Funciones complejas

Una manera natural de definir funciones complejas es extendiendo las funciones reales. Las funciones reales mas sencillas son las lineales, polinomiales y las racionales (cocientes de polinomios) como

$f(x) = 4x$ $\qquad$ $p(x) = x^4 - 5x^3 + 4x - 2$ $\qquad$ $i(x) = 1/x$ $\qquad$ $r(x) = \frac{x^3+2x^2-x}{x^2+1}$

que pueden extenderse inmediatamente a los complejos ya que solo se necesita la suma, multiplicación y división para definirlas*. También podemos definir funciones lineales, polinomiales y racionales con coeficientes complejos, y estas funciones complejas no son necesariamente extensiones de funciones reales, por ejemplo.

$f(z) = 4z$ $\qquad$ $i(z) = 1/z$ $\qquad$ $q(z) = z^2 + (i-2)z - 3$ $\qquad$ $s(z) = \frac{z+1}{z+i}$

*(excluyendo del dominio los valores de z en los que el denominador se anula).

También es posible extender a los complejos funciones reales no algebráicas, como la exponencial y las funciones trigonométricas, pero hay que tener una definición de las funciones en el caso real que tenga sentido para los complejos. Para esto son muy útiles las series de potencias.

Observar que una vez definidas, todas las funciones complejas pueden combinarse por medio de la composicion, suma y producto para obtener funciones mucho mas complicadas.

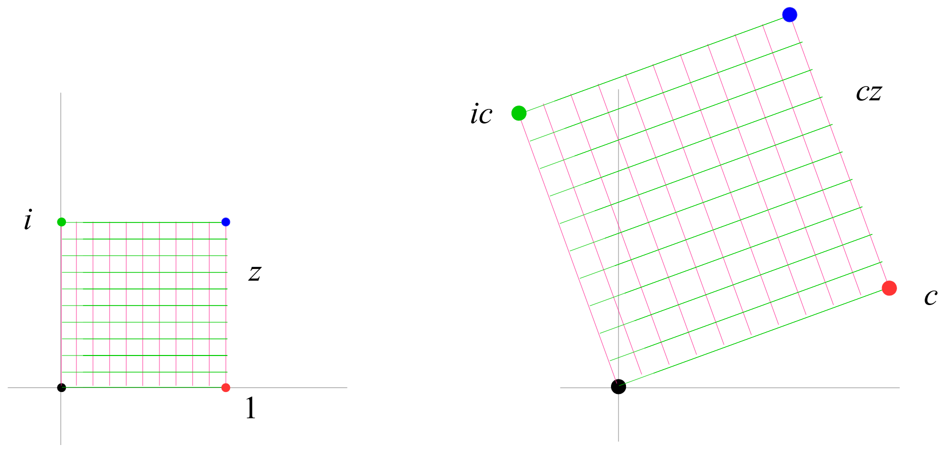
Las funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ pueden visualizarse facilmente por medio de sus graficas, pero para ver las gráficas de funciones de $\mathbb{C}$ en $\mathbb{C}$ necesitariamos ver en 4 dimensiones. Podemos visualizar las funciones complejas pensandolas como funciones de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$, y viendo que le hacen a algunas lineas y curvas del plano.

Funciones lineales

La funcion lineal $l(z) = cz$, donde c es un complejo, puede escribirse como:

$l(x + iy) = (a + ib)(x + iy) = ax - by + (bx + ay)i$

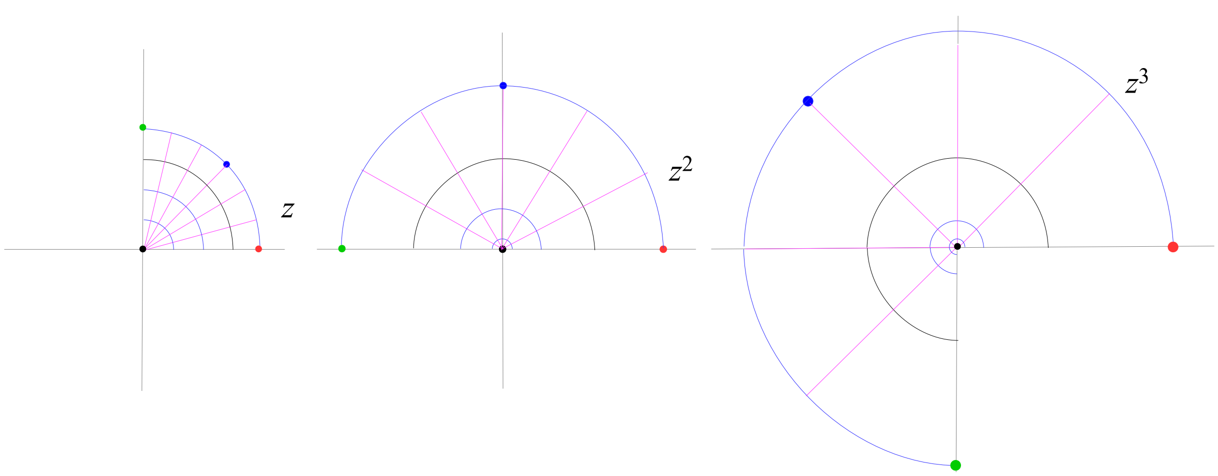
$l(x, y) = (ax - by, bx + ay)$



Asi que las funciones lineales de $\mathbb{C}$ en $\mathbb{C}$ son transformaciones lineales de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$ de un tipo muy especial, ya que sus matrices son ortogonales y por lo tanto preservan ángulos y multiplican todas las longitudes por el mismo factor.

Potencias enteras

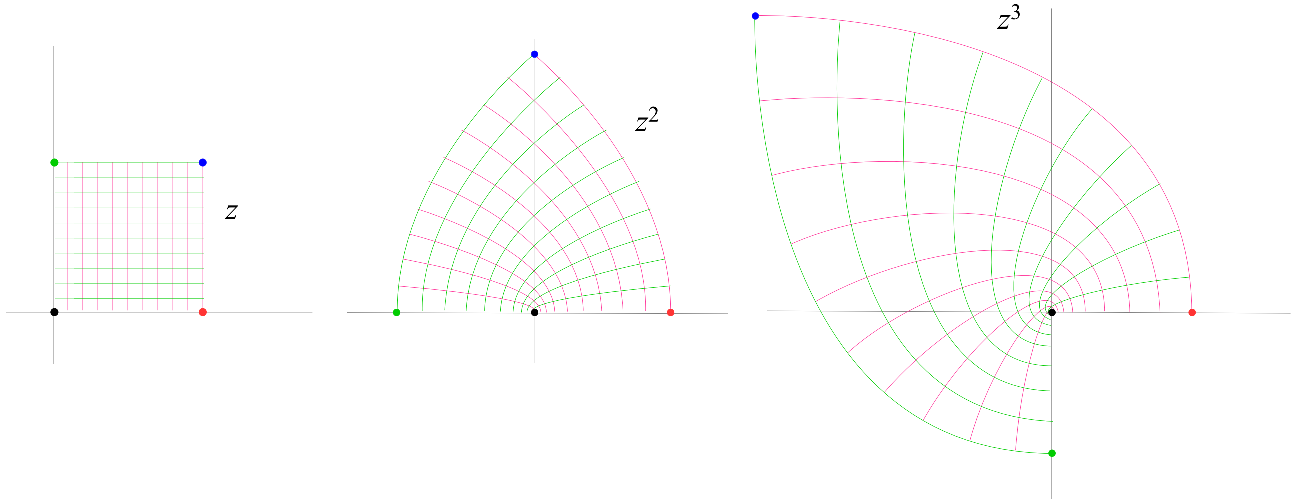
Al elevar un complejo a la potencia entera positiva n su módulo se eleva a la potencia n y su argumento se multiplica por n. Así que z^n manda cada círculo con centro en el origen y radio r al círculo con centro en el origen y radio r^n, y manda cada recta por el origen a otra cuyo ángulo con el eje real es n veces mayor:



Veamos lo que hace la función $s(z) = z^2$ con las rectas horizontales y verticales:

$s(x + iy) = (x + iy)^2 = x^2 - y^2 + 2xyi$ $\qquad$ $s(x, y) = (x^2 - y^2, 2xy)$

Los puntos de una recta horizontal (t, c) van a los puntos $(t^2 - c^2, 2ct)$, que forman una parábola horizontal que abre a la derecha. Los puntos de una recta vertical (c, t) van a los puntos $(c^2 - t^2, 2ct)$, que forman una parábola horizontal que abre a la izquierda.



Veamos ahora lo que hace la función $c(z) = z^3$:

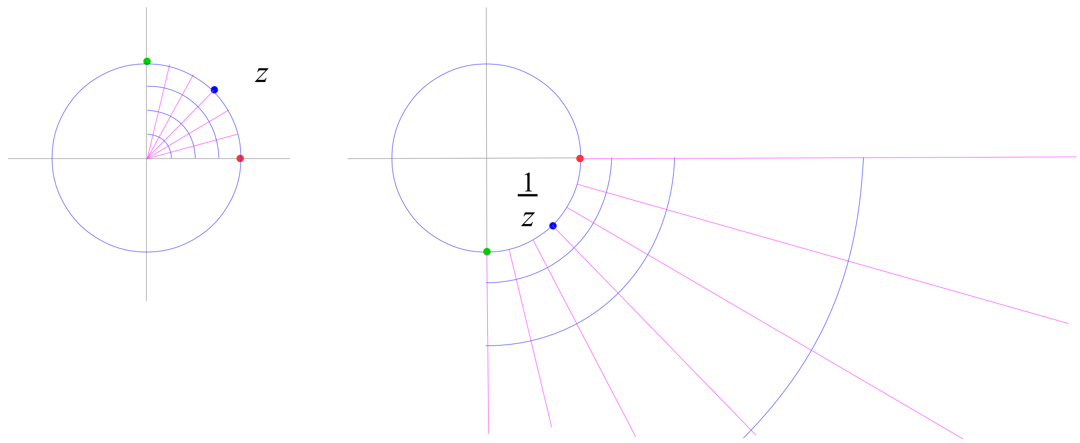
$c(x + iy) = (x + iy)^3 = x^3 + ix^2y - 3xy^2 - iy^3$ $\qquad$ $c(x, y) = (x^3 - 3xy^2, 3x^2y - y^3)$

Los puntos de una recta horizontal (t, c) van a los puntos $(t^3 - 3c^2t, 3ct^2 - c^3)$, que forman una curva de grado 3. Los puntos de la recta vertical (c, t) van a los puntos $(c^3 - 3ct^2, 3c^2t - t^3)$, que forman una curva que es igual a la anterior pero reflejada en la linea y=-x.

Las potencias negativas

Las funciones z^{-n} pueden verse como composiciones de las funciones z^n con la función $1/z$. La función $1/z$ es una función biyectiva de $\mathbb{C} - 0$ en $\mathbb{C} - 0$ que al aplicarse dos veces da la identidad.

Como $1/z = \bar{z}/|z|^2$, el círculo de radio r centrado en el origen va a dar al circulo de radio $1/r$; la región del plano dentro del círculo de radio 1 va a dar a la region afuera del circulo de radio 1, y viceversa; la región del plano arriba del eje real va a dar a la region abajo del eje real, y viceversa. Cada recta por el origen va a la recta reflejada en el eje real.



Veamos ahora que hace $r(z) = 1/z$ con las rectas del plano.

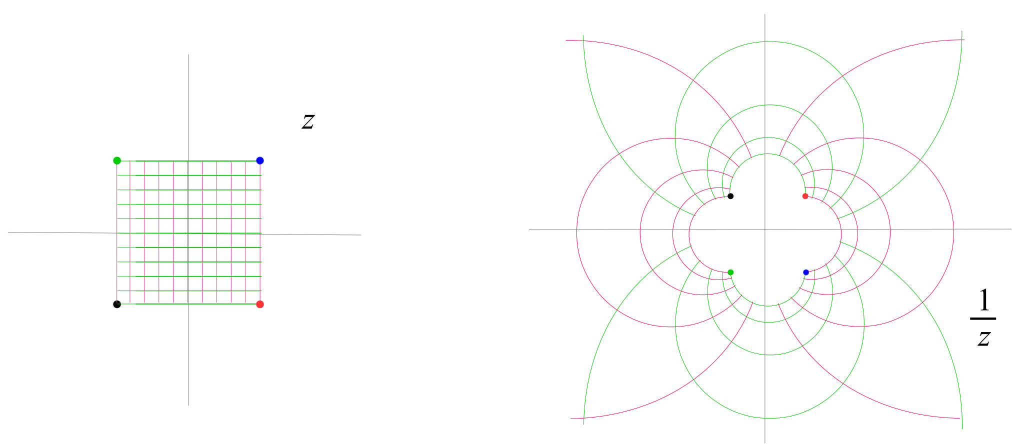
$r(x+iy) = \frac{x-iy}{x^2+y^2}$ o sea $r(x,y) = (\frac{x}{x^2+y^2}, -\frac{y}{x^2+y^2})$

Si $x' = \frac{x}{x^2+y^2}$ $y' = -\frac{y}{x^2+y^2}$ entonces podemos despejar $x = \frac{x'}{x'^2+y'^2}$ $y = -\frac{y'}{x'^2+y'^2}$

Si los puntos (x,y) estan en una recta, satisfacen una ecuación de primer grado $ax+by=c$, reescribiendo la ecuación en terminos de x' y y' obtenemos

$a\frac{x'}{x'^2+y'^2} + b\frac{-y'}{x'^2+y'^2} = c$ asi que $ax' - by' = c(x'^2+y'^2)$ que equivale a

$cx'^2 + cy'^2 - ax' + by' = 0$ y esta es la ecuación de un círculo si $c \neq 0$ (es decir, si la recta original no pasa por el origen) o de una recta, si $c = 0$.



Funciones exponenciales y trigonométricas

La función exponencial real e^x puede calcularse por medio de la serie

$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} + ... + \frac{x^n}{n} + ...$

Como las series también tienen sentido para los números complejos, es natural extender la definición de la exponencial a los complejos haciendo

$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + \frac{z^5}{5!} + ... + \frac{z^n}{n!} + ...$

Para que una función asi esté bien definida, necesitamos que para cada z en $\mathbb{C}$ la serie converja (es decir que al sumar mas y mas términos de la serie su valor se aproxime mas y mas a algún número fijo, que es por definición el valor de la serie), pero de esto nos ocuparemos después.

Las funciones trigonométricas también pueden calcularse por medio de series:

$sen(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - ...$

$cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - ...$

Así que podemos extenderlas a $\mathbb{C}$ usando las mismas series, siempre y cuando podamos mostrar que las series convergen para cada z en $\mathbb{C}$.

En el siglo XVIII Euler vio que al evaluar la exponencial de un imaginario puro obtenia la serie

$$e^{it} = 1 + it + \frac{(it)^2}{2!} + \frac{(it)^3}{3!} + \frac{(it)^4}{4!} + \frac{(it)^5}{5!} + \frac{(it)^6}{6!} + \frac{(it)^7}{7!} + + \frac{(it)^8}{8!} + ...$$
$$= 1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} - \frac{t^6}{6!} + \frac{t^8}{8!} - ... \quad + i(t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - \frac{t^7}{7!} + ...)$$

o sea que $e^{it} = cost + isent$

Esta es la *Identidad de Euler*, que muestra una relación sorprendente entre funciones aparentemente muy distintas, y nos permite escribir a cada número complejo como

$z = re^{i\theta}$ donde $r = |z|$ y $\theta = arg(z)$

Observemos ahora que la ley de los exponentes $e^{a+b} = e^a e^b$ vale para exponentes complejos:

$e^z e^w = (1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + ... + \frac{z^n}{n!} + ...)(1 + w + \frac{w^2}{2!} + \frac{w^3}{3!} + \frac{w^4}{4!} + ... + \frac{w^n}{n!} + ...)$

$= 1 + z + w + \frac{z^2+2zw+w^2}{2!} + \frac{z^3+3z^2w++3zw^2+w^3}{3!} + \frac{z^4+4z^3w+6z^2w^2+4zw^3+w^4}{4!} + ...$

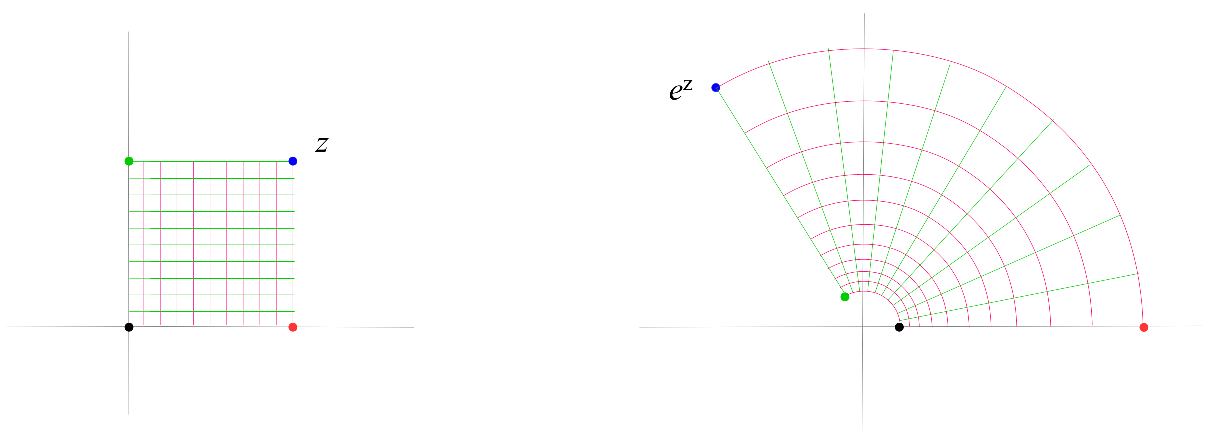
$= 1 + (z + w) + \frac{(z+w)^2}{2!} + \frac{(z+w)^3}{3!} + \frac{(z+w)^4}{4!} + ... = e^{z+w}$

(los terminos de grado n en el producto son $\sum \frac{z^i w^{n-i}}{i!\ n-i!} = \frac{1}{n!} \sum \frac{n!}{i!\ n-i!} z^i w^{n-i} = \frac{1}{n!}(z + w)^n$)

En particular, si $z = a + ib$ con $a, b \in \mathbb{R}$ entonces $e^z = e^{a+ib} = e^a e^{ib} = e^a(cosb + isenb)$

Asi que e^z tiene módulo $e^{\mathrm{Re}z}$ y argumento $\mathrm{Im}z$.

La funcion exponencial envia rectas horizontales a rectas por el origen (porque los puntos (t, c) van a los puntos $e^t(cosc, senc)$), y rectas verticales a círculos centrados en el origen (porque los puntos (c, t) van a los puntos $e^c(cost, sent)$).



Por lo tanto e^z es periódica con periodo $2\pi i$ (los valores de e^z se repiten al sumarle a z múltiplos de $2\pi i$) y la imagen de e^z son todos los números complejos distintos de 0 (tarea).

Las funciones trigonometricas complejas conservan muchas de las propiedades de las funciones trigonométricas reales:

Como $\quad sen(z) = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \frac{z^9}{9!} - ... \quad$ y $\quad cos(z) = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \frac{z^8}{8!} - ...$

entonces $\quad cos(-z) = cos(z) \quad$ y $\quad sen(-z) = -sen(z)$

De la definición de e^x se sigue que la identidad de Euler se generaliza a todos los complejos:

$e^{iz} = cosz + isenz \quad$ y $\quad e^{-iz} = cosz - isenz$

asi que $\quad cos(z) = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2} \quad$ y $\quad sen(z) = \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}$

y como e^z es periódica con periodo $2\pi i$ entonces $cos(z)$ y $sen(z)$ son periódicas de periodo 2π

y además $\quad cos^2(z) + sen^2(z) = (\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2})^2 + (\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i})^2 = \frac{2e^0}{4} + \frac{-2e^0}{-4} = e^0 = 1$

Problemas

1. ¿Cual es la imagen de la función $f(z) = z + \frac{1}{z}$? ¿Cual es la preimagen de 0?

2. Sabemos que $f(x) = x^3$ es una función inyectiva y suprayectiva de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$.
   ¿Se puede decir lo mismo de la función $f(z) = z^3$ de $\mathbb{C}$ en $\mathbb{C}$?

3. Dibuja el conjunto $\{z \in \mathbb{C}/|z| \leq 1, \text{Re}z < 0, \text{Im}z > 0\}$ y su imagen bajo las funciones:
   $m(z) = -z \qquad s(z) = z^2 \qquad i(z) = 1/z \qquad d(z) = 1/z^2$.

4. La identidad de Euler dice que $e^{\pi i} = cos\pi + isen\pi = -1$.
   Evalúa los primeros términos de la serie de $e^{\pi i}$ para ver que tanto se acerca a -1:
   $e^{\pi i} = 1 + i\frac{\pi}{1} - \frac{\pi^2}{2!} - i\frac{\pi^3}{3!} + \frac{\pi^4}{4!} + i\frac{\pi^5}{5!} - \frac{\pi^6}{6!} - i\frac{\pi^7}{7!} + \frac{\pi^8}{8!} + i\frac{\pi^9}{9!} + ...$

5. Muestra que si z es un complejo distinto de 0, entonces existen una infinidad de complejos w tales que $e^w = z$

6. Muestra que $cos(z) = sen(z + \pi/2)$ para todos los valores complejos de z.

7. Demuestra que las funciones $sen(z)$ y $cos(z)$ de $\mathbb{C}$ en $\mathbb{C}$ no son acotadas.

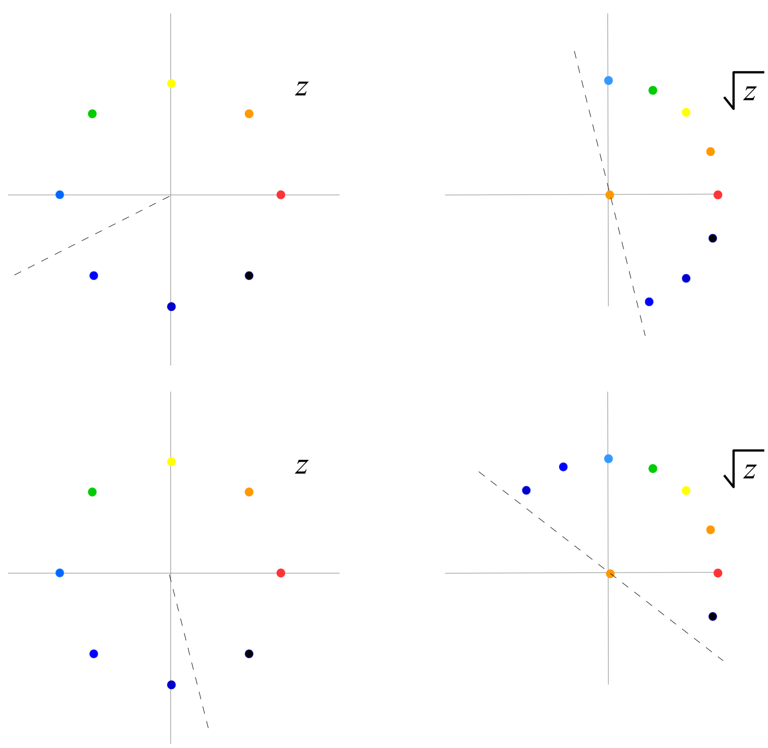
8. Muestra que la función $f(z) = z + \frac{1}{z}$ manda el círculo $|z| = 1$ al intervalo real $[-2, 2]$ y manda cada círculo $|z| = r$ a una elipse si $r > 1$ o a una hipérbola si $r < 1$.

Funciones inversas y funciones multivaluadas

Raices.

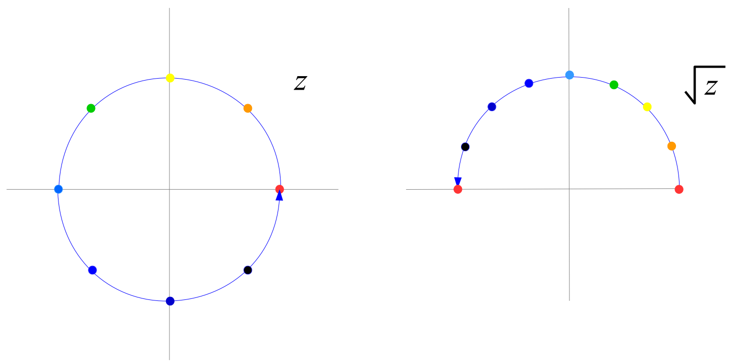
Las funciones reales x^n son funciones biyectivas si n es impar, pero no son ni inyectivas ni suprayectivas si n es par. Asi que en si n es impar x^n tiene una función inversa: $\sqrt[n]{x}$ es el único número real r tal que $r^n = x$. Si n es par entonces la función $\sqrt[n]{x}$ solo tiene sentido para reales positivos y usualmente se define como la raiz positiva de x, pero tambien podria definirse como la raiz negativa.

Las funciones complejas z^n son suprayectivas pero no inyectivas ya que cada complejo $z \neq 0$ tiene n raices n-esimas. Si queremos definir una función $\sqrt[n]{z}$ hay que elegir una de las raices n-esimas para cada complejo z, pero aqui surge un problema porque no hay una elección natural. Sin embargo, z^n es inyectiva en cada región del plano $\{z \in \mathbb{C}/\theta \leq arg(z) < \theta + 2\pi/n,\}$, asi que podemos definir una inversa de z^n que mapee a $\mathbb{C}$ a esa región. Esta es una *rama de la raiz n-esima* $\sqrt[n]{z}$.



Dos ramas de la raiz cuadrada

El problema al definir $\sqrt[n]{z}$ es que no hay manera de elegir la raiz de cada complejo de manera que la función que resulte sea continua en todo $\mathbb{C}$. Para ver esto, tratemos de definir la raiz cuadrada $\sqrt{z}$ de modo que sea una función continua, es decir que al variar un poco el valor de z el valor de la raiz no cambie súbitamente. Si empezamos con un complejo z y elegimos una raiz, llamemosla w, entonces para cada complejo cercano a z deberiamos elegir su raiz cercana a w. En particular, si nos movemos alrededor de un círculo y el argumento de z aumenta por θ, entonces el argumento de la raiz debe aumentar por $\theta/2$. Al dar toda la vuelta alrededor del círculo el argumento de z se incrementa por 2π, y entonces el argumento de w debe incrementarse π, por lo que la raiz w cambia a $-w$, que es la otra raiz. Esto muestra que al dar la vuelta alrededor de 0 $\sqrt{z}$ necesariamente tiene un brinco, y no es continua.



El mismo razonamiento muestra que si tratamos de definir $\sqrt[n]{z}$ de modo que sea continua, entonces al girar z alrededor del origen, el argumento de z aumenta por 2π asi que el argumento de $\sqrt[n]{z}$ debe aumentar por $2\pi/n$, por lo que la raiz no vuelve a su valor original, sino que lo hace como la siguiente raiz.

Logaritmos

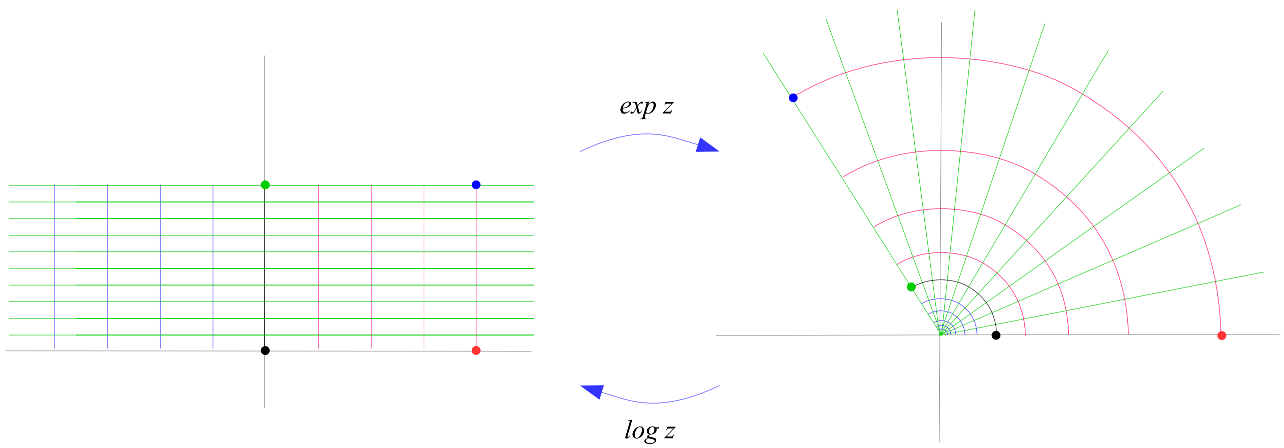
Recordar que la función exponencial real e^x es una función biyectiva de $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}^+$, así que tiene una inversa que va de $\mathbb{R}^+$ a $\mathbb{R}$. La función inversa es el logaritmo, que sólo está definido para números reales positivos: $log(x)$ es el único número real r tal que $e^r = x$.

La función exponencial compleja e^z envia $\mathbb{C}$ a $\mathbb{C} - 0$. Es suprayectiva porque para cada complejo $z \neq 0$, si $a = log|z|$ y $b = arg(z)$ entonces $e^{a+ib} = e^a(cosb + isenb) = |z|(cos(arg(z)) + i\ sen(arg(z))) = z$. Pero la exponencial compleja no es inyectiva porque es periódica: para cada z hay una infinidad de valores de $a + ib$ tales que $e^{a+ib} = z$, en correspondencia con la infinidad de valores del argumento de z, que difieren unos de otros por múltiplos de 2π. Pero la exponencial es inyectiva en cada región del plano de la forma $\{z \in \mathbb{C}/\theta < Im(z) < \theta + 2\pi\}$. En cada una de estas regiones la exponencial es inyectiva y tiene una inversa continua, llamada una *rama del logaritmo.*

Si elegimos un intervalo de longitud 2π para calcular los argumentos de todos los números complejos, entonces podemos definir una rama del logaritmo como:

$log(z) = log|z| + i\ arg(z) \qquad \theta \leq arg(z) < \theta + 2\pi$

El logaritmo asi definido es continuo en $\mathbb{C} - R$ donde R es el rayo $arg(z) = \theta$



Así que cada número complejo tiene una infinidad de logaritmos complejos, que difieren unos de otros por múltiplos de $2\pi i$.

Se sigue de la definición que los logaritmos complejos tienen la propiedad fundamental de los logaritmos reales, salvo por mútiplos de $2\pi i$:

$log(wz) = log(w) + log(z) \quad (mod\ 2\pi i)$

Ejemplos.

$log(-1) = log|-1| + i\ arg(-1) = log1 + i\ \pi = 0 + \pi i$

Los otros valores de $log(-1)$ son $\quad ... - 5\pi i, -3\pi i, -\pi i, \pi i, 3\pi i, 5\pi i, 7\pi i, ...$

$log(1+i) = log|1+i| + i\ arg(1+i) = log(\sqrt{2}) + i\pi/4 = \frac{log(2)}{2} + \frac{\pi}{4}i$

y los otros logaritmos de $1+i$ se obtienen sumándole a este los múltiplos enteros de $2\pi i$.

Potencias complejas

Aunque las funciones z^n y e^z son funciones bien definidas para todos los complejos, otras funciones como $z^{p/q}$ no están bien definidas ya que $z^{1/q} = \sqrt[q]{z}$ tiene q valores posibles y por lo tanto $z^{p/q} = \sqrt[q]{z^p}$ también los tiene. Pero podemos pensarlas como funciones multivaluadas.
Y podemos definir a^b para todos los complejos a y b usando la exponencial y el logaritmo:

$a^b = e^{b\ log(a)}$ para cada valor de $log(a)$

Asi que z^b es una función multivaluada (a menos que b sea entero) y a^z es una familia de funciones (una por cada valor de $log(a)$).

Ejemplos.

$2^i = e^{ilog(2)} = e^{0{,}693i} = cos(0{,}693) + isen(0{,}693) = 0{,}769 + 0{,}639i$ tomando $log(2) = 0{,}6931$,
si tomamos los otros valores de $log(2) = 0{,}6931 + 2n\pi i$ obtenemos
$2^i = e^{i(0{,}6931+2n\pi i)} = e^{-2n\pi+0{,}6931i)} = (e^{-2\pi})^n(0{,}769+0{,}639i)$ que difieren por potencias de $e^{-2\pi}$.

$i^{\sqrt{2}} = e^{\sqrt{2}log(i)} = e^{\sqrt{2}\frac{\pi}{2}i} = e^{2{,}221i} = cos(2{,}221)+isen(2{,}221) = -0{,}605+0{,}796i$ para $log(i) = \frac{\pi}{2}i$,
y para los otros valores de $log(i) = \frac{\pi}{2}i + 2n\pi i$ queda
$i^{\sqrt{2}} = e^{\sqrt{2}(+\frac{\pi}{2}i+2n\pi i} = e^{2{,}221i}e^{2\sqrt{2}n\pi i} = (-0{,}605 + 0{,}796i)(0{,}6325 + 0{,}5131i)^n$

Aún cuando a y b sean reales a^b puede tener una infinidad de valores complejos. Por ejemplo
$3^{\sqrt{2}} = e^{\sqrt{2}log(3)} = e^{1{,}414(1{,}0986+2n\pi i)} = e^{1{,}553}e^{8{,}886ni} = 4{,}7275(0{,}6325 + 0{,}5131i)^n$

Problemas

9. Calcula: e^i, $sen(i)$, $log(-1/e)$, $log(-i)$, $i^{5/3}$, $(-1)^i$, i^i
10. ¿Como son todos los números complejos z tales que e^z es real? ¿imaginario? ¿igual a 1?
11. Demuestra que $log(wz) = log(w) + log(z) \quad (mod\ 2\pi i)$ para todos los complejos z y w.
12. Dibuja las imágenes de las rectas $\mathrm{Re}(z) = 1$ y $\mathrm{Im}(z) = 1$ bajo las funciones:
    a) $(2+i)z$ b) z^2 c) $\sqrt{z}$ d) $1/z$ e) e^z f) $log(z)$
13. Muestra que $f(z) = cos(z)$ manda las rectas verticales a elipses y las rectas horizontales a hipérbolas.
14. Muestra que la función $sen(z)$ definida en la región $-\pi/2 < \mathrm{Re}(z) < \pi/2$ es inyectiva y su imagen es el plano complejo menos los reales con valor absoluto mayor que 1.