Los teoremas del punto fijo y de invariancia de dominios

Si f es una función de X en X, y x es un punto de X tal que $f(x) = x$, entonces decimos que x es un **punto fijo** de f.

Ejemplos.

1. Hay funciones continuas de $(0,1)$ en $(0,1)$ que no tienen puntos fijos, por ejemplo $f(x) = x^2$.
2. Cada función continua f de $[0,1]$ en $[0,1]$ tiene al menos un punto fijo: consideremos la función continua $g : [0,1] \to [-1,1]$ definida como $g(x) = f(x) - x$. Como $[-1,1]$ es conexo, su imagen bajo g debe ser conexa, pero $g(-1) \geq 0$ y $g(1) \leq 0$ así que debe haber un x en $[0,1]$ tal que $g(x) = 0$, es decir, que $f(x) = x$.
3. Hay funciones continuas de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$ que no tienen puntos fijos, como las traslaciones.

Teorema del punto fijo: Cada función continua $f : D^2 \to D^2$ tiene al menos un punto fijo.

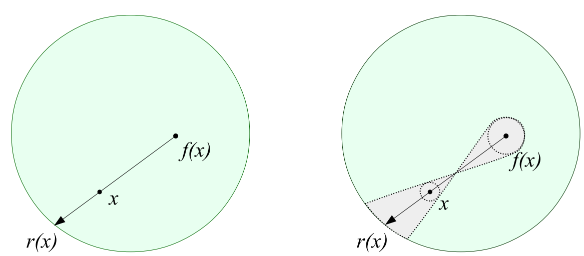
Para demostrar el teorema necesitaremos una función auxiliar. Si X es un espacio topológico y $A \subset X$, una **retracción** de X en A es una función continua $f : X \to A$ tal que $f|_A = Id_A$.

Ejemplos.

1. La proyección del plano al el eje x dada por $r(x,y) = (x,0)$ es una retracción de $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R} \times \{0\}$.
2. La función $u(x) = \frac{x}{|x|}$ da una retracción de $\mathbb{R}^2 - \{0\}$ a S^1.

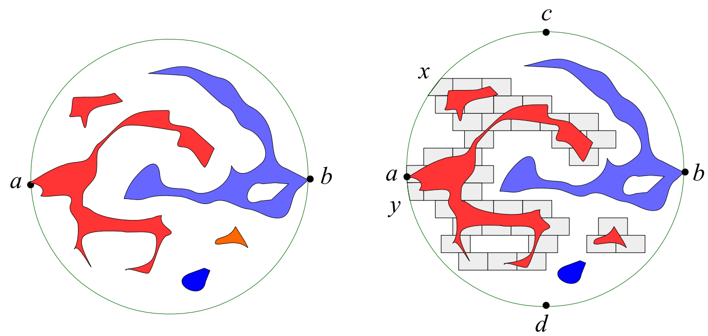
Lema 1. Si existe una función continua $f : D^2 \to D^2$ sin puntos fijos, entonces existe una retracción $r : D^2 \to S^1$.

Demostración. Si $x \in D^2$ es tal que $x \neq f(x)$ entonces siguiendo la linea que va de $f(x)$ hacia x (en ese orden) hasta tocar a S^1, determinamos un punto $r(x)$. Esto define una función $r : D^2 \to S^1$ tal que $r(x) = x$ para $x \in S^1$. Para ver que r es una función continua, observar que si y se aproxima a x entonces $f(y)$ se aproxima a $f(x)$, así que la linea que va de $f(y)$ a y se aproxima a la linea que va de $f(x)$ a x y por lo tanto las intersecciones de esas lineas con S^1 se aproximan, así que $g(y)$ se aproxima a $g(x)$ •



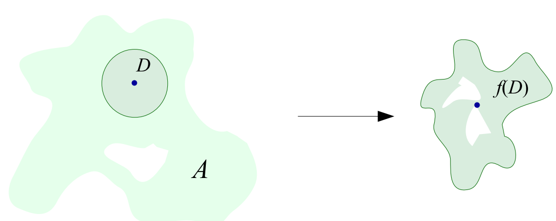
Lema 2. No existe ninguna retraccion $r : D^2 \to S^1$.

Demostración. Supongamos que existiera tal r. Sean A y B las preimagenes bajo r de los puntos a y b en $\S^1$. Como r es continua, A y B son dos compactos ajenos de D^2. Además, como $r|_{S^1}$ es la identidad, A toca a S^1 solamente en a, y B toca a S^1 solamente en b. Afirmamos que hay un camino en D^2 que va de c a d y que no toca a A ni a B. Si esto es cierto ya acabamos, ya que la imagen del camino bajo r seria un camino en el circulo ∂D^2 que iria de c a d y no tocaria ni a a ni a b. Para demostrar la afirmación, cubramos a D^2 con cuadritos tan chiquitos que ningun cuadrito que toque a A toque a B ni a la mitad derecha de ∂D^2. Sea C la union de los cuadritos que tocan a A, de modo que $A - a$ esta en el interior de C. Sea C_1 componente conexa de C que contiene a a y sea x el punto mas bajo de C_1 sobre ∂D^2. Empezando en x, podemos seguir la frontera de C_1 hasta que vuelva a tocar a ∂D^2 en el punto y. y queda arriba de a, ya que si estuviera abajo, a estaria afuera de de la region en D^2 determinada por la trayectoria de x a y, mientras que C_1 estaria dentro de esa region (ya que el cuadrito de C_1 que contiene a x esta dentro). Asi que podemos ir de c a x por la frontera de D^2, luego de x a y por la frontera de C_1, y luego de y a d por la frontera de D^2. •



Teorema de invariancia de los dominios: Si A es un abierto de $\mathbb{R}^2$ y $h : A \to \mathbb{R}^2$ es continua e inyectiva, entonces $h(A)$ es abierto y $h : A \to h(A)$ es un homeomorfismo.

Demostración. Para ver que $h(A)$ es abierto hay que probar que para cada punto p en A existe una vecindad de $h(p)$ contenida en $h(A)$. Sea D un disco cerrado centrado en p y contenido en A. Como D es compacto y $h|_D : D \to h(D)$ es continua y biyectiva entonces es un homeomorfismo. En particular, $h(Fr(D))$ es una curva simple cerrada. Veremos que $h(D)$ es el disco topológico (que contiene a $h(p)$) acotado por $h(Fr(D))$.

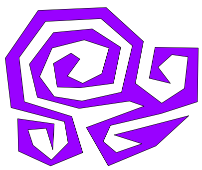


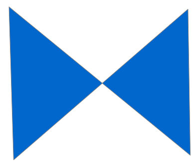
Como h es continua y $Int(D)$ es conexo, $h(Int(D))$ esta contenido en una de las componentes conexas de $\mathbb{R}^2 - h(Fr(D))$. Si $h(Int(D))$ estuviera contenido en la componente no acotada, entonces $h(D)$ estaría contenido en la cerradura de esa componente, que por el Teorema de Schoenflies es homomorfa a un disco menos un punto y por lo tanto existiría una retracción r de $h(D)$ a $h(Fr(D))$, pero entonces $h^{-1} \circ r$ sería una retracción de D a $Fr(D)$. Así que $h(Int(D))$ está contenido en la componente acotada, y $h(D)$ está contenido en la cerradura de esa componente, que es homomorfa a un disco. Si $h(Int(D))$ no fuera toda la componete acotada, entonces $h(D)$ estaría contenida en el disco menos un punto interior, y habría una retracción r de $h(D)$ a $h(Fr(D))$. Pero entonces $h^{-1} \circ r$ sería una retracción de D a $Fr(D)$, que ya sabemos que no puede existir. Así que $h(Int(D))$ es toda la componente acotada de $\mathbb{R}^2 - h(Fr(D))$, que es una vecindad de $h(p)$ •

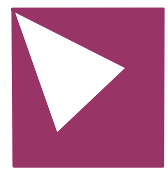
Corolario: Si A y B son dos subconjuntos homeomorfos del plano, y A es abierto, entonces B es abierto.

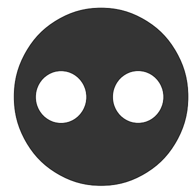
Problemas

1. ¿Para cuales de los siguientes conjuntos (cerrados) del plano es cierto que cada función continua del conjunto en sí mismo tiene un punto fijo?

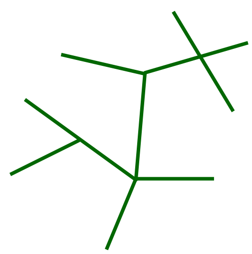

a.


b.


c.


d.

2. Demuestra que si T es un árbol (una gráfica sin ciclos) entonces cada función continua de T en T tiene un punto fijo. (hint: un árbol puede encajarse en el plano de modo que una vecindad regular sea homomorfa a un disco).



3. Muestra que si una gráfica G tiene ciclos entonces existe una función continua de G en G sin puntos fijos.

4. a. Demuestra que si dos conjuntos del plano son homeomorfos, sus interiores son homeomorfos,

   b. Muestra que existen subconjuntos homeomorfos del plano cuyas fronteras no son homeomorfas.

   c. Prueba que si dos conjuntos *cerrados* del plano son homeomorfos, sus fronteras son homeomorfas.

5. Da un cerrado C del plano y una función $f : C \to \mathbb{R}^2$ continua e inyectiva de modo que $f(C)$ no sea cerrado y $f : C \to f(C)$ no sea un homeomorfismo.