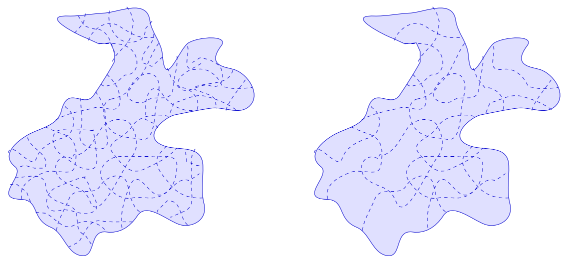
Compacidad

Podemos pensar que un espacio X es pequeño si todo subconjunto infinito de X tiene algún punto de acumulación en X. También podemos pensar que X es pequeño si siempre que cubrimos a X con subconjuntos abiertos, hay una cantidad finita de ellos que ya lo cubren.

Una **cubierta abierta** de X es una familia $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ de abiertos de X cuya unión cubre a X. Una subcubierta es una subfamilia $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A'\subset A}$ cuya unión aún cubre a X.



Diremos que X es **compacto** si toda cubierta abierta de X tiene una subcubierta finita.

Ejemplos:

1. Los espacios con una cantidad finita de puntos son compactos: para cada cubierta abierta podemos elegir una subcubierta formada por un abierto por cada punto.

2. $\mathbb{R}$ no es compacto, ya que la familia de intervalos abiertos $\{(-n,n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ cubre a $\mathbb{R}$, pero ninguna subfamilia familia finita lo puede cubrir.

3. $A = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots\}$ no es compacto: $\{\{\frac{1}{n}\}\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una cubierta abierta de A que no tiene subcubiertas finitas. $\{\{1, \frac{1}{2}, \ldots \frac{1}{n}\}\}_{n\in\mathbb{N}}$ es otra cubierta abierta de A sin subcubiertas finitas.

4. $\bar{A} = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, ..., 0\}$ si es compacto: Dada una cubierta abierta $\{U_\alpha\}$ de $\bar{A}$, existe un abierto U_{α_0} que contiene a 0. U_{α_0} contiene a todos los puntos de $\bar{A}$ en una vecindad de 0, quedando solo un número finito de puntos de $\bar{A}$ por cubrir. Cada uno de estos puntos está contenido en algún U_{α_i}, y la unión de estos con U_{α_0} cubre a $\bar{A}$.

Lema. Los intervalos cerrados en $\mathbb{R}$ son compactos.

Demostración. Sea $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ una cubierta abierta del intervalo $[a,b]$. Considera el conjunto de puntos $c\in[a,b]$ tales que $[a,c]$ puede cubrirse por una cantidad finita de $U_\alpha's$ y sea s el supremo de ese conjunto. Si $s<1$ entonces s está cubierto por un abierto U_β y ese abierto contiene un intervalo $(s-\epsilon, s+\epsilon)$ alrededor de s. Como $s-\epsilon$ es menor que el supremo, el intervalo $[0,s-\epsilon]$ puede cubrirse con un número finito de $U_\alpha's$. Pero entonces el intervalo $[0,s+\epsilon/2]$ también puede cubrirse por un numero finito de abiertos (los que cubren a $[0,s-\epsilon]$ y el que contiene al intervalo $(s-\epsilon,s+\epsilon)$) lo que implica que s no es el supremo de C. Así que $s=1$ y $[0,1]$ puede cubrirse con un número finito de $U_\alpha's$. •

Los intervalos abiertos no son compactos ya que son homeomorfos a $\mathbb{R}$.

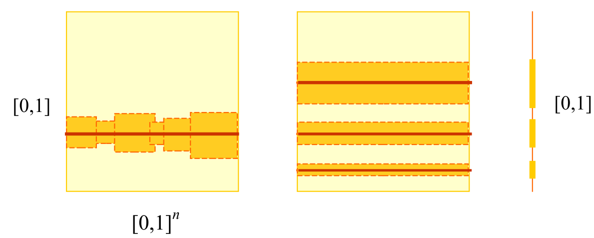
Lema. Las funciones continuas envían compactos en compactos.

Demostración. Sea X compacto y sea $f : X \to Y$ continua y suprayectiva. Queremos ver que Y es compacto. Si $\{U_\alpha\}$ es una cubierta abierta de $f(X)$ entonces como f es continua, $\{f^{-1}(U_\alpha)\}$ es una cubierta abierta de X. Como X es compacto, esta cubierta tiene una subcubierta finita, $X = f^{-1}(U_{\alpha_1}) \cup ... \cup f^{-1}(U_{\alpha_n})$. Por lo tanto, como f es suprayectiva, $Y = f(X) = f(f^{-1}(U_{\alpha_1})) \cup ... \cup f(f^{-1}(U_{\alpha_n})) = U_{\alpha_1} \cup ... \cup U_{\alpha_n}$. Así que $\{U_\alpha\}$ tiene una subcubierta finita. •

Para ver que una cubierta $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ de X tiene una subcubierta finita, podemos reemplazarla por otra cubierta $\{V_\beta\}_{\beta \in B}$ tal que cada V_β está contenido en algún U_α, ya que si hallamos una subcubierta finita $V_{\beta_1} \cup ... \cup V_{\beta_n}$, entonces los U_α's que los contienen forman una subcubierta finita $U_{\alpha_1} \cup ... \cup U_{\alpha_n}$.

Lema. El cubo $[0,1]^n \subset \mathbb{R}^n$ es compacto.

Demostración. Por inducción sobre n. Ya probamos el resultado cuando $n = 1$. Supongamos ahora que $[0,1]^n$ es compacto y mostremos que $[0,1]^{n+1}$ también lo es. Tomemos una cubierta abierta de $[0,1]^{n+1}$. Como los abiertos de $\mathbb{R}^{n+1}$ son uniones de cubos abiertos de dimensión $n+1$, entonces por la observación anterior basta ver el caso en que la cubierta de $[0,1]^{n+1}$ está formada por cubos abiertos. En $[0,1]^{n+1} = [0,1]^n \times [0,1]$ cada *rebanada* $[0,1]^n \times \{t\}$ es una copia de $[0,1]^n$, que es compacto y está cubierto por las intersecciones de los cubos de dimensión $n+1$ con la rebanada, así que cada rebanada está cubierta por un número finito de estos cubos.



Si consideramos las distancias de la rebanada a las tapas de los cubos que la cubren y tomamos la menor de ellas vemos que alrededor de cada rebanada hay una vecindad $[0,1]^n \times (t - \epsilon, b + \epsilon)$ cubierto por un número finito de cubos abiertos. Ahora los intervalos abiertos $(t - \epsilon, b + \epsilon)$ correspondientes a las vecindades de todas las rebanadas forman una cubierta abierta del intevalo vertical [0,1], que es compacto, por lo que una cantidad finita de vecindades cubren a todo $[0,1]^n \times [0,1]$, y por lo tanto hay una cantidad finita de cubos abiertos que cubren a $[0,1]^{n+1}$. •

Lema. Los subconjuntos cerrados de un espacio compacto son compactos.

Demostración. Sean X compacto y $C \subset X$ cerrado en X. Si $\{U_\alpha\}$ es una cubierta abierta de C, entonces $U_\alpha = V_\alpha \cap C$ con V_α abierto en X. Entonces $\{V_\alpha\} \cup X - C$ es una cubierta abierta de X. Como X es compacto la cubierta tiene una subcubierta finita formada por algunos $V_\alpha' s$ y quizas $X - C$. Los $U_\alpha' s$ correspondientes a estos $V_\alpha' s$ forman una subcubierta finita de C. •

Corolario. Un subconjunto de $\mathbb{R}^n$ es compacto si y solo si es cerrado y acotado.

Demostración.

$\Leftarrow$ Si $A \subset \mathbb{R}^n$ es cerrado y acotado entonces A es homeomorfo a un subconjunto cerrado de $[0,1]^n$, que es compacto.

$\Rightarrow$ Hay que ver que si A no es cerrado o no es acotado entonces A tiene una cubierta abierta sin subcubiertas finitas (Tarea). •

Corolario. Si X es un espacio compacto, entonces cada función continua $f : X \to \mathbb{R}$ alcanza un valor mínimo y un valor máximo.

Demostración. La imagen de f es un compacto C en $\mathbb{R}$. C debe ser acotado y cerrado en $\mathbb{R}$, por lo tanto C tiene supremo e ínfimo y ambos están en el conjunto •

Ejemplos:

1. El conjunto $A = \{(x, y, z) \ / \ x^2 + y^4 + z^6 = 1\}$ es cerrado y acotado en $\mathbb{R}^3$, ya que A es la imagen inversa de un cerrado bajo una función continua y los puntos de A tienen coordenadas con valos absoluto menor o igual a 1. Así que A es compacto.

2. El conjunto $B = \{(x, y, z) \ / \ x + y^3 + z^5 = 1\}$ es cerrado pero no es acotado en $\mathbb{R}^3$ ya que hay puntos de B con coordenadas arbitrariamente grandes. Así que B no es compacto.

Lema. Un espacio métrico X es compacto si y solo si cada subconjunto infinito en X tiene un punto de acumulación en X.

Demostración.

$\Rightarrow$ Si un subconjunto infinito A de X no tiene puntos de acumulación entonces a es cerrado en X y cada punto a de A tiene una vecindad V_a que no contiene otros puntos de A. Entonces los $\{V_a\}$ junto con $\{X - A\}$ forman una cubierta abierta de X que no tiene subcubiertas finitas (cualquier subcubierta debe contener a todos los V_a's). Así que X no es compacto.

$\Leftarrow$ Supongamos ahora que X no es compacto. Entonces X tiene una cubierta abierta $\{U_\alpha\}$ sin subcubiertas finitas. Para cada $x \in X$ sea ϵ_x el supremo de los radios de las bolas centradas en x y contenidas en algún abierto de la cubierta. Entonces hay un abierto U_{a_x} de la cubierta que contiene una bola centrada en x de radio al menos $\frac{1}{2}\epsilon_x$. Sea x_1 cualquier punto de X, sea x_2 cualquier punto de X que no esté en U_{x_1} y en general sea x_{n+1} cualquier punto de X que no está en la unión de $U_{x_1}, U_{x_2}, ..., U_{x_n}$ (como la cubierta no tiene subcubiertas finitas esta unión no puede ser todo X). Veamos que $\{x_1, x_2, ..., x_n, ...\}$ no tiene puntos de acumulación. Si la tuviera, las distancias entre los puntos de la subsucesión se aproximarían a 0 y como la distancia de x_m a x_n para $m < n$ es al menos $\frac{1}{2}\epsilon_{x_m}$ entonces los ϵ_{xi} tenderían a 0. Pero si los $x_i's$ se aproximan al punto x, los ϵ_{xi} se aproximan a ϵ_x, que no es 0. •

Ejemplos.

1. El espacio de todos los círculos en el plano, con la métrica $d(C_r(p), C_s(q)) = max\{d(p, q), |r - s|\}$ no es compacto, ya que hay muchas sucesiones de círculos que no se acumulan en ningún círculo (por ejemplo, sucesiones de círculos de radio 1 cuyos centros se alejan cada vez mas, o sucesiones de círculos con el mismo centro cuyos radios se aproximan a 0.

2. $[0, 1]^\infty$ (el espacio de las sucesiones con valores entre 0 y 1 con la métrica del supremo) no es compacto, ya que el conjunto de sucesiones $\{(1, 0, 0, 0, 0, ...), (0, 1, 0, 0, 0, ...), (0, 0, 1, 0, 0, ...), \ldots\}$ es infinito y no se acumula en ninguna sucesión, porque las sucesiones del conjunto están a distancia 1 entre ellas, asi que no puede haber dos de ellas a distancia menor que 1/2 de ninguna otra sucesión.

Problemas

1. Cuáles de estos espacios son compactos?

   a) Los intervalos cerrados en $\mathbb{Q}$.

   b) La esfera n-dimensional $\mathbb{S}^n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \ / \ x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{n+1}^2 = 1\}$.

   c) El espacio de las matrices reales de 2x2 con determinante 1.

   d) El espacio de las *matrices ortogonales* de 2 x 2.

   e) *El espacio de funciones continuas de [0,1] en [0,1] con la metrica uniforme.

2. Demuestra que los subconjuntos compactos de un espacio métrico son cerrados y acotados.

3. Muestra que un espacio métrico X es compacto si solo si toda función continua f :X$\rightarrow \mathbb{R}$ es acotada.

4. Si X y Y son subconjuntos de un espacio métrico, la **distancia** entre X y Y es el ínfimo de las distancias entre puntos de X y puntos de Y.

   a) Muestra que hay cerrados *ajenos* en el plano cuya distancia es 0.

   b) Muestra que la distancia entre compactos ajenos en un espacio métrico siempre es mayor que 0.

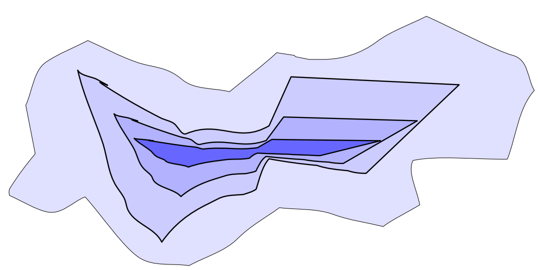
5. Muestra que si X es un espacio métrico compacto y $\{A_\alpha\}$ es una colección de abiertos que lo cubren, entonces existe $\epsilon > 0$ tal que cada bola de radio ϵ y centro en X está totalmente contenida en algún A_α (ϵ es el *número de Lebesgue* de la cubierta).

6. Decimos que los conjuntos $X_1, X_2, X_3, \ldots$ están *anidados* si $X_1 \supset X_2 \supset X_3 \supset \cdots \supset X_n \supset$ ....

   a) Muestra que si los X_i's son compactos no vacíos anidados en un espacio métrico, entonces la intersección de todos no es vacía,

   b) Muestra que si los X_n s son compactos y conexos, entonces la intersección de todos es conexa.

   c) Muestra que a. y b. pueden fallar si los X_i's no son compactos.



7. Prueba que si X y Y son espacios métricos, X es compacto y $f : X \to Y$ es continua y biyectiva, entonces f es un homeomorfismo. Muestra que esto no tiene que ocurrir si X no es compacto.