Límites y continuidad

Una *sucesión* en $A \subset \mathbb{C}$ es una función que asocia a cada $i \in \mathbb{N}$ un punto $a_i \in A$, y se le denota como $\{a_i\}$. La sucesión $\{a_i\}$ es *acotada* si existe un real r tal que $|a_i| \leq r$ para toda i. La sucesión $\{a_i\}$ *converge* a un punto $a \in \mathbb{C}$ y escribimos $a_i \to a$, si para cada $\epsilon > 0$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $|a_i - a| < \epsilon$ para todo $i \geq n$ (es decir, si la distancia entre a_i y a se hace eventualmente mas pequeña que cualquier número positivo).

Observar que si una sucesión $\{a_i\}$ converge a un complejo a entonces la sucesión es acotada, y toda cota para $\{a_i\}$ es una cota para a. Además, $a_i \to a \quad$ si y solo si $\quad \text{Re } a_i \to \text{Re } a\ $ y $\ \text{Im } a_i \to \text{Im } a \quad$ ya que un complejo es pequeño si y solo si sus partes real e imaginaria son pequeñas.

Lema. Si $\{a_i\}$ y $\{b_i\}$ son sucesiones, $a_i \to a$ y $b_i \to b$ entonces:

- $a_i + b_i \to a + b$
- $a_i b_i \to ab$
- $1/b_i \to 1/b$ siempre que $b \neq 0$
- $a_i/b_i \to a/b$ siempre que $b \neq 0$

La demostración se basa en las siguientes desigualdades:

$|(a_i + b_i) - (a + b)| \leq |a_i - a| + |b_i - b|$

$|a_i b_i - ab| = |(a_i b_i - aib + a_i b - ab| \leq |a_i||b_i - b| + |a - a_i||b| \leq 2|a||b_i - b| + |a - a_i||b| \quad$ para i grande.

$|\frac{1}{b_i} - \frac{1}{b}| = \frac{1}{|bb_i|}|b - b_i| \leq \frac{2}{|bb|}|b - b_i| \quad$ para i grande, si $|b| \neq 0$.

Si $a_i \to a$ y $b_i \to b$ entonces $|a_i - a|$ y $|b_i - b|$ se aproximan a 0, asi que estas cantidades multiplicadas por constantes como $2|a|$ o $|b|$ o $\frac{2}{|bb|}$ y sumadas tambien se aproximan a 0, por lo que los lados derechos de las desigualdades se aproximan a 0, asi que los lados izquierdos tambien deben aproximarse a 0.

Límites y continuidad de funciones

Dada una función $f : A \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ decimos que $lim_{z \to a} f(z) = b$ si para cada $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $|z - a| < \delta$ implica $|f(z) - b| < \epsilon$.

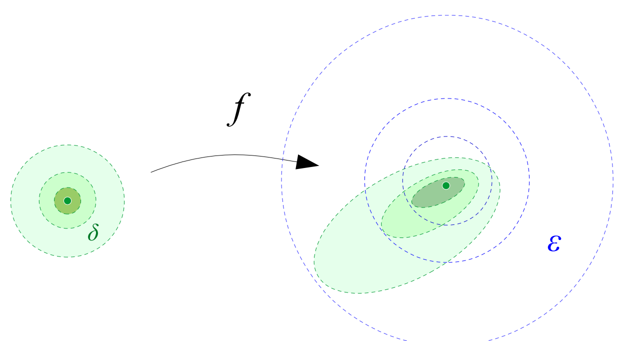
Lema. $lim_{z \to a} f(z) = b$ si y solo si para cada sucesión $\{a_i\}$ en A, $a_i \to a$ implica $f(a_i) \to b$.

Demostración. Si $lim_{z \to a} f(z) = b$, entonces para cada $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $|z - a| < \delta$ implica $|f(z) - b| < \epsilon$. Si $a_i \to a$ entonces hay un n tal que $|a_i - a| < \delta$ para $i \geq n$, asi que $|f(z_i) - b| < \epsilon$ para toda $i \geq n$, asi que $f(z_i) \to b$.
Por otro lado, si $lim_{z \to a} f(z) \neq b$ entonces existe un $\epsilon > 0$ tal que para toda n hay un $z_n \in A$ con $|z_n - a| < 1/n$ y $|f(z_n) - f(a)| > \epsilon$. Asi que $z_n \to a$ pero $f(z_n) \not\to f(a)$.

Ejemplos:

- $lim_{z \to 3} \frac{z^2+z-2}{z-1} = \frac{3^2+3-2}{3-1} = 5$
- $lim_{z \to 1} \frac{z^2+z-2}{z-1} = 3$ ya que $\frac{z^2+z-2}{z-1} = \frac{(z-1)(z+2)}{z-1} = z + 2$ para $z \neq 1$
- $lim_{z \to a} \frac{z}{|z|} = \frac{a}{|a|}$ si $a \neq 0$
- $lim_{z \to 0} \frac{z}{|z|}$ no existe: $\frac{z}{|z|}$ es un complejo unitario en la direccion de z, y z puede aproximarse a 0 en muchas direcciones distintas.

Decimos que una función $f : A \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ es *continua* en un punto $a \in A$ si para cada $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $|z - a| < \delta$ implica $|f(z) - f(a)| < \epsilon$ Decimos que f es continua si es continua en todos los puntos de A.



Corolario. La función $f : A \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ es continua en el punto a si y solamente si para toda sucesión en A, $a_i \to a$ implica que $f(a_i) \to f(a)$.

Ejemplo: La funcion identidad $I(z) = z$ es continua en todos los puntos de $\mathbb{C}$, ya que $a_i \to a$ implica $a_i \to a$. Las funciones constantes $c(z) = z$ son continuas ya que $c \to c$.

Corolario. Si f y g son funciones continuas entonces $f + g$ y fg son continuas. Además $1/g$ y f/g son continuas en todos los puntos donde $g \neq 0$.

La demostración se sigue de los lemas anteriores:
Si f y g son continuas entonces $a_i \to a$ implica $f(a_i) \to f(a)$ y $g(a_i) \to g(a)$ para cada a, por lo tanto:

$f(a_i) + g(a_i) \to f(a) + g(a)$ asi que $(f + g)(a_i) \to (f + g)(a)$

$f(a_i)g(a_i) \to f(a)g(a)$ asi que $fg(a_i) \to fg(a)$

$f(a_i)/g(a_i) \to f(a)/g(a)$ si $g(a) \neq 0$, asi que $f/g(a_i) \to f/g(a)$ siempre que $g(a) \neq 0$.

Ejemplos:

- Los polinomios complejos son funciones continuas en todo $\mathbb{C}$, ya que se obtienen multiplicando y sumando las funciones $Id(z) = z$ y las constantes $c(z) = a$ que son continuas.
- Las funciones racionales, que son los cocientes de polinomios $P(z)/Q(z)$, son continuas en todos los puntos donde están definidas (donde $Q(z) \neq 0$).
- Pregunta: ¿Como mostrarías que e^z es continua?

Lema. La composición de funciones continuas es una función continua.

Demostración. Si f es continua en a entonces $a_i \to a$ implica que $f(a_i) \to f(a)$. Si g es continua en $f(a)$ entonces $f(a_i) \to f(a)$ implica que $g(f(a_i)) \to g(f(a))$.

Ejemplo. Si e^z es continua entonces $cos(z) = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}$ y $sen(z) = \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2}$ son continuas; y $g(z) = \frac{sin^5 z + ze^z + z^7}{e^{senz}}$ es continua en todo $\mathbb{C}$ ya que e^z nunca es 0.

Limites infinitos y la esfera de Riemann

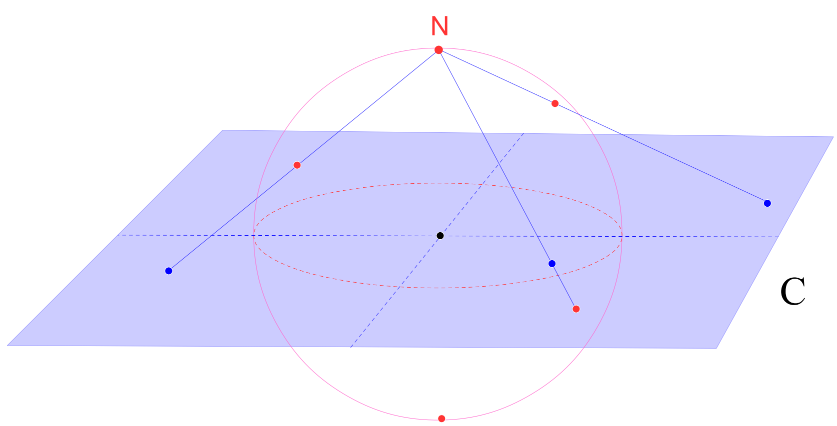
Diremos que una sucesión $\{a_i\}$ converge a infinito ($a_i \to \infty$) si para cada número real r existe n tal que $|a_i| > r$ para todo $i \geq n$.

Diremos que el límite de una función f en el punto a es infinito ($lim_{z\to a}f(z) = \infty$) si $a_i \to a$ implica que $f(a_i) \to \infty$. Diremos que el límite en el infinito de f es b ($lim_{z\to\infty}f(z) = b$) si $a_i \to \infty$ implica que $f(a_i) \to b$.

Ejemplos:

- $lim_{z\to 0}\frac{1}{z} = \infty$ ya que $|z| < 1/n$ implica $|1/z| > n$
- $lim_{z\to\infty}\frac{1}{z} = 0$ ya que $|z| > n$ implica $|1/z| < 1/n$
- $lim_{z\to\infty}\frac{z}{|z|}$ no existe, ya que $\frac{z}{|z|}$ es complejo unitario en la dirección de z y podemos aproximarnos a ∞ en muchas direcciones distintas.
- $lim_{z\to\infty}\frac{z+2}{3z+4} = lim_{z\to\infty}\frac{1+2/z}{3+4/z} = \frac{1}{3}$
- $lim_{z\to -\frac{3}{4}}\frac{z+2}{3z+4} = \frac{-\frac{3}{4}+2}{3-3} = \infty$

Si al plano complejo le añadimos el *punto al infinito* (∞) obtenemos el *plano extendido* $\mathbb{C}^*$. El plano extendido tiene la forma de una esfera, llamada *la esfera de Riemann*, o S^2. La correspondencia entre los puntos del plano extendido y los puntos de la esfera unitaria en $\mathbb{R}^3$ se obtiene proyectando los puntos de la esfera hacia el plano desde el polo norte:



Esta es la *proyección estereográfica* $p : S^2 - \{N\} \to \mathbb{C}$, donde N es el polo norte de S^2).

Observar que una sucesión de puntos a_i en $\mathbb{C}$ converge a un punto en $\mathbb{C}$ si y solo si las imagenes de los a_i en la esfera convergen a un punto distinto de N, y que $a_i \to \infty$ si y solo si las imagenes de los a_i en la esfera convergen a N.

Muchas funciones continuas de $\mathbb{C}$ a $\mathbb{C}$, y aún algunas funciones que no estan definidas en todo $\mathbb{C}$, pueden extenderse a funciones continuas de $\mathbb{C}^*$ a C^*: lo único que necesitamos es que los límites en $\mathbb{C}^*$ existan.

Ejemplos:

- Como para cada polinomio complejo $P(z)$ se tiene que $lim_{z\to\infty}P(z) = \infty$, entonces cada polinomio define una función continua $P : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*$ haciendo $P(\infty) = \infty$.
- Como la función $I(z) = 1/z$ cumple que $lim_{z\to 0}I(z) = \infty$ y que $lim_{z\to\infty}I(z) = 0$ entonces la función $1/z$ se extiende a una función continua de $\mathbb{C}^*$ en $\mathbb{C}^*$ haciendo $I(0) = \frac{1}{0} = \infty$ y $I(\infty) = \frac{1}{\infty} = 0$.
- La función $f(z) = \frac{z+2}{3z+4}$ puede extenderse a una función continua de $\mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*$ si definimos $f(-\frac{3}{4}) = \infty$ y $f(\infty) = \frac{1}{3}$. Se puede mostrar que esta función extendida es biyectiva, viendo que para cada $w \in \mathbb{C}^*$ existe un único $z \in \mathbb{C}^*$ tal que $w = \frac{z+2}{3z+4}$.

Problemas

1. ¿Para cuales valores complejos de z la sucesión $a_n(z) = z^n$ converge? ¿Y la sucesión $b_n(z) = nz^n$? ¿Y la sucesión $c_n(z) = \frac{z^n}{n}$?
2. Demuestra que $lim_{z\to 0}z/\bar{z}$ no existe (muestra que para cada complejo unitario u hay sucesiones $a_i \to 0$ tales que $a_i/\bar{a}_i \to u$, y que hay sucesiones $a_i \to 0$ de modo que $a_i/\bar{a}_i$ no converge a ningún complejo).
3. Calcula los límites de la función $f(z) = \frac{z^2+2z-3}{z^2-3z+2}$ en los puntos $z = 0, 1, 2, -3, \infty$
4. ¿Existen los siguientes límites?
   $lim_{z\to\infty}e^z$? $lim_{z\to\infty}e^{1/z}$? $lim_{z\to 0}\frac{sen(z)}{z}$? $lim_{z\to\infty}\frac{sen(z)}{z}$?
5. Muestra que si $f(z)$ es continua y $f(a) \neq 0$ entonces existe una vecindad de a en la que $1/f(z)$ es continua.
6. ¿Geométricamente, que hacen las funciones $f(z) = z^n$ en la esfera de Riemann? ¿Y la función $1/z$?
7. Muestra que si $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ y $ad-bc \neq 0$ entonces $lim_{z\to\infty}f$ existe y f se extiende a una función continua y biyectiva de $\mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*$.