Los números complejos

Algo de historia

La fórmula para resolver ecuaciones de segundo grado $ax^2+bx+c=0$ es conocida desde tiempos de los griegos. Se sabía que algunas de estas ecuaciones tienen 2 soluciones, otras tienen una y otras ninguna, que están dadas por $x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ y dependen de que la expresión dentro de la raiz cuadrada sea positiva, nula o negativa.

A mediados del siglo XVI Cardano halló una fórmula para resolver las ecuaciones de tercer grado. Para una ecuación de la forma $x^3=3px+2q$ la solución es

$$x=\sqrt[3]{q+\sqrt{q^2-p^3}}+\sqrt[3]{q-\sqrt{q^2-p^3}}$$

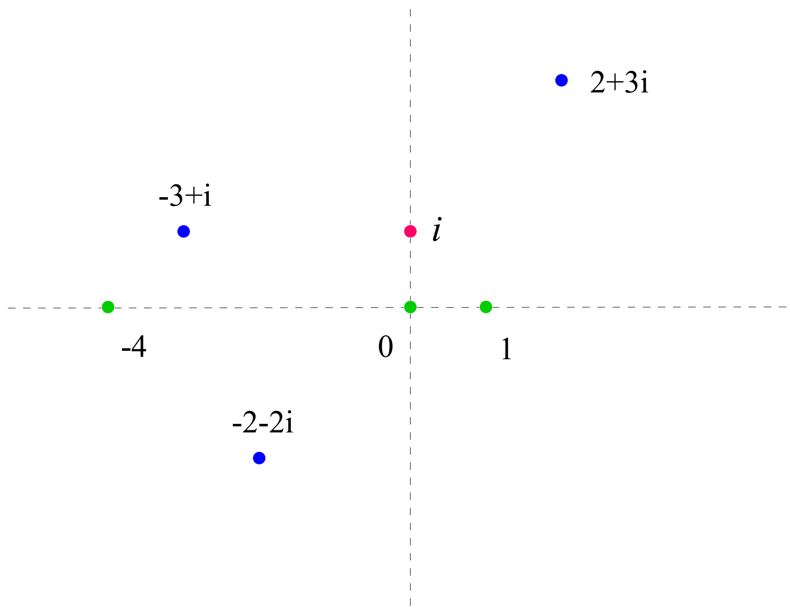
Bombelli observó que si aplicaba la fórmula de Cardano a la ecuación $x^3=15x+4$ obtenía la solución $x=\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{-121}}$. Esto no tenía sentido, a pesar de que la ecuación sí tenía solución: x=4. De alguna manera la suma de dos números imposibles daba un número común y corriente. Si $\sqrt{-121}$ tuviera algun sentido, también debía tener sentido $\sqrt{-1}$ y se tendría $\sqrt{-121}=11\sqrt{-1}$. ¿Y que sería $\sqrt[3]{2+11\sqrt{-1}}$? Lo mas sencillo es que también fuera de la forma $a+b\sqrt{-1}$ para algunos valores de a y b tales que $(a+b\sqrt{-1})^3=2+11\sqrt{-1}$. Si las reglas de la suma y la multiplicación usuales se siguieran cumpliendo, entonces

$$(a+b\sqrt{-1})^3=a^3+3a^2b\sqrt{-1}+3ab^2\sqrt{-1}\sqrt{-1}+b^3\sqrt{-1}\sqrt{-1}\sqrt{-1}=a^3-3ab^2+(3a^2b-b^3)\sqrt{-1}$$

Asi que la raiz cúbica debería cumplir $a^3-3ab^2=2$ y $3ab^2-b^3=11$. Una solución es $a=2$ y $b=1$, de modo que tendría sentido decir que $\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}}=2+\sqrt{-1}$ y $\sqrt[3]{2-\sqrt{-121}}=2-\sqrt{-1}$. La suma de estos dos números imposibles es 4, que es exactamente la solución de la ecuación original. Si llamamos i a $\sqrt{-1}$, los "números"de la forma $a+bi$ pueden sumarse y multiplicarse fácilmente: $(a+bi)(c+di)=ac+adi+bci+bdi^2=(ac-bd)+(ad-bc)i$. Estos números tienen inversos y raices cuadradas de la misma forma, por ejemplo, $\frac{1}{1+i}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i$ y $\sqrt{i}=\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i$. Por dos siglos estos números, llamados entonces *imaginarios*, fueron vistos con mucha suspicacia y a los números reales se les llamó así para distinguirlos de ellos.

A mediados del siglo XVIII Euler observó que también tenía sentido hablar de series de números imaginarios, y vió que al aplicar la serie de potencias de la función exponencial $e^t=1+t+t^2/2!+t^3/3!+t^4/4!+...$ al número imaginario ti el resultado es la suma de la serie de $cos(t)=1-t^2/2!+t^4/4!-t^6/6!-...$ y i veces la serie de $sen(t)=t-t^3/3!+t^5/5!-...$, dando la fórmula $e^{it}=cost+isent$.

A fines del siglo XVIII Wessel, Argand y Gauss hallaron una interpretacion geometrica de los números de la forma $a + bi$ como puntos del plano con coordenadas cartesianas (a,b). Con esta interpretación ya podía pensarse que estos números, que fueron llamados *complejos*, realmente existían y podián ser investigados seriamente.



El plano complejo

En la primera mitad del siglo XIX Cauchy, Riemann y otros descubrieron que al aplicar los métodos del cálculo diferencial e integral a las funciones de variables complejas no solo se obtenían resultados consistentes, sino aún mas interesantes que en el caso real, por ejemplo que toda función diferenciable compleja es infinitamente diferenciable (algo claramente falso en el caso real). Y estos resultados podían usarse para resolver problemas sobre funciones reales, pero que habían sido imposibles con el cálculo real, como evaluar $\int_0^\infty sen^2 x/x^2 dx$. Desde entonces el análisis complejo ha encontrado muy importantes aplicaciones en la física y la ingenieria, y es una de las ramas mas interesantes y fructíferas de las matemáticas.

El campo de los números complejos

Los números complejos son combinaciones de la forma $a + bi$, donde a y b son números reales y i es la *unidad imaginaria*, que satisface $i^2 = 1$.

Los complejos son denotados a veces por una sola letra $z = a + bi$. Los complejos de la forma $a + 0i$ son *reales* y los de la forma $0 + bi$ son *imaginarios puros*. $0 = 0 + 0i$, $1 = 1 + 0i$ y $i = 0 + 1i$. Si $z = a + bi$ es unr complejo, su *parte real* es $\mathrm{Re}z = a$ y su *parte imaginaria* es $\mathrm{Im}z = b$.

Los números complejos pueden sumarse y multiplicarse para obtener otros número complejos:

$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$

$(a + bi)(c + di) = ac + adi + bci + bdi^2 = (ac - bd) + (ad + bc)i$

Ejemplo:

$(2 + 3i) + (5 - 2i) = 7 + i$

$(2 + 3i)(5 - 2i) = 16 + 11i$

La suma y el producto de números complejos heredan las propiedades de la suma y el producto de números reales:

- $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$ (conmutatividad)
- $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$ (asociatividad)
- $0 + z = z$ (neutro aditivo)

- $z_i z_2 = z_2 z_1$ (conmutatividad)
- $(z_1 z_2)z_3 = z_1(z_2 z_3)$ (asociatividad)
- $1z = z$ (neutro multiplicativo)

- $z_1(z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3$ (distributividad)

Es claro que cada número complejo tiene un inverso aditivo: Si $z = a + bi$ y $-z = -a - bi$ entonces $z + (-z) = 0$

No es obvio que los complejos tengan inversos multiplicativos, es decir que para cada $z \neq 0$ exista un z' tal que $zz' = 1$. Para hallarlo observemos que si $z = a + bi$ y $z' = x + yi$ entonces $zz' = ax - by + (ay + bx)i$ asi que $zz' = 1$ si y solo si:

$ax - by = 1$
$bx + ay = 0$

Si resolvemos este sistema de ecuaciones lineales obtenemos $x = \frac{a}{a^2+b^2}$ y $y = -\frac{b}{a^2+b^2}$ de modo que $z' = \frac{a}{a^2+b^2} - \frac{b}{a^2+b^2}i$. Asi que z tiene un único inverso multiplicativo, que se denota por z^{-1}.

Ejemplo: $(3 + 2i)^{-1} = \frac{3}{3^2+2^2} - \frac{2}{3^2+2^2}i = \frac{3}{13} - \frac{2}{13}i$

Como cada número complejo $z \neq 0$ tiene un inverso multiplicativo único, entonces podemos definir el cociente de dos complejos como $z'/z = z'z^{-1}$

Ejemplo: $\frac{4+3i}{1+2i} = (4 + 3i)(1 + 2i)^{-1} = (4 + 3i)(1/5 - 2/5i) = 4/5 + 6/5 + (-8/5 + 3/5)i = 2 - i$

Las propiedades anteriores muestran:

Teorema. Los complejos forman un campo, denotado por $\mathbb{C}$, que es una extensión del campo de los números reales $\mathbb{R}$.

Teorema. Todos los números complejos tienen raices cuadradas complejas.

Demostración. Si $z = a + ib$ y $w = x + iy$ entonces $w^2 = z$ si y solo si

$w^2 = x^2 - y^2 + 2xyi = a + ib$

$x^2 - y^2 = a$ y $2xy = b$

Asi que $a^2 + b^2 = (x^2 - y^2)^2 + 4x^2y^2 = x^4 - 2x^2y^2 + y^4 + 4x^2y^2 = x^4 + 2x^2y^2 + y^4 = (x^2 + y^2)^2$

Asi que $x^2 + y^2 = \sqrt{a^2 + b^2}$, y como ya sabíamos que $x^2 - y^2 = a$ entonces

$2x^2 = a + \sqrt{a^2 + b^2}$ y $2y^2 = -a + \sqrt{a^2 + b^2}$.

Como $|a| \leq \sqrt{a^2 + b^2}$ para todas a, b, estas dos cantidades no son negativas y tienen raiz cuadrada real, asi que

$x = \pm\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}}$ y $y = \pm\sqrt{\frac{-a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}}$

Aqui hay 4 combinaciones posibles de x y y, pero se puede checar que solo dos son soluciones de $2xy = b$ (dependiendo del signo de b), y una de las soluciones es la negativa de la otra.

Ejemplo. Las raices cuadradas de $z = 3 + 2i$ estan dadas por

$w = \sqrt{\frac{3+\sqrt{13}}{2}} + i\sqrt{\frac{-3+\sqrt{13}}{2}}$ y $-w = -\sqrt{\frac{3+\sqrt{13}}{2}} - i\sqrt{\frac{-3+\sqrt{13}}{2}}$

Mientras que las raices cuadradas de $z = 3 - 2i$ estan dadas por

$w = \sqrt{\frac{3+\sqrt{13}}{2}} - i\sqrt{\frac{-3+\sqrt{13}}{2}}$ y $-w = -\sqrt{\frac{3-\sqrt{13}}{2}} + i\sqrt{\frac{-3+\sqrt{13}}{2}}$

Teorema. Todos los polinomios de segundo grado con coeficientes complejos tienen soluciones complejas.

Demostración. Si $P(z) = az^2 + bz + c = 0$ es un polinomio con a, b, c números complejos, $az^2+bz+c = 0 \iff z^2+\frac{b}{a}z+\frac{c}{a} = 0 \iff z^2+\frac{b}{a}z+(\frac{b}{2a})^2+\frac{c}{a} = (\frac{b}{2a})^2 \iff (z+\frac{b}{2a})^2+\frac{c}{a} = (\frac{b}{2a})^2 \iff (z+\frac{b}{2a})^2 = \frac{b^2-4ac}{4a^2}$
Como todos los números complejos tienen raices cuadradas, la ultima igualdad equivale a: $z + \frac{b}{2a} = \pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$, o sea $z = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

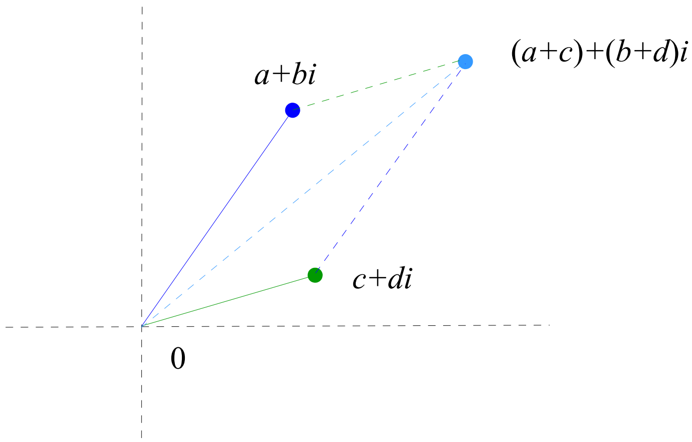
Problemas

1. Calcula $\frac{1}{i}$, $\sqrt{i}$, $\sqrt{-i}$
2. Muestra que $i(1-i)(2-i)(3-i) = 10$
3. ¿Es verdad que $\sqrt{-2}\sqrt{-3} = \sqrt{6}$?
4. Escribe estos números complejos en la forma a+bi:

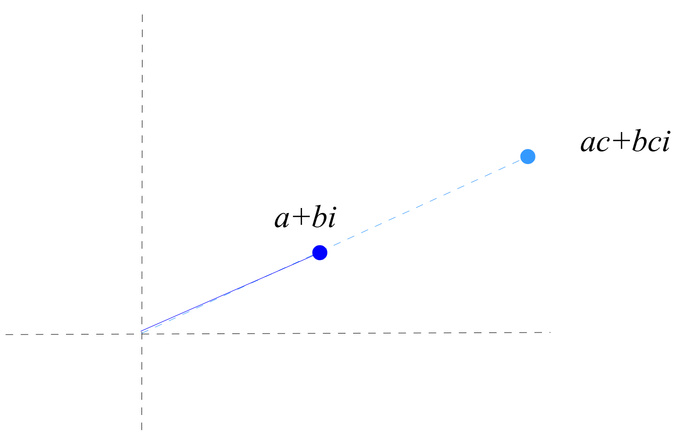
   $\frac{1}{2+3i}$ $\quad$ $\frac{3+2i}{1-3i}$ $\quad$ $(1-i)^4$ $\quad$ $(1+i)^{-2}$
5. Encuentra dos números complejos cuyo producto sea un real y su cociente sea imaginario puro.

Geometría de los números complejos

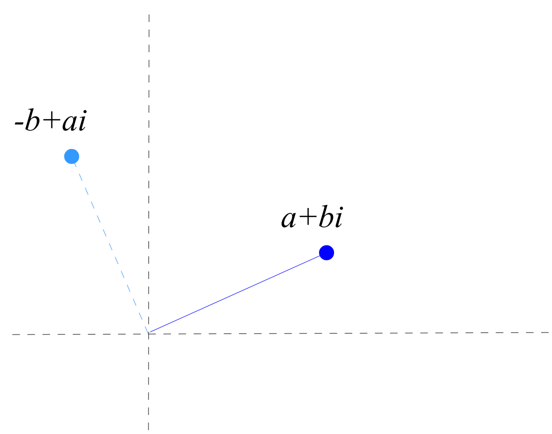
Si identificamos a los números complejos $z = a + bi$ con los puntos en el plano (a, b), entonces la suma compleja corresponde a la suma vectorial $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$.



El significado geométrico de la multiplicación compleja no es tan obvio. Al multiplicar un complejo $a + bi$ por un número real c se obtiene $ac + bci$, y esto corresponde a multiplicar el vector (a, b) por el escalar c. Por otro lado, al multiplicar $a + bi$ por i se obtiene $-b + ai$, que corresponde a rotar el vector (a, b) 90 grados, asi que multiplicar $a + bi$ por ci corresponde a rotar (a, b) 90 grados y multiplicarlo por el escalar c.



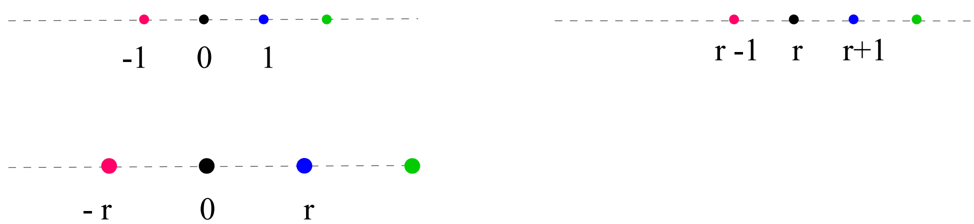
Multiplicación por un real



Multiplicación por i

Para entender que hace la multiplicación por un complejo arbitrario es mejor pensar en como transforma a todo el plano.

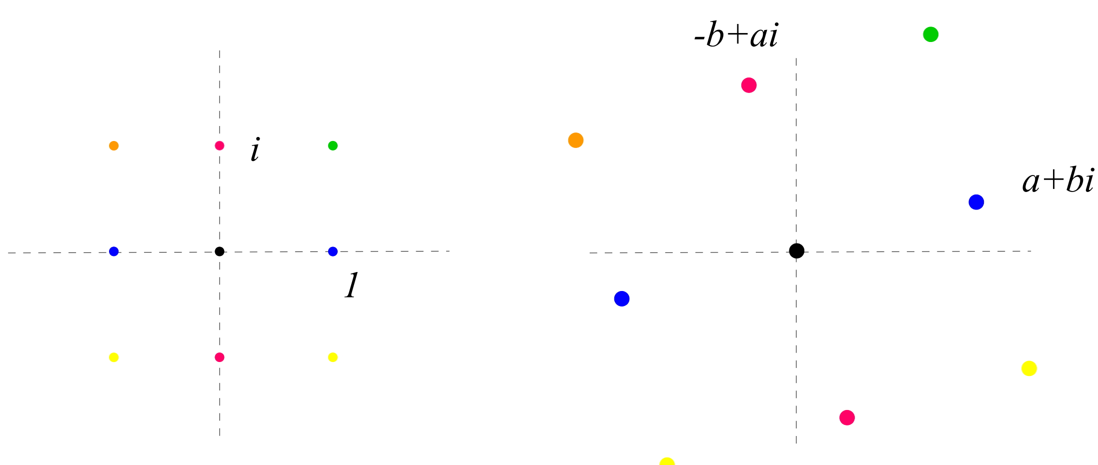
Cada número real r determina dos transformaciones de la recta real: $x \to x + r$ (sumar r) que es una traslacion y $x \to rx$ (multiplicar por r) que es una homotecia (una contracción o una expansión, seguida de una reflexión si $r < 0$).



Similarmente, cada número complejo c determina dos transformaciones del plano complejo $\mathbb{C}$: $z \to z + c$ (sumar c) y $z \to cz$ (multiplicar por c).

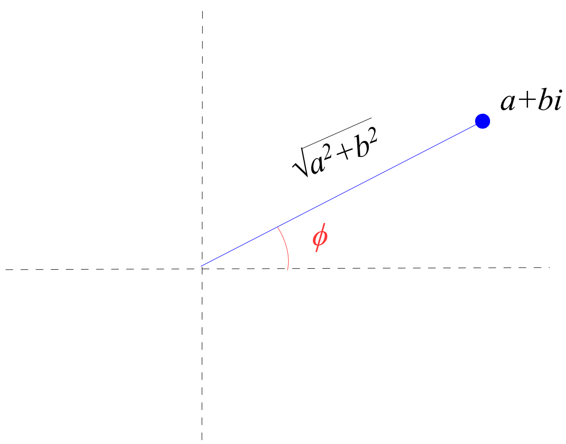
Si $c = a + bi$, $z = x + yi$ y pensamos en los complejos como vectores, entonces sumar (a, b) envia cada (x, y) del plano a $(x + a, y + b)$ y esto es una traslación por el vector (a, b).

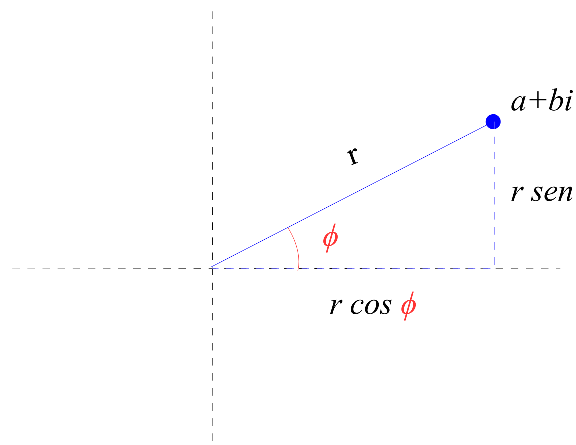
Multiplicar por (a, b) envía cada (x, y) del plano a $(ax - by, ay + bx)$. Esta es una transformación lineal que envía el vector $(1, 0)$ a (a, b) y el vector $(0, 1)$ a $(-b, a)$. Como (a, b) y $(-b, a)$ son ortogonales y del mismo tamaño, entonces la multiplicación por $a + bi$ es una rotación si (a, b) tiene norma 1. Si (a, b) tiene norma r entonces la multiplicación por $a + ib$ es una rotación seguida de una homotecia por el factor r.



Multiplicación por $a + bi$

El *valor absoluto* o *módulo* del número complejo $z = a + bi$ es la norma del vector (a, b), es decir, $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$. El *argumento* del complejo z es el ángulo ϕ que forma el vector (a, b) con el vector $(1, 0)$, es decir $\phi = tan^{-1}(b/a)$. Observar que el argumento sólo esta bien definido salvo múltiplos de 2π.



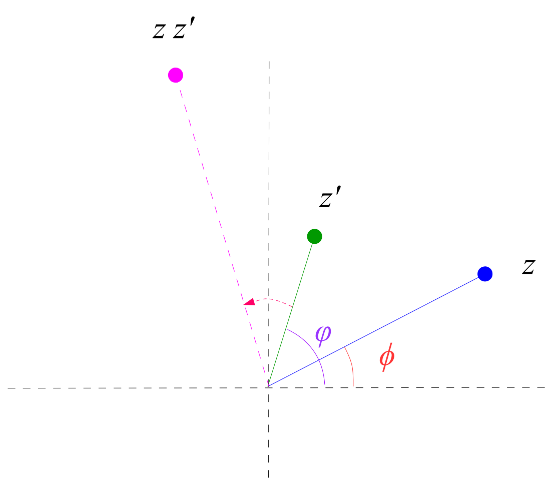


Asi que cada complejo z puede escribirse como:

$z = r(cos\phi + isen\phi)$ donde r es el módulo de z y ϕ es su argumento.

Si z' es otro complejo, $z' = r'(cos\psi + isen\psi)$ entonces la multiplicación por z rota a z' un ángulo ϕ y lo alarga por el factor r, o sea $|zz'| = |z||z'|$ $arg(zz') = arg(z) + arg(z')$ asi que:

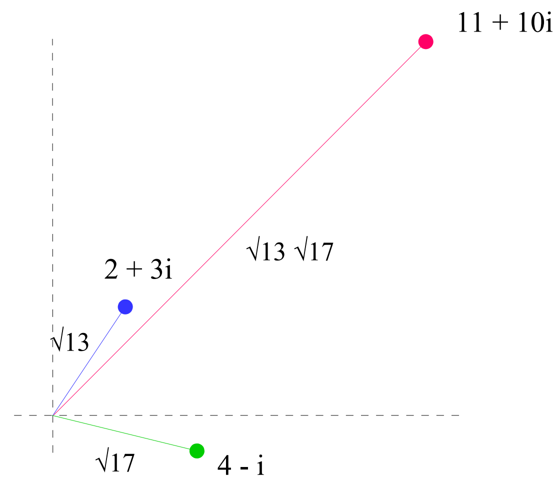
$zz' = rr'(cos(\phi + \psi) + isen(\phi + \psi))$



Ejemplo. Si $z = 2 + 3i$, $z' = 4 - i$ entonces $zz' = 11 + 10i$

$|z| = \sqrt{13}$ $\quad$ $|z'| = \sqrt{17}$ $\quad$ $|zz'| = \sqrt{221} = \sqrt{13}\sqrt{17}$

$\arg(z) = tan^{-1}(\frac{3}{2}) = 0{,}983$ $\quad$ $\arg(z') = tan^{-1}(-\frac{1}{4}) = -0{,}245$ $\quad$ $\arg(zz') = tan^{-1}(\frac{10}{11}) = 0{,}738$



Otra manera de ver que al multiplicar dos complejos sus módulos se multiplican y sus argumentos se suman, es calcular directamente el producto y usar las identidades trigonométricas:

Si $z = r(cos\phi + isen\phi)$ y $z' = r'(cos\psi + isen\psi)$ entonces

$$zz' = r(cos\phi + isen\phi)r'(cos\psi + isen\psi) =$$

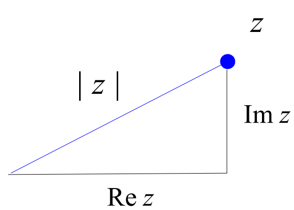
$$= rr'[(cos\phi\ cos\psi - sen\phi\ sen\psi) + i(cos\phi\ sen\psi + sen\phi\ cos\psi)] =$$

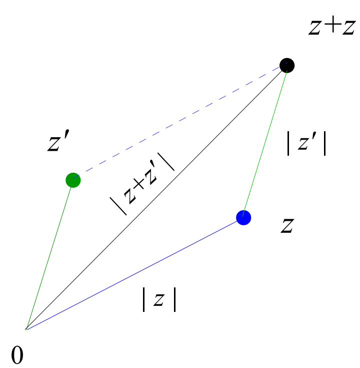
$$= rr'[\qquad cos(\phi + \psi) \qquad + i \qquad sen(\phi + \psi)) \qquad]$$

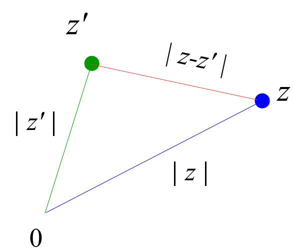
Corolario. Como $zz^{-1} = 1$ entonces $|z||z^{-1}| = 1$ y $arg(z) + arg(z^{-1}) = 0$.

El módulo tiene las siguientes propiedades:

- $|z| = 0 \iff z = 0$
- $|zz'| = |z||z'|$
- $|z/z'| = |z|/|z'|$ siempre que $|z'| \neq 0$
- $|z + z'| \leq |z| + |z'|$ *desigualdad del triángulo*
- $|z - z'| \geq ||z| - |z'||$
- $-|z| \leq \text{Re } z \leq |z|$, $-|z| \leq \text{Im } z \leq |z|$, $|z| < |\text{Re } z| + |\text{Im } z|$







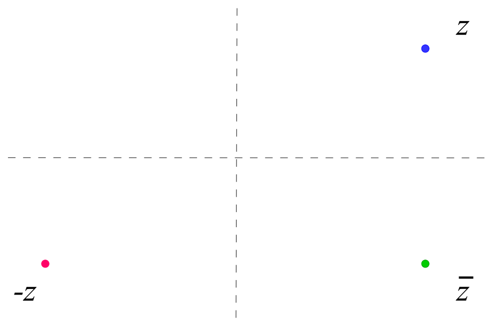
Ejemplos.

$|(2+i)^7| = |2+i|^7 = \sqrt{5}^7$

$|\frac{2+3i}{1-4i}| = |2+3i|/|1-4i| = \sqrt{2^2+3^2}/\sqrt{1^2+4^2} = \sqrt{13/17}$

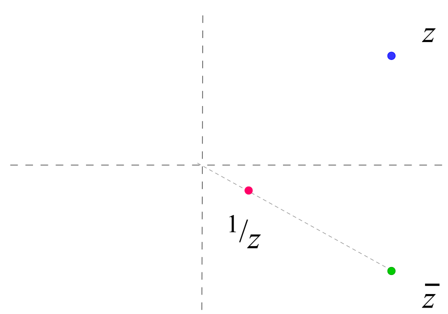
La conjugación compleja

Si $z = a + bi$ es un complejo entonces el *conjugado* de z es el complejo $\bar{z} = a - ib$. Geométricamente la conjugación corresponde a una reflección del plano complejo en el eje real.



La conjugación tiene las siguientes propiedades:

- $\overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w}$
- $\overline{zw} = \overline{z}\ \overline{w}$
- $\overline{z/w} = \overline{z}/\overline{w}$ siempre que $w \neq 0$
- $z\overline{z} = |z|^2$ así que $1/z = \bar{z}/|z|^2$
- z es real si y solo si $\overline{z} = z$
- $\mathrm{Re}z = (z + \bar{z})/2$ y $\mathrm{Im}z = (z - \bar{z})/2$
- $\overline{\overline{z}} = z$



Ejemplo. Si $z = 3 + 2i$ entonces $1/z = \bar{z}/|z|^2 = \frac{3-2i}{13}$

Problemas

6. ¿Que relación hay entre dos números complejos si ...

   a) su producto es real? b) su cociente es real? .

   c) su producto es imaginario puro? d) su cociente es imaginario puro? .

7. Demuestra usando sólamente las definiciones del producto y el módulo que $|zz'| = |z||z'|$.

8. Prueba la identidad del paralelogramo: $|z + z'|^2 + |z - z'|^2 = 2|z|^2 + 2|z'|^2$.
   ¿Que significa geométricamente esta igualdad?

9. Si $\arg(z) = \alpha$ y $\arg(w) = \beta$, cuanto vale...

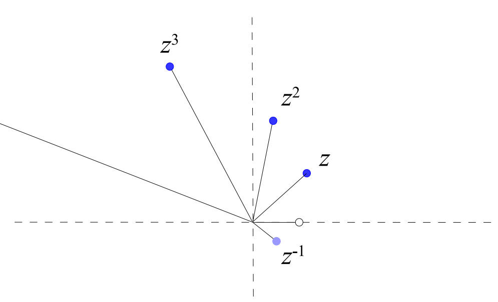
   $\arg(-z)$? $\arg(\bar{z})$? $\arg(1/z)$? $\arg(-1/\bar{z})$? $\arg(w^2)$? $\arg(z/w)$? $\arg(w/z)$?

10. ¿Que relación existe entre $\arg(z)$, $\arg(w)$ y $\arg(z + w)$?

Potencias y raices

Como el producto de dos complejos multiplica sus modulos y suma sus argumentos, entonces para hallar las n-esima potencia de un complejo, hay que elevar su modulo a la potencia n y multiplicar su argumento por n. Esta es la:

Formula de De Moivre: Si $z = r(cos\phi + isen\phi)$ entonces $z^n = r^n(cos(n\phi) + isen(n\phi))$



Inversamente, para hallar una raiz n-esima de un complejo basta con sacarle la raiz n-esima a su modulo y dividir su argumento entre n.

Ejemplos.

Calcula $(1+i)^7$.
$1+i=\sqrt{2}(cos\frac{1}{4}\pi+isen\frac{1}{4}\pi)$ entonces $(1+i)^7=\sqrt{2}^7(cos\frac{7}{4}\pi+isen\frac{7}{4}\pi)=2^{7/2}(1-i)$.

Encuentra una raiz cubica de i.
$i=(cos\frac{\pi}{2}+isen\frac{\pi}{2})$ entonces una raiz cubica de i es $v=cos\frac{\pi}{6}+isen\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2}$

Teorema. Cada número complejo $z\neq 0$ tiene n raices n-esimas complejas.

Demostración. Observar que 1 tiene n raices n-esimas, que son los complejos de módulo 1 y argumentos $2\pi/n$, $4\pi/n$, $6\pi/n$,...$2n\pi/n$. Ahora si un complejo z tiene módulo r y argumento ϕ, entonces el complejo w con módulo $\sqrt[n]{r}$ y argumento ϕ/n es una raiz n-esima de z. Al multiplicar una raiz n-esima de z por las raices n-esimas de 1 se obtienen n raices n-esimas de z.

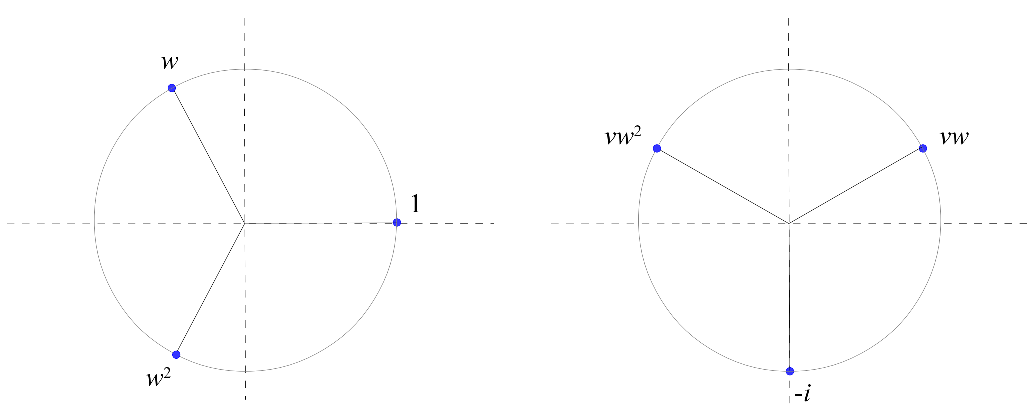
Ejemplo.

Las raices cubicas de 1 son:

$w=cos\frac{2\pi}{3}+isen\frac{2\pi}{3}=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$ $\qquad$ $w^2=cos\frac{4\pi}{3}+isen\frac{4\pi}{3}=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$ $\qquad$ $w^3=1$

Las raices cubicas de i son

$v=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2}$, $\qquad$ $vw=(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2})(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i)=-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{i}{2}$ $\qquad$ $vw^2=(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2})(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i)=-i$



La formula de De Moivre puede usarse para obtener identidades trigonométricas. Por ejemplo, sabemos que para cada angulo θ:

$$cos(3\theta) + isen(3\theta) = (cos\theta + isen\theta)^3 = cos^3\theta + 3icos^2\theta sen\theta - 3cos^2\theta sen\theta - sen^3\theta$$

Así que $\qquad cos(3\theta) = cos^3\theta - 3cos\theta sen^2\theta \qquad sen(3\theta) = 3cos^2\theta sen\theta - sen^3\theta$

Problemas

11. Calcula:
    a) $|(\frac{2+3i}{4-i})^3|$
    b) $\arg(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i)(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i)$
    c) $(\sqrt{3} + \sqrt{5}i)^{-1}$
    d) $(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i)^{99}$
12. Expresa la reflección del plano complejo en el eje imaginario usando la conjugación.
13. Encuentra las raices cúbicas de $-i$.
14. Encuentra todas las soluciones de $z^4 = -1$
15. Demuestra que si z es una raiz compleja de un polinomio P con coeficientes reales, entonces $\bar{z}$ también es raiz de P.
16. Demuestra que si z es una raiz n-esima de la unidad y $n \neq 1$, entonces $z+z^2+z^3+...z^n = 1$
17. Si z_1z_2, z_3 y z_1', z_2', z_3' son numeros complejos, entonces el tríangulo z_1z_2, z_3 es semejante al triángulo $z_1'z_2', z_3'$ si y solo si $\frac{z_1-z_2}{z_1-z_3} = \frac{z_1'-z_2'}{z_1'-z_3'}$.
18. Da una condición necesaria y suficiente para que...
    a) z_1, z_2 y z_3 estén en una línea recta.
    b) z_1, z_2, z_3 y z_4 estén en una línea recta o en un círculo.
19. Si al número complejo z=a+bi le asociamos la matriz $\phi_z = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$ muestra que:
    a) $\phi_{z_1+z_2} = \phi_{z_1} + \phi_{z_2}$
    b) $\phi_{z_1z_2} = \phi_{z_1}\phi_{z_2}$
    c) $\phi_{z^{-1}} = \phi_z^{-1}$
    d) $|z| = 1$ si y solo si $\det\phi_z = 1$