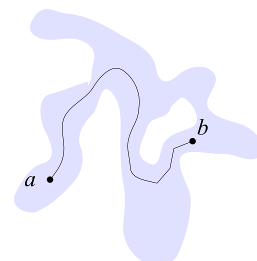
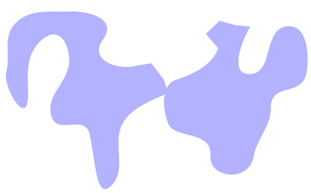
# Conexidad

Hay dos maneras naturales de pensar que un espacio $X$ es ”de una sola pieza”: Una es que sea posible çaminar”por $X$ para llegar desde cualquier punto a cualquier otro. La otra es pensar que $X$ no es la unión de dos subconjuntos que están ”separados”. Estas dos ideas dan lugar a dos nociones distintas de conexidad.

Si $a$ y $b$ son dos puntos de un espacio $X$, un **camino** de $a$ a $b$ es una función continua $\alpha : [0, 1] \to X$ tal que $\alpha(0) = a$ y $\alpha(1) = b$.




Decimos que un espacio $X$ es conexo por caminos o **arcoconexo** si para cada par de puntos $a$ y $b$ en $X$ hay un camino en $X$ que va de $a$ a $b$,



Dos subconjuntos $A$ y $B$ de un espacio $X$ están *separados* si ningun punto de $A$ está en la cerradura de $B$ y ningun punto de $B$ está en la cerraura de $A$. Así que si $X$ es la unión de dos subconjutntos separados $A$ y $B$ entonces $Cl_X(A) = A$ y $Cl_X(B) = B$, así que $A$ y $B$ son cerrados y por lo tanto también son abiertos en $X$.

Diremos que un espacio $X$ es **conexo** si no es la unión de 2 subconjuntos abiertos, ajenos y no vacíos. Esto equivale a decir que los únicos subconjuntos de $X$ que son simultáneamente abiertos y cerrados en $X$ son $\emptyset$ y $X$ y también es equivalente a que los únicos subconjuntos de $X$ que tienen frontera vacía son $\emptyset$ y $X$.

**Lema**. $\mathbb{R}$ es conexo.

*Demostración.* Supongamos que $\mathbb{R} = A \cup B$ con $A$ y $B$ abiertos ajenos no vacíos de $\mathbb{R}$. Tomemos $a \in A$ y sea (c,d) la unión de todos los intervalos abiertos que contienen a $a$ y están contenidos en $A$. Si $d < \infty$ entonces $d$ es un punto en la frontera de $A$ y de $B$. Pero si $d \in A$ entonces $A$ no es abierto y si $d \in B$ entonces $B$ no es abierto, lo que es una contradicción. Así que $d = \infty$. Un argumento similar muestra que $c = -\infty$ así que $A = \mathbb{R}$ y $B = \emptyset$. •

**Lema**. $\mathbb{R}^{\ltimes}$ es arcoconexo para toda $n > 0$.

*Demostración.* Dados dos puntos $p = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ y $q = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ en $\mathbb{R}^n$, podemos dar un camino en linea recta de $p$ a $q$ definiendo $\alpha(t) = (1-t)p + tq = ((1-t)x_1 + ty_1, (1-t)x_2 + ty_2, \ldots (1-t)x_n + ty_n)$. •

**Lema**. Los espacios arcoconexos son conexos.

*Demostración.* Supongamos que $X$ no es conexo. Entonces $X = A \cup$B con $A$ y $B$ abiertos ajenos no vacíos de $X$. Si existiera un camino $\alpha : [0, 1] \to X$ que une a un punto de $A$ con un punto de $B$ entonces $\alpha^{-1}(A)$ y $\alpha^{-1}(B)$ serían dos abiertos ajenos y no vacíos de [0,1] cuya unión es [0,1]. Pero esto diría que [0,1] no es conexo. •

El reciproco no es cierto: existen muchos espacios conexos que no son arcoconexos, ver el ejemplo al final.

*Ejemplos.*

1. $\mathbb{R}^n$ es conexo para toda $n > 0$ ya que es arcoconexo.
2. El espacio de matrices reales de 2x2 es arcoconexo y por lo tanto es conexo.
   Si $A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{bmatrix}$ entonces las matrices $M(t) = (1-t)A + tB = \begin{bmatrix} (1-t)a_1 + tb_1 & (1-t)a_2 + tb_2 \\ (1-t)a_3 + tb_3 & (1-t)a_4 + tb_4 \end{bmatrix}$ forman un camino de $A$ a $B$.
3. El espacio de las funciones de $[0,1]$ en $[0,1]$ con la métrica del supremo es arcoconexo. Para verlo hay que mostrar que dos funciones $f_0$ y $f_1$ pueden unirse con un camino de funciones $f_t$ de $f_0$ a $f_1$. El camino mas directo está dado por las combinaciones lineales $f_t(x) = (1-t)f_0(x) + tf_1(x)$.

**Lema**. Las funciones continuas envían conexos en conexos y arcoconexos en arcoconexos.

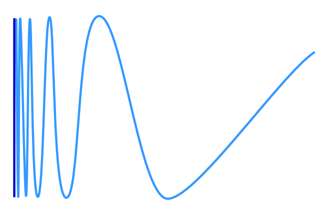
*Demostración.* Sea $f : X \to Y$ continua, y sea $S \subset X$ conexo. Si $f(S)$ no es conexo entonces $f(S) = A \cup B$ con $A$ y $B$ abiertos ajenos no vacíos de $f(X)$. Como $f|_S : S \to f(S)$ es continua, $f^{-1}(A)$ y $f^{-1}(B)$ son abiertos (ajenos y no vacíos) de $S$, lo que contradice que $S$ sea conexo.

Supongamos ahora que $X$ es arcoconexo y sean $y_1$ y $y_2$ dos puntos de $f(X)$. Entonces $y_1 = f(x_1)$ y $y_2 = f(x_2)$. Si $\alpha : [0,1] \to X$ es una trayectoria de $x_1$ a $x_2$ entonces $f \circ \alpha : [0,1] \to Y$ es una trayectoria de $y_1$ a $y_2$. •

**Lema**. Si $S$ es un subconjunto conexo de $X$, entonces $Cl(S)$ es conexo.

*Demostración.* Supongamos que $S$ es conexo pero que $Cl(S)$ no lo es. Entonces $Cl(S) = A \cup B$ con $A$ y $B$ cerrados ajenos no vacíos de $Cl(S)$, así que $A \cap S$ y $B \cap S$ son cerrados ajenos de $S$. Como $S = (A \cap S) \cup (B \cap S)$, si $A \cap S$ y $B \cap S$ fueran no vacíos entonces $S$ no sería conexo. Por lo tanto $S$ está contenido en $A$ o en $B$, que son cerrados en $X$ y por lo tanto $Cl(S)$ está contenido en $A$ o $Cl(S)$ está contenido en $B$, pero entonces $B$ o $A$ son vacíos, contradicción. •

*Ejemplo.* Sea $= \{(x, sen(1/x))/x \in (0,1]\}$. $S$ es conexo porque es la imagen del intervalo $(0,1]$ bajo la función continua $f(x) = (x, 1/x)$. Asi que $Cl(S)$ que es la unión de $S$ con el intervalo $\{(0,y)/y \in [-1,1]\}$ es conexo. Pero $Cl(S)$ no es arcoconexo porque no hay caminos de los puntos de $S$ a los puntos del intervalo.



Este ejemplo muestra que la cerradura de un subespacio arcoconexo no es necesariamente arcoconexa.

Tarea 5

1. La **esfera de dimensión** $n$ es el espacio $\mathbb{S}^n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} /\ x_1^2+x_2^2+\cdots+x_{n+1}^2 = 1\}$. Demuestra que $\mathbb{S}^n$ es arcoconexa, y por lo tanto conexa.

   Hint: ve que $\mathbb{R}^{n+1}$-$\{\bar{0}\}$ es arcoconexo, y que los caminos en $\mathbb{R}^{n+1}$-$\{\bar{0}\}$ se pueden proyectar a caminos en $\mathbb{S}^n$.

2. Muestra que si un espacio $X$ es la unión de subespacios conexos y uno de ellos intercecta a todos los demás, entonces $X$ es conexo.

3. Muestra que si $A$ es un subconjunto conexo de un espacio $X$, entonces cada subconjunto $B$ de $X$ tal que $A \subset B \subset Cl_X(A)$ es conexo.

4. Cuales de estos subespacios de $\mathbb{R}^2$ son conexos?
   a. El de los puntos con las dos coordenadas racionales.
   b. El de los puntos con al menos una coordenada racional.
   c. El de los puntos con exactamente una coordenada racional.

5. Muestra que todo abierto conexo de $\mathbb{R}^n$ es arcoconexo (esto no es cierto para cerrados!).

6. Muestra que si $X$ es un subconjunto disconexo de $\mathbb{R}^n$, de modo que $X$ es la unión de dos subconjuntos separados $A$ y $B$, entonces existen dos abiertos ajenos de $\mathbb{R}^n$ que contienen a $A$ y a $B$. Ojo: la distancia entre dos conjuntos "separados"de $\mathbb{R}^n$ puede ser 0

7. ¿Cuales de estos subespacios del espacio de matrices reales de 2 por 2 son conexos?
   a. El de las matrices diagonales.
   b. El de las matrices invertibles.
   c. El de las matrices no invertibles.

8. ¿Cuales de estos subespacios del espacio de funciones de $[0, 1]$ en $[0, 1]$ (con la metrica uniforme) son arcoconexos?
   a. El espacio de funciones continuas.
   b. El espacio de funciones diferenciables.
   c. El espacio de funciones biyectivas.

   (Dadas dos funciones en un subespacio hay que ver si hay un camino entre ellas que no se salga de ahi)

9. ¿Será cierto que si una función $f : X \to Y$ envia subconjuntos conexos de $X$ en subconjuntos conexos de $Y$ entonces $f$ es continua?