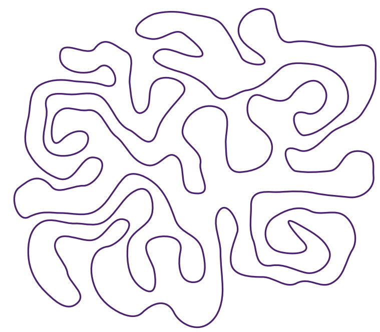
El Teorema de Jordan-Schoenflies

Ahora estudiaremos algo de topología del plano $\mathbb{R}^2$. Recordemos que el **disco** unitario es el conjunto $D^2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 \leq 1\}$ y el **círculo** unitario es el conjunto $S^1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 = 1\}$.

Una **curva simple cerrada** es la imagen de S^1 bajo una función continua e inyectiva. Es facil ver que las curvas simples cerradas son homeomorfas a S^1.

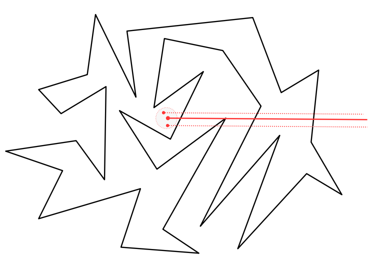
Observar que existen subconjuntos homeomorfos del plano cuyos complementos no son homeomorfos. Por ejemplo, $(0,1) \times \{0\}$ es homeomorfo a $\mathbb{R} \times \{0\}$, pero el complemento del intervalo en el plano no es homeomorfo al complemento de la recta. El teorema de Jordan-Schoenflies dice que los subconjuntos del plano homeomorfos a S^1 tienen complementos homeomorfos al complemento de S^1.

Teorema de Jordan-Schoenflies: Cada curva simple cerrada divide al plano en 2 abiertos conexos, uno es homeomorfo a un disco abierto y el otro es homeomorfo a un anillo.



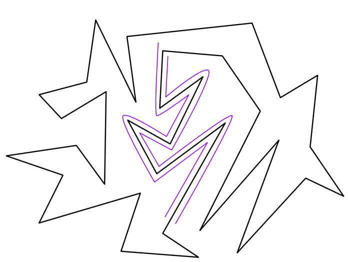
Este es un resultado profundo con aplicaciones en varias ramas de las matemáticas. Podría parecer obvio, pero su demostración es muy delicada. Primero la haremos para las curvas poligonales (formadas por un número finito de segmentos de recta).

Lema 1. Si c es una curva simple cerrada poligonal, $\mathbb{R}^2 - c$ tiene al menos 2 componentes conexas.



Demostración. Elige una dirección en el plano distinta de las direcciones de los lados del polgono. Para cada punto p de $\mathbb{R}^2 - c$, cuenta el número de veces que el rayo que sale de p en esa dirección cruza a c, módulo 2. Esto define una función $f : \mathbb{R}^2 - \{c\} \to [0,1]$. Esta función es continua ya que para todos los puntos en una bolita centrada en p que no toque a c, el número de veces que los rayos cruzan a c difieren en un número par, por lo tanto f es igual en todos esos puntos. Pero al cruzar la curva el valor de la función cambia de 0 a 1 y de 1 a 0, así que el dominio de f no puede ser conexo, ya que si lo fuera su imagen seria conexa. •

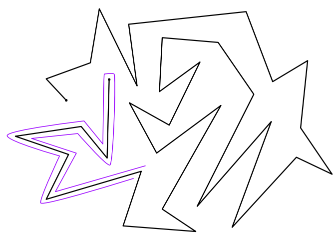
Lema 2. Si c es una curva simple cerrada poligonal, $\mathbb{R}^2 - c$ tiene a lo mas 2 componentes conexas.



Demostración. Considera la 'vecindad regular' V de c formada por los puntos del plano a distancia a lo mas r de c, para un ϵ menor que la mitad de la distancias entre los vértices del polígono y los lados que no los contienen. Localmente $Fr(V)$ está formada por dos paralelas a c, as que $Fr(V)$ tiene a lo mas 2 componentes conexas. Para cada punto p de $\mathbb{R}^2 - c$, hay una trayectoria que va de p a un punto de $Fr(V)$ sin pasar por c (ya que podemos ir en línea recta de p a c y detenernos en el primer punto de $Cl(V)$), así que $\mathbb{R}^2 - c$ tiene a lo mas tantas componentes conexas como $Fr(V)$. Pero $Fr(V)$ tiene a lo mas dos componentes, ya que si empezamos en un punto q de la frontera y la seguimos a todo lo largo de la curva, debemos regresar a q o al punto q^* que está frente a q pero del otro lado de c. Así que todos los puntos de la frontera se pueden conectar a q o a q^*. •

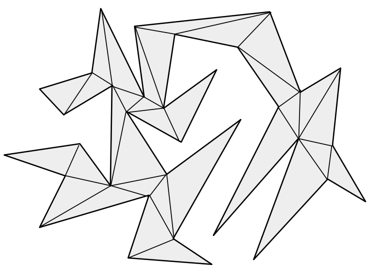
Un **arco simple** es la imagen de un intervalo cerrado bajo una función continua e inyectiva.

Lema 3. Si a es un arco simple poligonal, entonces $\mathbb{R}^2 - a$ es conexo.



Demostración. Considera la 'vecindad regular' V de a formada por los puntos del plano a distancia a lo mas ϵ de a, para un ϵ menor que la mitad de la distancias entre los vértices del polígono y los lados que no los contienen. Localmente $Fr(V)$ se ve como dos curvas paralelas a c, excepto en los puntos finales de a, donde se unen. Como hay una trayectoria que va de cada punto de $\mathbb{R}^2 - c$ a un punto de $Fr(V)$ sin pasar por c (viajar directamente de p a c y detente en el primer punto de V), y $Fr(V)$ es conexa, entonces $\mathbb{R}^2 - c$ es conexa. •

Lema 4. Si c es una curva simple cerrada poligonal, la región del plano encerrada por c se puede triangular (es la unión de triángulos que se intersectan en lados completos y/o vértices)



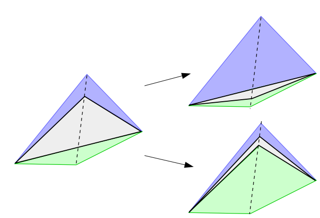
Demostración. Esto es inmediato si la región es convexa. Cuando la región no es convexa hay que tener cuidado porque los segmentos que unen a dos vertices no adyacentes pueden salirse de la región. Una manera sencilla de hacerlo es observar que las rectas que contienen a los lados de c dividen al plano en polígonos convexos, que pueden dividirse en triángulos, y la región encerrada por c es la unión de algunos de estos polígonos. Estas triangulaciones tienen muchos vértices, pero hay triangulaciones donde los únicos vertices son los de la curva original. Para mostrarlo basta ver que cada curva poligonal c tiene al menos una diagonal que no se sale de la región encerrada por c, y proceder por inducciónnducción sobre el numero de lados (tarea). •

Lema 5. Cualquier triangulación de la región acotada por una curva simple cerrada poligonal c que no es un triángulo tiene triángulos "libres" que intersectan a c en un lado o en dos lados completos.

Demostración. Por inducción sobre el número de lados de c. Si c es un cuadrilátero los dos triángulos son libres. Supongamos que cada triangulación de la región acotada por una curva poligonal con mas de 3 y menos de n lados tiene 2 triángulos libres y consideremos la triangulación de la region R acotada por una curva c con $n+1$ lados. Si un triángulo Δ de la triangulación no es libre, entonces uno de sus lados cruza a R y la divide en dos regiones R_1 y R_2 bordeadas por curvas con menos lados. Entonces R_1 es un triángulo o tiene al menos 2 triángulos libres, y lo mismo ocurre para R_2. En el primer caso el triángulo R_i es libre en R, en el segundo, a lo mas uno de los triángulos libres de R_i esta pegado con R_j, y el otro es libre en R. •

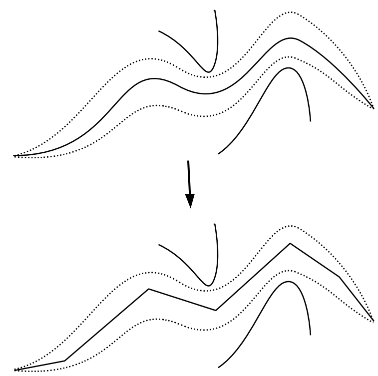
Lema 6. Si c es una curva simple cerrada poligonal en el plano, entonces existe un homeomorfismo de todo el plano que convierte a c en un triángulo.

Demostración. Por inducción sobre el número de triángulos en la región acotada por c. Veremos que hay un homomorfismo del plano que envía a c a una curva c' que bordea una región formada por menos triángulos. Si T es un triángulo libre, hay un cuadrilátero Q que contiene a T y tal que $Q \cap c = T \cap c$. Es facil definir un homomorfismo (lineal por pedazos) $h : Q \to Q$ que es la identidad en $Fr(Q)$ y tal que $h(T) \subset R - T$, y este homeomorfismo se extiende al resto del plano como la identidad. •



Ahora podemos probar el teorema para las curvas suaves (curvas que en cada punto tienen una dirección bien definida, que varía de manera continua al cambiar el punto):

Lema 7. Si c es una curva simple cerrada suave, entonces existe un homomorfismo del plano que la transforma en una curva poligonal.



Demostración. Si la curva c es suave entonces cada punto de c tiene una vecindad donde c es la gráfica de una función $y = f(x)$ o $x = f(y)$. Como c es compacta, c se puede partir en un número finito de arcos $a_1, a_2, ...a_n$ con esta propiedad. Veremos que para cada a_i existe un homomorfismo h_i del plano tal que $h_i(a_i)$ es un arco poligonal y h_i es la identidad en $c - a_i$, de modo que la composición de los h_i's convierte a cada a_i en un arcos poligonal, así que convierte a c en una curva poligonal.

El arco a_i es la gráfica de una función diferenciable, digamos $y = f(x)$ para $a \leq x \leq b$. Elegir funciones diferenciables g y h, $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ que coincidan con $f(x)$ solo en a y b y tales que si R es la región del plano definida por $g(x) \leq y \leq g(x)$. entonces $R \cap c = a_i$. Entonces existe una función lineal por pedazos l con $g(x) \leq l(x) \leq h(x)$ que coincide con g y h solo en a y b y hay un homeomorfismo $h : R \to R$ que es la identidad en $Fr(R)$ y tal que $h(a_i)$ es el arco poligonal $l(a_i)$. El homeomorfismo h_i se puede extender al resto del plano como la identidad, y la composición de los h_i's es un homeomorfismo del plano que convierte a c en una curva poligonal. •

Teorema 9. Si c es una curva simple cerrada suave en el plano, entonces existe una deformación del plano que la convierte en un círculo.

Demostración. Los resultados anteriores muestran que c se puede deformar primero a una curva simple cerrada poligonal, y que esta se puede deformar a un triángulo. Basta entonces observar que un triángulo se puede deformar a un círculo. •

El siguiente lema es muy simple pero tiene muchas aplicaciones:

Lema de Alexander. Cada homeomorfismo de S^1 en S^1 puede extenderse a un homeomorfismo de D^2 en D^2.

Demostración. Dado cualquier homeomorfismo $h : S^1 \to S^1$ podemos definir $H : D^2 \to D^2$ en los círculos centrados en 0 que forman a D^2 como $H(x) = |x|h(\frac{x}{|x|})$ si $|x| \neq 0$ y $H(0) = 0$. H manda cada círculo centrado en 0 en un círculo del mismo radio, así que como h es biyectiva entonces H también lo es. H es continua en $D^2 - \{0\}$ porque x es una función continua de x en $D^2 - \{0\}$, asi que la división $\frac{x}{|x|}$ es continua y el producto $|x|h(\frac{x}{|x|})$ es continuo. Y H es continua en 0 porque envía el disco de radio ϵ centrado en 0 al mismo disco. La inversa de H es la función $H^{-1}(x) = |x|h^{-1}(\frac{x}{|x|})$ si $|x| \neq 0$ y $H^{-1}(0) = 0$ que es continua por el mismo argumento aplicado a h^{-1}. •

Problemas

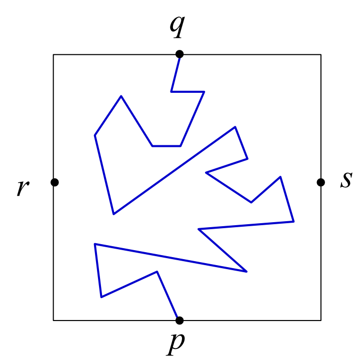
1. ¿En cuantas partes dividen al plano n curvas simples cerradas poligonales ajenas? Justifica tu respuesta.
2. ¿En cuantas partes divide al plano una curva cerrada poligonal con i intersecciones? Justifica tu respuesta.
3. Muestra que si c y c' son curvas simples cerradas poligonales y c' está contenida en la componente acotada de c, entonces c y c' son el borde de una región homeomorfa a un anillo. (usa el lema de Alexander)
4. Demuestra que ningún arbol poligonal divide al plano.

Ahora probaremos el Teorema de Jordan-Schoenflies para todas las curvas simples cerradas.

Teorema de Jordan: Cada curva simple cerrada divide al plano en 2 componentes conexas, de las que es frontera comun.

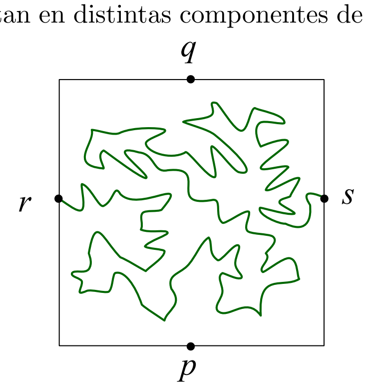
Lema 10. Si **A** es un arco *poligonal* en el rectángulo **R** que va de **p** a **q** , entonces **q** y **s** están en distintas componentes de **R** - **A**.

Demostración. Para cada $\mathbf{x} \in$ **R-A** tomar una recta horizontal que pase por **x**. Si la recta no pasa por ningún vértice de **A**, definir i(x)= numero de veces que la recta corta a **A** a la izquierda de **x**, modulo 2 (y si la recta pasa por algún vertice tomar una recta un poquito mas arriba o mas abajo de **x**). i(x) define una función continua i :**R-A** $\rightarrow \{0,1\}$ tal que i(r)=0 y i(s)=1. •

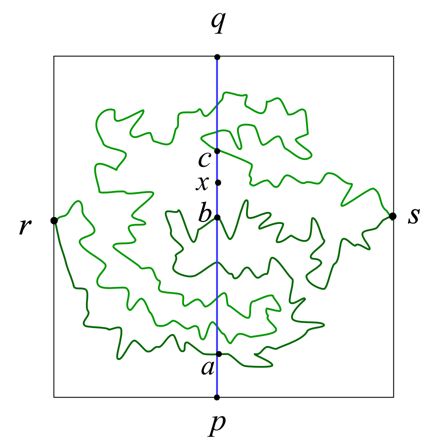


Lema 11. Si **A** es un arco en **R** que va de **r** a **s**, entonces **p** y **q** estan en distintas componentes de **R-A**.

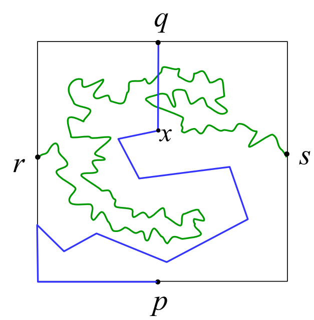
Demostración. Si **p** y **q** estuvieran en la misma componente, habría un arco poligonal $\mathbf{A'}$ en **R-A** que iria de **p** a **q**. Pero entonces **A** seria un camino de **r** a **s** en $\mathbf{R} - \mathbf{A'}$, contradiciendo al lema 1. •

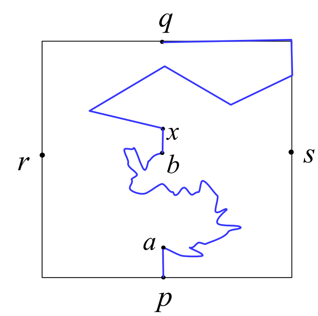


Lema 12. Toda curva simple cerrada divide al plano.



Demostración. Si **C** es una curva simple cerrada en el plano, entonces **C** puede encerrarse en un rectangulo **R** de modo que **C** toque a la frontera de **R** solo en los puntos **r** y **s**. Para ver que **C** separa al plano, debemos hallar un punto x en **R** desde el que no se pueda llegar afuera de **R** sin pasadespuésr por **C**. Sea **L** la línea recta de **p** a **q**. **C** esta formado por 2 arcos que van de **r** a **s**. Sea **a** el primer punto donde **L** toca al primer arco y sea **b** el ultimo punto donde lo toca. Sea **c** el primer punto después de **b** donde **L** toca al otro arco. (por el lema 2 todos estos puntos existen). Sea **x** cualquier punto en **L** entre **b** y **c**. Si **C** no dividiera al plano, habria una trayectoria **T** de **x** a la frontera de **R** que no tocaria a **C**. Hay 2 casos:

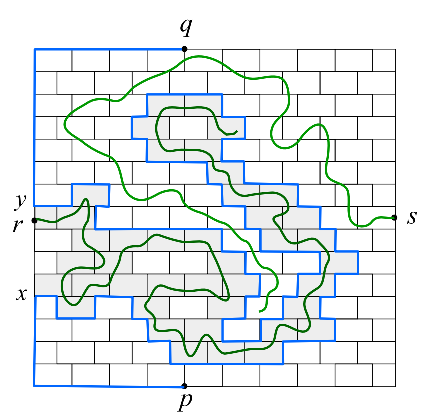




Si **T** termina en un punto abajo de **r** y **s**. Entonces hay un camino de **q** a **p** que no toca al primer subarco de **C** (contradiciendo al lema 1): ir por **L** de **q** a **x**, luego por **T** de **x** a la frontera de **R** y de ahi por la frontera hasta **p**.

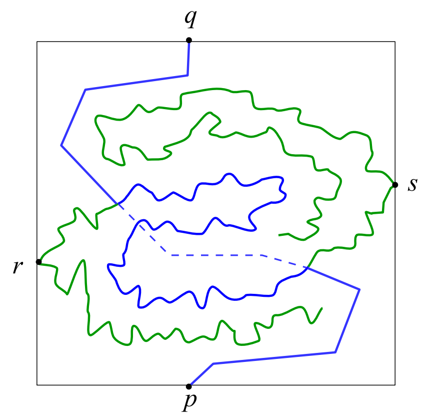
Si **T** termina arriba de **r** y **s**. Entonces hay un camino de **p** a **q** que no toca al segundo subarco de **C**: Ir por **L** de **p** a **a**, luego por el primer subarco de **C** de **a** a **b**, luego por **L** de **b** a **x**, luego por **T** de **x** hasta la frontera de **R** y de ahi por la frontera hasta **q**. •

Lema 13. Si $\mathbf{A_1}$ y $\mathbf{A_2}$ son dos arcos ajenos en **R** que empiezan en **r** y **s**, entonces **p** y **q** estan en la misma componente de $\mathbf{R} - \mathbf{A_1} \cup \mathbf{A_2}$.



Demostración. $\mathbf{A_1}$ y $\mathbf{A_2}$ son dos compactos ajenos, asi que la distancia entre ellos es algún $\epsilon > 0$. Dividamos a **R** en rectángulos de diámetro menor que ϵ como en la figura, Entonces ningun rectángulo que toque a $\mathbf{A_1}$ puede tocar a $\mathbf{A_2}$. Sea **S** la unión de todos los rectángulos que tocan a $\mathbf{A_1}$. Sea **x** el punto mas bajo de **S** sobre la frontera de **R**. Empezando en **x**, seguir la frontera de **S** hasta que vuelva a tocar a la frontera de **R** en el punto **y**. Entonces **y** queda arriba de **r**, ya que si estuviera abajo, $\mathbf{A_1}$ estaréstariaia afuera de de la region en **R** determinada por la trayectoria de **x** a **y**, asi que los cuadritos que tocan a $\mathbf{A_1}$ estaréstarianian afuera, y entonces **x** no podria ser uno de ellos. Asi que podemos ir de **p** a **x** por la frontera de **R**, luego de **x** a **y** por la frontera de **S**, y luego de **y** a **q** por la frontera de **R**. •

Teorema 14. Ningun arco separa al plano.

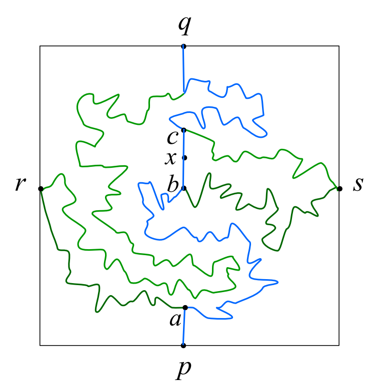


Demostración. Si un arco separara al plano, su complemento tendría una componente conexa acotada U. Si **A** es un subarco minimo que contiene a $Fr(U)$ entonces **A** todav'todavaia separa al plano (porque $Fr(U)$ separa). Encerremos a **A** en un rectangulo **R** que toque a **A** solamente en dos puntos **r** y **s**, y estos puntos dividen a **A** en 3 subarcos $\mathbf{A_1}$, $\mathbf{A_2}$ y $\mathbf{A_3}$ (puede que $\mathbf{A_1}$ o $\mathbf{A_2}$ sean un solo punto). Por el lema 4, hay una trayectoria **T** de **p** a **q** que no toca a $\mathbf{A_1}$ ni a $\mathbf{A_2}$. Entonces hay una trayectoria **T'** de **p** a **q** que no toca a ninguna componente acotada: si **x** y **y** son el primer y el ultimo punto donde **T** toca a $\mathbf{A_3}$, podemos ir de **p** a **x** por **T** (esto esta en la componente no acotada) luego de **x** a **y** por $\mathbf{A_3}$ y finalmente de **y** a **q** por **T** (otra vez en la componente no acotada). Por el lema 2, **r** y **s** estan en distintas componentes de **R-T'**, y los arcos $\mathbf{A_1}$ y $\mathbf{A_2}$ estan en el interior de esas componentes. Pero U es conexa y no toca a **C**, asi que U debe estar contenida en una componente y por lo tanto $Fr(U)$ no puede contener puntos del interior de la otra. Pero los extremos de $\mathbf{A_1}$ y $\mathbf{A_2}$ deberían estar en $Fr(U)$, de otro modo habría un subarco propio de A que contiene a $Fr(U)$. •

Corolario 15. Si **C** es una curva simple cerrada en el plano, entonces la frontera de cada componente conexa de $\mathbb{R}^2$-**C** es toda **C**.

Demostración. Si la frontera de una componente conexa U de $\mathbb{R}^2 - \mathbf{C}$ estuviera propiamente contenida en **C** entonces $Fr(U)$ estaréstariaia contenida en un subarco **A** de **C**, y este arco separaría al plano (ya que $Fr(U)$ lo separa) contradiciendo el teorema 5. •

Lema 16. Si **C** es una curva simple cerrada, entonces **C** separa al plano en a lo mas 2 componentes conexas.

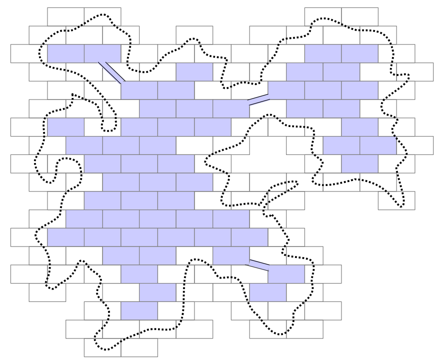


Demostración. Encerremos a **C** en un rectángulo **R** como antes. Todos los puntos del plano afuera de **R** están en la misma componente conexa V de $\mathbb{R}^2 - \mathbf{C}$. Las otras componentes conexas deben estar dentro de **R**. Pero hay una trayectoria **T** de **p** a **q** que solo pasa por V, por **C** y por la componente conexa U que contiene a x (ver figura). Como **T** separa a **R**, si hubiera otra componente conexa U' de $\mathbb{R}^2 - \mathbf{C}$ esta debería estar contenida en una componente de **R-T**, asi que $Fr(U')$ no podria contener tanto a **r** como a **s**. Entonces $Fr(U')$ estaría contenida en un subarco **A** de **C** y este arco separaría al plano, contradiciendo al corolario 6. •

Esto termina la demostración del Teorema de Jordan.

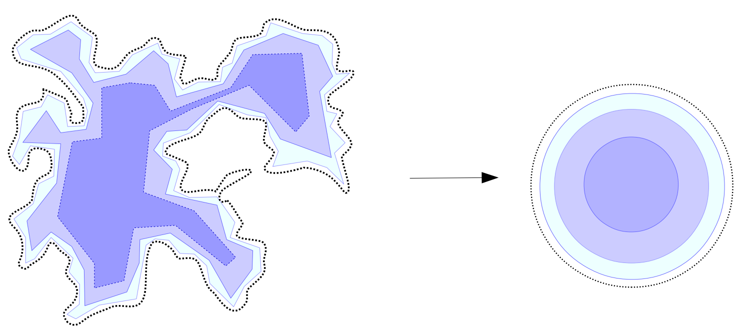
Ahora demostraremos el Teorema de Schoenflies.

Lema 17. Si **C** es una curva simple cerrada, y **U** es la componente conexa acotada de $\mathbb{R}^2 - \mathbf{C}$ entonces existe una colección de discos poligonales $\{D_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ en U tales que $D_i \subset Int(D_{i+1})$ y $U = \cup D_i$



Demostración. Veamos primero que dado $n \in \mathbb{N}$ existe un disco poligonal D_n que contiene a todos los puntos de U que estan a distancia mayor que $\frac{1}{n}$ de **C**. Cubramos al plano con rectangulitos de diámetro $d \leq \frac{1}{n}$, de modo que cada punto del plano esté en a lo mas 3 rectángulitos. Sea E_i la unión de todos los rectangulitos contenidos en U. Como U es acotada E_i está formada por un número finito de rectángulitos, y por lo tanto E_i tiene un numero finito de componentes conexas. $Fr(E_i)$ es una colección de curvas simples cerradas, y como C es conexa, la frontera de cada componente conexa de E_i tiene una sola curva. Asi que por el Teorema de Schoenflies para curvas poligonales cada componente conexa de E_i es un disco poligonal. Como U es conexa y abierta entonces cada par de puntos de U se pueden conectar con una trayectoria poligonal en U. Así que podemos conectar a todas las componentes de E_i con arcos poligonales y engordarlos para obtener un conjunto cerrado D_i cuya frontera sea una sola curva poligonal. Por el teorema de Schoenflies para polígonos, D_n es homeomorfo a un disco. Observar que todos los puntos de U a distancia mayor que $\frac{1}{n}$ de C están contenidos en D_n (ya que si un punto de U está a mayor distancia de C, el rectángulito de diámetro $\frac{1}{n}$ que lo contiene está contenido en U y por lo tanto está en E_n. Para asegurarnos que $D_i \subset Int(D_{i+1})$ basta que el diámetro d de los discos que usamos para construir D_{i+1} sea menor que la distancia mínima de D_i a C. •

Lema 18. Si **C** es una curva simple cerrada entonces la componente conexa acotada U de $\mathbb{R}^2 - \mathbf{C}$ es homeomorfa a un disco abierto.

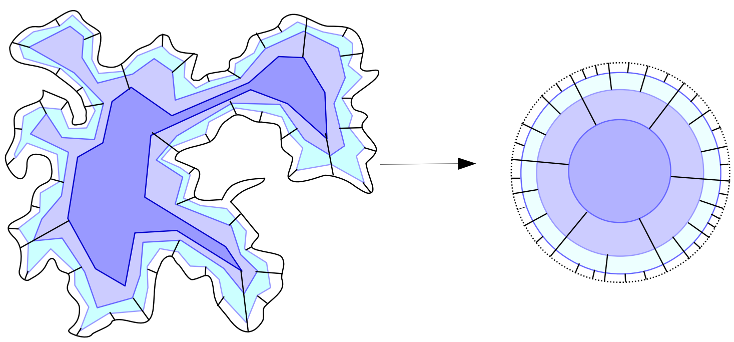


Demostración. Por el lema anterior U es la unión de discos poligonales $D_1, D_2, D_3, \ldots$ de modo que cada disco está contenido en el interior del siguiente. Sus fronteras son curvas simples cerradas poligonales $C_i = Fr(D_i)$ tales que C_{i+1} encierra a C_i. Cada par de curvas C_i y C_{i+1} son la frontera de un anillo topológico A_i. Así que U es la unión de un disco topológico con una familia de anillos topológicos.

El interior del disco unitario D^2 es la unión de discos cerrados concéntricos $D'_1, D'_2, D'_3, \ldots,$ asi que también es la unión de el disco D'_0 y una familia de anillos concéntricos A'_i. Veamos que esto implica que U es homeomorfo a $Int(D^2)$. Sabemos que hay un homeomorfismo $h_0 : D_0 \to D'_0$, y por el lema de Alexander hay un homeomorfismo $h_1 : A_1 \to A'_1$ que coincide con h_0 en C_1. Por la misma razón hay un homeomorfismo $h_2 : A_2 \to A'_2$ que coincida con h_1 en C_2 y en general, hay un homeomorfismo de $h_n : A_n \to A'_n$ que coincide con h_{n-1} en C_n. Como las h_i's coinciden en sus dominios comunes, juntándolas obtenemos una función $h : U \to Int(D^2)$. Es facil ver que h es biyectiva, así que tiene inversa. Como las restricciones de h al disco D_0 y los anillos A_i son continuas, y estos subconjuntos son cerrados en U, entonces h es continua en la cada disco D_i. Como D_i es compacto y $h : D_i \to D'_i$ es continua y biyectiva, entonces $h : D_i \to D'_i$ es es un homeomorfismo. Como U también es la unión de los interiores de los D_i's y $h : U \to Int(D^2)$ es biyectiva y sus restricciones a estos abiertos son homeomorfismos, entonces h es un homoeomorfismo. •

Teorema 19. Si **C** es una curva simple cerrada entonces la cerradura de la componente conexa acotada de $\mathbb{R}^2 - \mathbf{C}$ es homeomorfa a un disco cerrado.

Idea de la demostración. En el lema anterior mostramos que U es homeomorfa a un disco abierto viendo a U como la unión de un disco cerrado con una colección de anillos cerrados y definiendo el homeomorfismo h por partes en el disco y en cada anillo. Para ver que $Cl(U)$ es homeomorfo a un disco cerrado hay que modificar la construcción anterior para asegurarse que h se extienda a la frontera y que la extensión sea un homeomorfismo.



La idea es dividir a cada anillo A_i en un número finito de discos poligonales usando segmentos de recta que van de C_i a C de modo que al crecer i el número de discos tienda a infinito y sus diámetros tiendan a 0. Para definir un homeomorfismo $h : Cl(U) \to D^2$ dividimos a D^2 en un disco D_0 y anillos concéntricos $A_1, A_2, \ldots$ y dividimos el anillo A'_i en tantos sectores como dividimos a A_i. Primero definimos h en las curvas C_i y en los arcos que unen a C_i con C, enviándolos a los círculos concéntricos y a los arcos que los unen a S^1, y luego extendemos h a los interiores de los discos usando el lema de Alexander. De este modo obtenemos una función continua y biyectiva $h : U \to Int(D^2)$. Como los diámetros de los discos en que dividimos a los A_i's y a los A_i's tienden a 0, si una sucesión de puntos p_i en U converge a un punto p de C, entonces la sucesión de sus imágenes bajo h convergen a un punto de S^1. Esto permite definir $h : Cl(U) \to D^2$, y la extensión resulta ser continua y biyectiva. Y como $h : Cl(U) \to D^2$ es continua y biyectiva en el compacto, h debe ser un homeomorfismo. •

Corolario 20. Si **C** es una curva simple cerrada entonces la cerradura de la componente no acotada de $\mathbb{R}^2 - \mathbf{C}$ es homeomorfa a un anillo con una de sus fronteras..

Demostración. Tarea •

Teorema 21. Si **C** es una curva simple cerrada entonces existe un homeomorfismo del plano que lleva C a un círculo.

Demostración. Sean U y V las componentes conexas acotada y no acotada de $\mathbb{R}^2 - C$. Sabemos que hay un homeomorfismo $h_1 : Cl(U) \to D^2$ que lleva C a S^1. También sabemos que $Cl(V)$ es homhomoeomorfaeomorfa al anillo $A = \{(x, y) \ / \ 1 \leq x^2 + y^2\}$. Por el lema de Alexander hay un homeomorfismo $h_2 : Cl(V) \to A$ que coincide con h_1 en C. Juntos h_1 y h_2 definen una función continua y biyectiva $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. Como h manda los cerrados $Cl(U)$ y $Cl(V)$ a los cerrados D^2 y A, se sigue que h manda cerrados del plano en cerrados del plano, y por lo tanto h^{-1} es continua. •

Problemas

5. Si c y c' son curvas simples cerradas y c' está contenida en la componente acotada de c, entonces c y c' son el borde de una región homeomorfa a un anillo. (Hint: unir las curvas con dos arcos simples, usar el teorema de Jordan-Schoenflies y el lema de Alexander)

6. Si c es una curva simple cerrada en el plano, la componente no acotada de $\mathbb{R}^2 - c$ es homeomorfa a un anillo abierto. (usar una inversión y el teorema de Jordan-Schoenflies)

7. Si l es un subconjunto *cerrado* del plano homomorfo a una recta entonces l separa al plano en dos componentes conexas que son homomorfas a discos abiertos. (usar una inversión y el teorema de Jordan-Schoenflies)

8. *Demuestra que si dos compactos ajenos dividen al plano, entonces uno de ellos lo divide.

9. *Demuestra que si A y B son abiertos conexos de $\mathbb{R}^2$ cuya unión es todo $\mathbb{R}^2$ entonces $A \cap B$ es conexo.

10. * ¿Es cierto que cada arco simple en el plano está contenido en una curva simple cerrada?

11. Muestra que no es posible dibujar la gráfica completa de 5 vértices en el plano sin que al menos dos de sus aristas se crucen. (usar el teorema de Jordan)