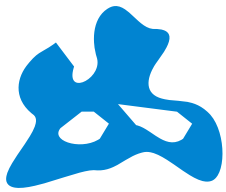
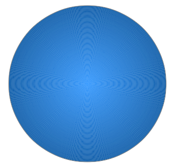
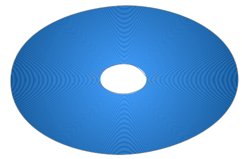
Superficies

Una **superficie** es un espacio S que es *localmente homomorfo* al plano, es decir, tal que cada punto de S tiene una vecindad en S homeomorfa a un abierto de $\mathbb{R}^2$.

Ejemplos de superficies.

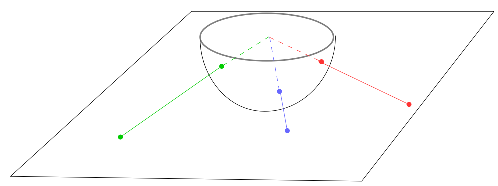






1. Un abierto del plano 2. La esfera S^2 3. El toro T^2

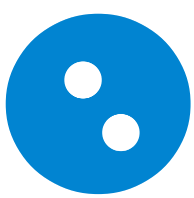
4. $\{(x, y, z) \in R^3/x^2 + y^2 - z^2 = 1\}$ es una superficie, pero $\{(x, y, z) \in R^3/x^2 + y^2 - z^2 = 0\}$ no lo es (tiene un punto singular).

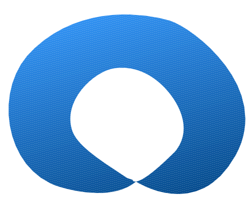


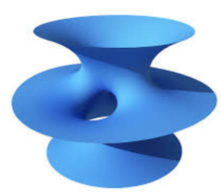
5. El **plano proyectivo**. Si al plano euclidiano le añadimos un *punto al infinito* por cada familia de rectas paralelas (de modo que todas ellas es intersecten en ese punto) obtenemos una superficie llamada plano proyectivo. Para visualizarlo podemos proyectar el plano euclidiano E a media esfera S tangente a E, la imagen de E son los puntos de S menos la orilla, y la imagen de cada recta es un arco de círculo, de modo que las rectas paralelas se proyectan a arcos que terminan en el mismo par puntos antípodas de la orilla de S. Los puntos al infinito corresponden a estos pares de puntos (los dos representan al mismo punto al infinito!) Así que el plano proyectivo es topológicamente una semiesfera con los puntos anípodas de la orilla identificados.

Una **superficie con borde** es un espacio que es localmente homeomorfo al semiplano $\mathbb{R}^{2^+} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ /y \geq 0\}$. Los puntos de S de la forma $(x, 0)$ en $\mathbb{R}^{2^+}$ forman el **borde** de la superficie, denotado por ∂S. El teorema de invariancia de dominios muestra que el borde de una superficie es invariante bajo homeomorfismos.

Ejemplos:



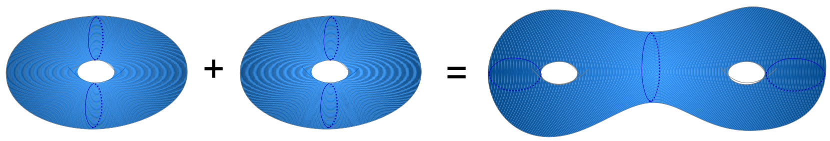




1. Disco con 2 hoyos 2. Banda de Moebius 3. ? .

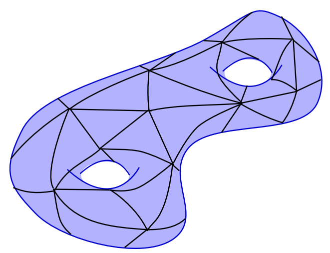
Si viajamos alrededor de la Banda de Moebius regresamos al punto inicial con la orientación opuesta. Esto mismo ocurre con otras superficies que contienen bandas de Moebius, a estas superficies las llamaremos **no orientables**.

La **suma conexa** de dos superficies es la superficie que se obtiene quitándole un disco a cada una y pegando los bordes que quedan.



Para ver que la suma conexa de dos superficies S y S' está bien definida, hay que ver que la forma topológica de $S+S'$ no depende de los discos que les quitemos a S y S' ni de como peguemos sus bordes. Para lo primero basta probar que si D y D' son dos discos en S, entonces existe un homeomorfismo de S que lleva D a D', lo que es consecuancia del teorema de Schoenflies.

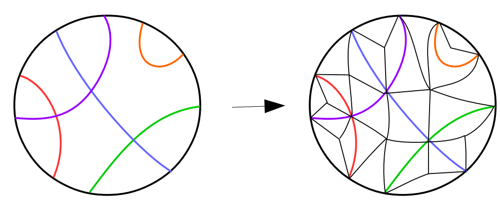
Una **triangulación** de una superficie S es una subdivisión de S en triángulos topológicos que se intersectan en aristas o en vértices).

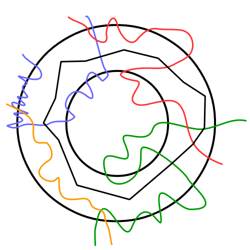


Teorema: Todas las superficies se pueden triangular.

Idea de la demostración para superficies compactas. Si S es una superficie, los puntos de S tienen vecindades homeomorfas a discos, y estas vecindades forman una cubierta abierta de S. Asi que si S es compacta, hay una colección finita de discos cerrados $D_1, D_2, \ldots, D_n$ cuyos interiores cubren a S. Las fronteras de los discos son curvas simples cerradas $c_1, c_2, \ldots, c_n$ en la superficie.

Si estas curvas se intersectan en un número finito de puntos, su unión divide a S en regiones homeomorfas a discos poligonales que se tocan en lados o vertices, ya que cada región está contenida en un disco D_i y su borde es una curva simple cerrada formada por arcos de las curvas c_j contenidos en D_i. Estos discos poligonales pueden dividirse desde un punto interior en triángulos que se tocan en vertices o lados, y esto dice que S es triangulable.



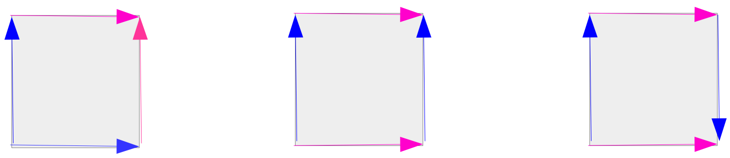


Si los discos D_i se intersecten en una infinidad de puntos, es facil ver que hay discos D_i' mas pequeños que cubren a S, y se puede probar usando el teorema de Jordan-Schoenflies que existen discos intermedios entre D_i' y D_i que cubren a S y solo se intersecten en un número finito de puntos (El dibujo sugiere como hallar estos discos intermedios). •

Corolario. Cada superficie compacta y conexa S puede obtenerse a partir de un disco poligonal P identificando sus lados por pares.

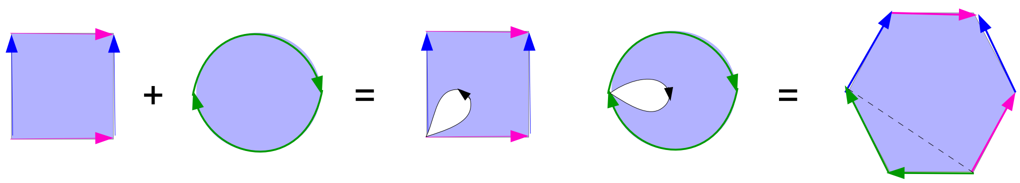
Demostración. Como S se puede triangular, S es una unión finita de triángulos pegados por aristas. Como S es conexa, podemos numerar los triángulos de modo que cada triángulo T_i tenga (al menos) una arista a_i en común con alguno de los triángulos anteriores. El disco P se obtiene empezando con T_1, pegándole T_2 a lo largo de a_1, luego pegando T_3 a $T_1 \cup T_2$ lo largo de a_2, luego pegando T_4 a $T_1 \cup T_2 \cup T_3$ a lo largo de a_3, y asi hasta pegar T_n a $T_1 \cup T_2 \cup \cdots \cup T_{n-1}$ lo largo de a_n. Así $T_1 \cup T_2 \cup \cdots \cup T_n$ es un disco poligonal, cuyos lados son los lados de los triángulos que faltan por pegar en S •

Ejemplos:

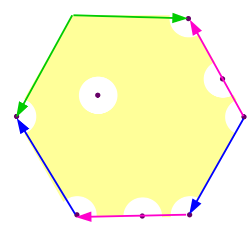


. Esfera Toro Botella de Klein .

Observar que podemos combinar los diagramas de dos superficies para obtener un diagrama de su suma conexa:



Lema Cualquier apareamiento de los lados de un disco poligonal produce una superficie.

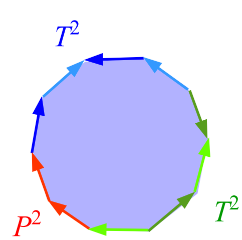


Demostración. Hay que ver que al identificar por pares los lados de un disco poligonal P, se obtiene un espacio cuyos puntos tienen vecindades homeomorfas a discos. Los puntos en el interior del poligono ya la tienen vecindades así en P. Los puntos en los lados de P (que no son vertices) tienen vecindades en P que se ven como medios discos abiertos, pero como cada lado está identifcado con otro lado de P, en el espacio resultante los dos medios discos se pegan para producir vecindades de los puntos que son homeomorfas a discos. Los vértices de P tienen vecindades que son rebanadas de discos. Como cada lado de P esta pegado con otro lado,estos sectores se van pegando uno tras otro hasta completar un disco alrededor del punto en el espacio resultante. •

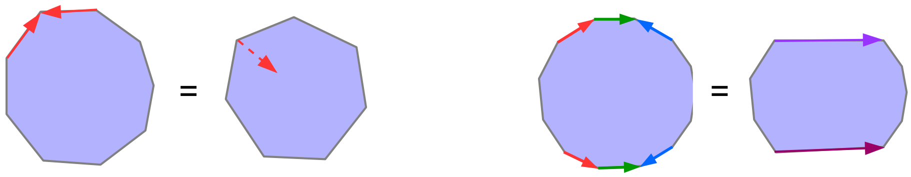
Observación. La prueba anterior muestra que si en un disco poligonal se aparean solo algunos lados se obtiene una superficie con borde (que viene de los lados no apareados)

Teorema de clasificación de superficies. Todas las superficies cerradas son homeomorfas a esferas, o sumas conexas de toros o planos proyectivos.

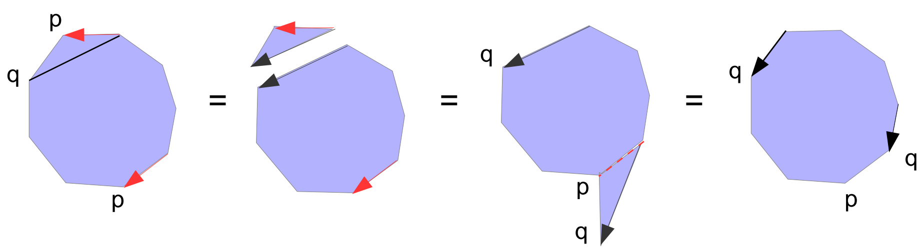
Demostración. Hay que ver que cualquier disco poligonal P con lados identificados por pares puede recortarse y pegarse para obtener otro polígono cuyas identificaciones corresponden a una esfera o una suma conexa de toros y/o planos proyectivos, como en la figura: Esto se hace en varios pasos:



Paso 1. Simplificar lo mas posible a P, reduciendo lo mas posible el número de lados.

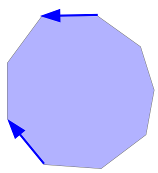


Paso 2. Modificar a P para que todos sus vértices estén identificados en la superficie. Si hay vértices de P que van a dos puntos distintos de la superficie, podemos modificar a P para disminuir los vertices que van al primero y aumentar los que van al segundo (hasta que solo uno vaya al primero, y entonces se puede aplicar a)

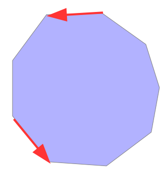


Llamaremos a los pares de lados identificados *paralelos* o *antiparalelos* de acuerdo a su orientación:

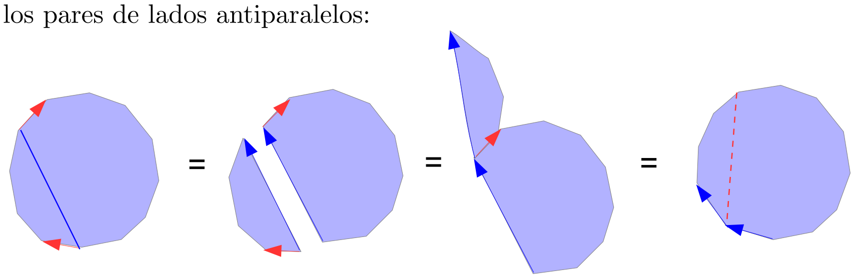
Lados paralelos:
(Anillo)



Lados antiparalelos:
(*Banda de Moebius*)

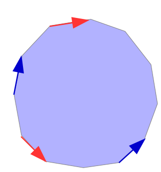


Paso 3. Juntar los pares de lados antiparalelos:

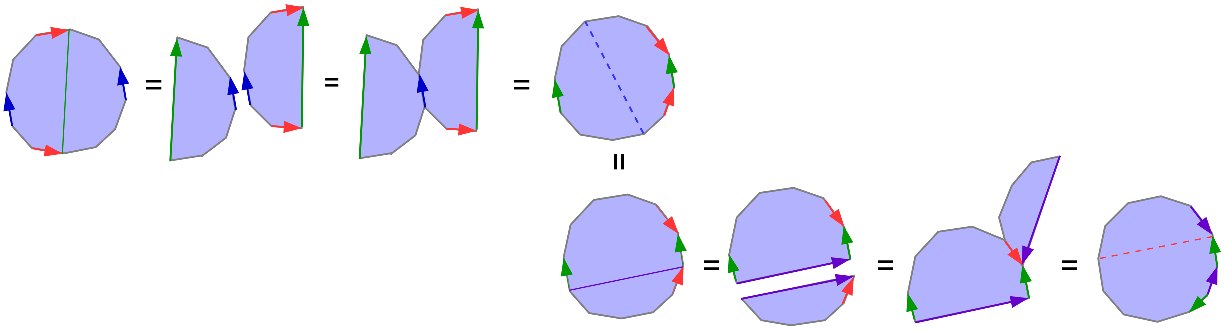


Paso 4. Juntar parejas de pares de lados paralelos:

Observar que como todos los vertices de P estén identificados, los pares de lados paralelos vienen en parejas: para cada par de lados paralelos hay otro par de lados paralelos intercalados como en la figura. (Si no, los vértices de un lado de P no estarían identificados con los del otro lado.)



Ahora podemos juntar los pares de lados paralelos intercalados:



Despues de hacer los pasos 1,2, 3 y 4, los lados antiparalelos estan juntos y los lados paralelos estan intercalados por pares. Esto dice que los lados de P están pegados como en una suma de planos proyectivos y/o toros. •

El teorema anterior dice que todas las superficies compactas son sumas de toros y/o planos proyectivos. Uno puede preguntarse si las distintas sumas de toros y/o planos proyectivos dan siempre superficies distintas.

Lema. $T^2 + P^2 = P^2 + P^2 + P^2$

Demostracion. Tarea.

Corolario. Cada superficie compacta es homeomorfa a una esfera o una suma de toros o una suma de planos proyectivos.

Demostracion. Si en la descomposición de la superficie como suma conexa aparecen tanto planos proyectivos como toros podemos rusar el lema anterior para remplazar cada toro por dos proyectivos. •

Si a una superficie (sin borde) S le quitamos el interior de n discos ajenos, obtenemos una superficie S' con borde, y decimos que S' es la superficie S con n agujeros. Por ejemplo, un anillo es una esfera con 2 agujeros y una banda de Moebius es un plano proyectivo con un agujero.

Ahora podemos extender el teorema de clasificación de superficies a las superficies con borde.

Teorema. Todas las superficies con borde compactas son homeomorfas a esferas agujeradas o a alguna suma conexa de toros o planos proyectivos agujerada.

Demostración. Si S' es una superficie con borde compacta, entonces el borde $\partial S'$ es compacta y por lo tanto $\partial S'$ es una colección finita de curvas simples cerradas $c_1, c_2, \ldots, c_n$ Si le pegamos a S' un disco D_i por cada curva c_i, obtenemos una superficie (sin borde) S que es compacta. Por el teorema de clasificación de superficies, S es una esfera o una suma conexa de toros y/o planos proyectivos. Y S' se obtiene de S quitándole los discos D_i que le habiamos pegado. •

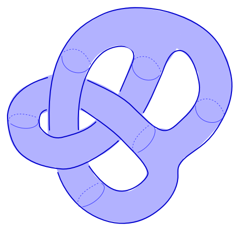
Problemas

1. Muestra que las superficies son homogeneas: dados dos puntos p y q en una superficie (sin bordes) S, existe un homeomorfismo de S que lleva p a q.

2. Demuestra que si la suma conexa de dos superficies es homeomorfa a una esfera, entonces las dos superficies son homeomorfas a esferas. (Hint: teorema de Jordan-Schoenflies)

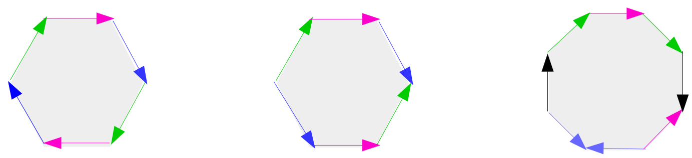
3. Muestra que la esfera, el toro y el doble toro no son homeomorfos. (hint: considera distintas curvas simples cerradas en las superficies)

4. ¿Que superficies son estas?



5. Muestra que $P^2 + P^2 = K^2$ y que $P^2 + P^2 + P^2 = T^2 + P^2$.

6. ¿Puedes identificar a estas superficies ?



7. Muestra que empezando con dos superficies compactas (sin bordes) que no son homeomorfas y haciendoles agujeros no pueden obtenerse superficies con borde que sean homeomorfas.

8. Muestra que cualquier gráfica finita puede encajarse (sin que las aristas se intersecten) en alguna superficie compacta.

9. Demuestra que si F y G son dos superficies compactas (sin bordes) y existe una funcion continua e inyectiva de F a G, entonces F y G son homeomorfas.