¿Cuales de las siguientes gráficas serán homeomorfas?

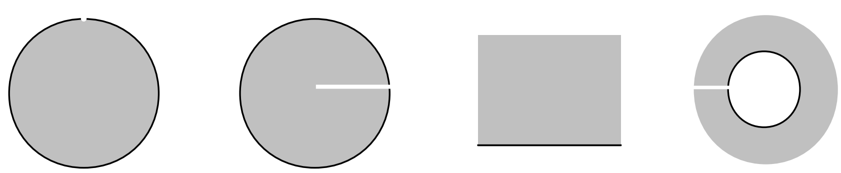


(Justifica tus respuestas sin entrar en detalles)

3. Demuestra que los intervalos $(0,1)$ y $[0,1]$ no son homeomorfos, pero que los intervalos racionales $(0,1)\cap\mathbb{Q}$ y $[0,1]\cap\mathbb{Q}$ sí son homeomorfos.

4. ¿Cuales de los siguientes subespacios del plano son homeomorfos?

   (Ojo: Los homeomorfismos estan definidos en los subespacios, no en todo el plano.)



5. Muestra que los siguientes espacios son homeomorfos:

   a. El espacio de matrices reales de 2x2 con determinante 1 y el espacio de matrices reales de 2x2 con determinante -1.

   b. El espacio de matrices reales no invertibles de 2x2 y la hipersuperficie de $\mathbb{R}^4$ definida por la ecuación $xy = zw$.

6. Da varios homeomorfismos del espacio de funciones continuas de $[0,1]$ en $[0,1]$ con la métrica uniforme en si mismo.

7. Muestra que cada subconjunto abierto de $\mathbb{R}^2$ es homeomorfo a un subconjunto cerrado de $\mathbb{R}^3$.

8. Muestra que hay subconjuntos cerrados en $\mathbb{R}^n$ que son homeomorfos a subconjuntos que no son cerrados en $\mathbb{R}^n$. (El teorema de invariancia de los dominios dice que los subconjuntos abiertos de $\mathbb{R}^n$ *no* pueden ser homeomorfos a subconjuntos que no son abiertos en $\mathbb{R}^n$).

9. Si X y Y son dos espacios tales que existen funciones $f : X \to Y$ y $g : Y \to X$ continuas y biyectivas ¿será cierto que X y Y son homeomorfos?