La derivada compleja

Recordar que una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es *derivable* en un punto $a \in \mathbb{R}$ si $lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ existe. El límite es la *derivada* de f en a y es denotado por $f'(a)$.

Para definir la derivada real solo necesitamos poder restar, dividir y sacar limites, y en los complejos tambien podemos hacerlo, asi que podemos usar la misma definición para la derivada compleja:

Diremos que una función $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ es *derivable* en un punto a en $\mathbb{C}$ si $lim_{z\to a}\frac{f(z)-f(a)}{z-a}$ existe. El límite es la *derivada* de f en a y es denotado por $f'(a)$.

Notar que para que $f'(a)$ exista, $\frac{f(z)-f(a)}{z-a}$ debe aproximarse a un mismo número complejo cuando z se aproxima a a en *todas las direcciones* del plano.

Ejemplos.

- Si $f(z) = z$ entonces

  $f'(a) = lim_{z\to a}\frac{z-a}{z-a} = 1.$

- Si $g(z) = z^2$ entonces

  $g'(a) = lim_{z\to a}\frac{z^2-a^2}{z-a} = lim_{z\to a}\frac{(z-a)(z+a)}{z-a} = lim_{z\to a}z + a = 2a.$

- Si $g(z) = z^n$ entonces

  $g'(a) = lim_{z\to a}\frac{z^n-a^n}{z-a} = lim_{z\to a}\frac{(z-a)(z^{n-1}+az^{n-2}+a^2z^{n-3}+...+a^{n-2}z^1+a^{n-1})}{z-a} =$

  $= lim_{z\to a}z^{n-1} + az^{n-2} + a^2z^{n-3} + ... + a^{n-2}z^1 + a^{n-1} = na^{n-1}.$

- Si $h(z) = 1/z$ entonces

  $h'(a) = lim_{z\to a}\frac{1/z-1/a}{z-a} = \frac{(a-z)/az}{z-a} = lim_{z\to a} - 1/az = -1/a^2$

- Si $c(z) = c$ (una constante) entonces

  $c'(a) = lim_{z\to a}\frac{c-c}{z-a} = 0.$

- Si $h(z) = \bar{z}$ entonces $lim_{z\to a}\frac{\bar{z}-\bar{a}}{z-a}$ no existe, asi que $h(z) = \bar{z}$ no es derivable:

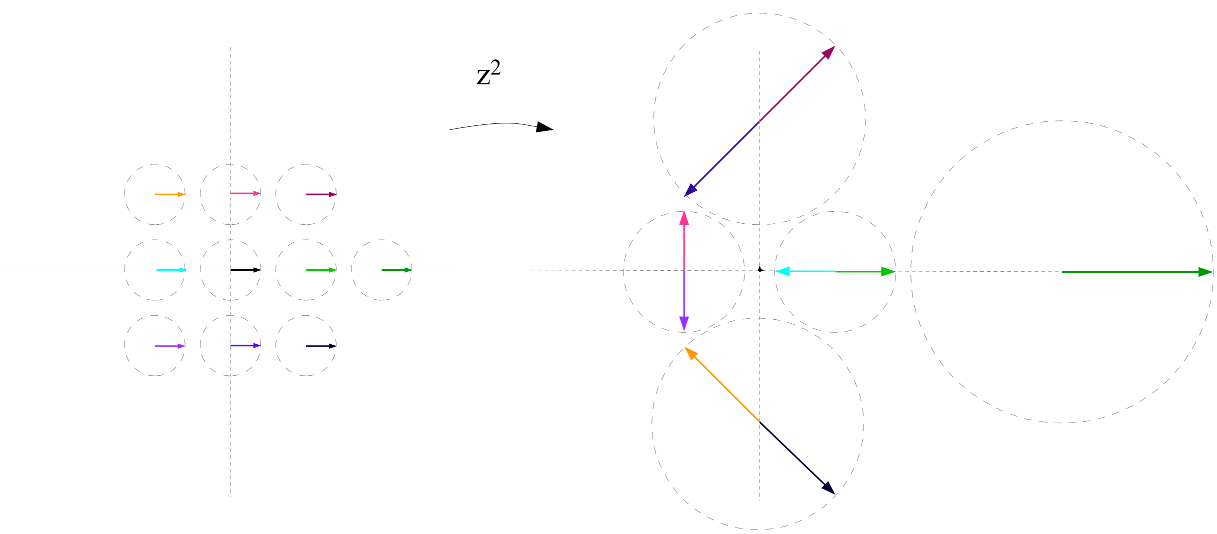
  si z se aproxima a a por la derecha o por la izquierda entonces $z - a$ es real y $\overline{z-a} = z - a$, asi que $\frac{\bar{z}-\bar{a}}{z-a} \to 1$, pero si z se aproxima a a por arriba o por abajo entonces $z - a$ es imaginario y $\overline{z-a} = -z + a$, asi que $\frac{\bar{z}-\bar{a}}{z-a} \to -1$. Como los resultados no coinciden en todas las direcciones el límite no puede existir.

Significado de la derivada

Si $f(x)$ es una función real, el número $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ nos dice por cuanto hay que multiplicar la diferencia entre x y a para obtener la diferencia entre $f(x)$ y $f(a)$. Si el limite $f'(a) = lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ existe, nos da una aproximacion del valor de $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ para los x cercanos a a. Asi que $f'(a)$ mide cuanto estira f a los reales alrededor de a, y nos podemos estimar el valor de $f(x)$ para x cercanos a a como $f(x) - f(a) \approx f'(a)(x-a)$.

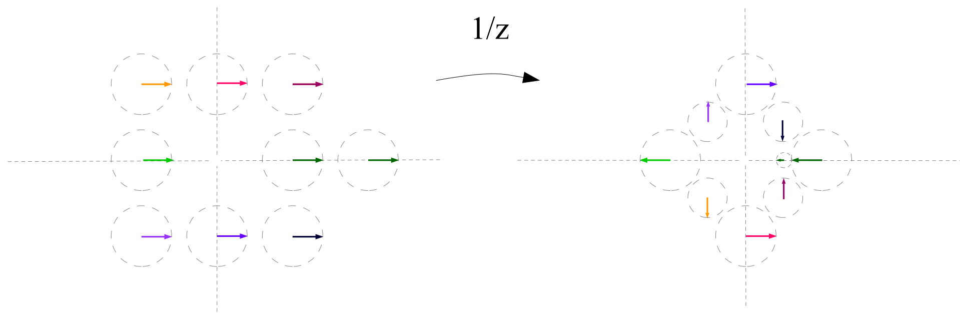
Si $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ es una función compleja, el número complejo $\frac{f(z)-f(a)}{z-a}$ nos dice por cuanto hay que multiplicar (estirar y rotar) la diferencia entre z y a para obtener la diferencia entre $f(z)$ y $f(a)$. Si $f'(a) = lim_{z\to a}\frac{f(z)-f(a)}{z-a}$ existe, nos da una aproximacion del valor de $\frac{f(z)-f(a)}{z-a}$ para las z cercanas a a. Así que $f'(a)$ mide cuanto estira y gira f a los complejos alrededor de a, y podemos estimar el valor de la función $f(z)$ para z cercanos a a como $f(z)-f(a) \approx f'(a)(z-a)$.

Ejemplo. Si $f(z) = z^2$ entonces $f'(z) = 2z$ y el comportamiento infinitesimal de f en algunos puntos puede ilustrarse asi:



- $f'(1) = 2$ asi que para z cerca de 1 $z^2 - 1^2 \approx 2(z-1)$.
- $f'(2) = 4$ asi que para z cerca de 2 $z^2 - 2^2 \approx 4(z-2)$.
- $f'(i) = 2i$ asi que para z cerca de i $z^2 - i^2 \approx 2i(z-i)$.
- $f'(1+i) = 2+2i$ asi que para z cerca de $1+i$ $z^2-(1+i)^2 \approx (2+2i)(z-1-i)$.

Ejemplo. Si $h(z) = 1/z$ entonces $h'(z) = -1/z^2$ y el comportamiento infinitesimal de h en algunos puntos puede ilustrarse asi:



- $h'(1) = -1$ asi que para z cerca de 1 $\frac{1}{z} - \frac{1}{1} \approx -(z-1)$.
- $h'(2) = -\frac{1}{4}$ asi que para z cerca de 2 $\frac{1}{z} - \frac{1}{2} \approx -\frac{1}{4}(z-2)$.
- $h'(i) = 1$ asi que para z cerca de i $\frac{1}{z} - \frac{1}{i} \approx (z-i)$.
- $h'(1+i) = \frac{i}{2}$ asi que para z cerca de $1+i$ $\frac{1}{z} - \frac{1}{1+i} \approx \frac{i}{2}(z-1-i)$.

Funciones analíticas.

Si una función compleja $f(z)$ tiene derivada compleja en todos los puntos de una región A de $\mathbb{C}$ decimos que f es *analítica* en A. Si f es analítica en todo $\mathbb{C}$ decimos que f es *entera*.

Si $f(z)$ es analítica en A entonces $f(z)$ es continua en A, ya que:

$$lim_{z\to a}(f(z) - f(a)) = lim_{z\to a}(z-a)lim_{z\to a}(\frac{f(z)-f(a)}{z-a}) = 0 \cdot f'(a) = 0.$$

Reglas de derivación. Si las funciones f y g son analíticas en la región A entonces las funciones $f+g$ y $f \cdot g$ son analíticas en A. La función f/g es analítica en la región $\{a \in A/g(a) \neq 0\}$. Las derivadas son:

$\cdot$ $(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a)$

$\cdot$ $(fg)'(a) = f(a)g'(a) + f'(a)g(a)$

$\cdot$ $(f/g)'(a) = \frac{f'(a)g(a)-f(a)g'(a)}{g^2(a)}$

Demostración.

$(f+g)'(a) = lim_{z\to a}\frac{f(z)+g(z)-f(a)-g(a)}{x-a} = lim_{z\to a}\frac{f(z)-f(a)}{z-a} + lim_{z\to a}\frac{g(z)-g(a)}{z-a} = f'(a)+g'(a)$

$(f\cdot g)'(a) = lim_{z\to a}\frac{f(z)\cdot g(z)-f(a)\cdot g(a)}{x-a} = lim_{z\to a}\frac{f(z)\cdot g(z)-f(a)\cdot g(z)+f(a)\cdot g(z)-f(a)\cdot g(a)}{x-a} =$

$= lim_{z\to a}\frac{f(z)-f(a)}{z-a}g(z) + lim_{z\to a}f(a)\frac{g(z)-g(a)}{z-a} = f'(a)g(a)+f(a)g'(a)$

$(1/g)'(a) = lim_{z\to a}\frac{1/g(z)-1/g(a)}{x-a} = lim_{z\to a}\frac{g(a)-g(a)/g(a)g(z)}{x-a} = lim_{z\to a}\frac{1}{g(a)g(z)}\frac{g(a)-g(z)}{x-a} = -\frac{1}{g^2(a)}g'(a)$

Asi que $\quad (f/g)'(a) = (f\cdot\frac{1}{g})'(a) = f'(a)\frac{1}{g(a)} - f(a)\frac{g'(a)}{g^2(a)} = \frac{f'(a)g(a)-f(a)g'(a)}{g^2(a)}$ ▲

En particular, los polinomios con coeficientes complejos son funciones analíticas en todo $\mathbb{C}$: si $p(z) = a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + ... + a_1 z + a_0$ entonces $p'(z) = na_n z^{n-1} + (n-1)a_{n-1}z^{n-2} + ... + a_1$.

Las funciones racionales (cocientes de polinomios) son analíticas en todos los puntos de $\mathbb{C}$ donde el denominador no se anula. Las derivadas de funciones racionales son tambien funciones racionales.

Ejemplos.

Si $f(z) = z^{-n}$ entonces $f'(z) = (1/z^n)' = \frac{0z^n - nz^{n-1}}{z^{2n}} = -\frac{n}{z^{n+1}} = -nz^{-n-1}$

Si $h(z) = \frac{z^3+iz}{z^2+4i}$ entonces $h'(z) = \frac{(3z^2+i)(z^2+4i)-(z^3+iz)(2z)}{(z^2+4i)^2} = \frac{z^4+11z^2 i}{(z^2+4i)^2}$

La regla de la cadena: Si f es analítica en la región A y g es analítica en $f(A)$ entonces $g\circ f$ es analítica en A y $(g\circ f)'(a) = g'(f(a))\cdot f'(a)$.

Demostración. $lim_{z\to a}(g\circ f)(a) = lim_{z\to a}\frac{g(f(z))-g(f(a))}{z-a} = lim_{z\to a}\frac{g(f(z))-g(f(a))}{f(z)-f(a)}\frac{f(z)-f(a)}{z-a}$

Como f es analitica en A entonces f es continua en A, asi que $lim_{z\to a}f(z) = f(a)$, por lo tanto

$lim_{z\to a}\frac{g(f(z))-g(f(a))}{f(z)-f(a)} = g'(f(a))$ y ya sabemos $lim_{z\to a}\frac{f(z)-f(a)}{z-a} = f'(a)$.

Ejemplo: Si $f(z) = z^5$ y $g(z) = z^3 + iz - 1$ entonces

$g\circ f(z) = z^{15} + iz^5 - 1 \qquad$ y $\qquad (g\circ f)'(z) = 15z^{14} + 5iz^4 = (3(z^5)^2 + i(z^5))\cdot 5z^4$

$g\circ f(z) = (z^3+iz-1)^5 \qquad$ y $\qquad (g\circ f)'(z) = 5(z^3+iz-1)^4\cdot(3z^2+i)$

La derivada de e^z

La derivada de la funcion exponencial $exp(x) = e^x$, si existe, es

$exp'(a) = lim_{z\to a}\frac{e^z-e^a}{z-a} = lim_{z\to a}\frac{e^a\ (e^{z-a}-1)}{z-a} = e^a\ lim_{z\to a}\frac{e^{z-a}-1}{z-a} = e^a\ lim_{z\to 0}\frac{e^z-1}{z}$.

Asi que para ver que e^z es derivable en cada $a \in \mathbb{C}$ basta mostrar que $lim_{z\to 0}\frac{e^z-1}{z}$ (la derivada de e^z en 0) existe, pero esto no es tan obvio: si nos acercamos a 0 por la recta real entonces hay que calcular $lim_{t\to 0}\frac{e^t-1}{t}$ y si nos acercamos a 0 por el eje imaginario hay que calcular $lim_{t\to 0}\frac{e^{it}-1}{it} = lim_{t\to 0}\frac{cos(t)+i\ sen(t)-1}{it} = lim_{t\to 0}\frac{cos(t)-1}{it} + lim_{t\to 0}\frac{sen(t)}{t}$. Y hay una infinidad de direcciones que no hemos considerado!

Una manera fácil de calcular el límite $lim_{z\to 0}\frac{e^z-1}{z}$ sería recordar que

$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + ... + \frac{z^n}{n!} + ...$

Así que $\frac{e^z-1}{z} = z + \frac{z}{2!} + \frac{z^2}{3!} + ... + \frac{z^{n-1}}{n!} + ...$

y entonces $lim_{z\to 0}\frac{e^z-1}{z} = lim_{z\to 0} z + \frac{z}{2!} + \frac{z^2}{3!} + ... + \frac{z^{n-1}}{n!} + ... = 1$

Aqui hay algo de trampa porque la serie misma es un límite (el limite de las sumas parciales) y estamos calculando límites de límites asumiendo que podemos cambiarlos de orden:

$$lim_{z\to 0}\frac{e^z-1}{z} = lim_{z\to 0}(\tfrac{1}{z}lim_{n\to\infty}\textstyle\sum_1^n \frac{z^k}{k!}) = lim_{z\to 0}\ lim_{n\to\infty}\sum_1^n \frac{z^{k-1}}{k!}$$

$$\stackrel{?}{=} lim_{n\to\infty}\ lim_{z\to 0}\textstyle\sum_1^n \frac{z^{k-1}}{k!} = lim_{n\to\infty}\sum_1^n \frac{0^{k-1}}{k!} = 1$$

Si aceptamos que $lim_{z\to 0}\frac{e^z-1}{z} = 1$ entonces $exp'(a) = e^a\ lim_{z\to 0}\frac{e^z-1}{z} = e^a \cdot 1 = e^a$ asi que la función e^z es analitica en todo $\mathbb{C}$ y su derivada es

$exp'(z) = exp(z)$

Conociendo la derivada de la función exponencial podemos calcular las derivadas de las funciones trigonométricas usando las reglas de derivación y la regla de la cadena:

Como $cos(z) = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}$ y $sen(z) = \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}$ sus derivadas son

$sen'(z) = \frac{ie^{iz}-ie^{-iz}}{2i} = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2} = cos(z)$

$cos'(z) = \frac{ie^{iz}-ie^{-iz}}{2} = -\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i} = -sen(z)$

Ejemplos.

La derivada de $tan(z) = \frac{sen(z)}{cos(z)}$ es $tan'(z) = \frac{cos^2(z)+sen^2(z)}{cos^2(z)} = 1/cos^2(z)$

La derivada de $e^{1/z}$ es $-\frac{1}{z^2}e^{1/z}$

La derivada de $sen(sen(sen(z)))$ es $cos(z) \cdot cos(sen(z)) \cdot cos(sen(sen(z)))$

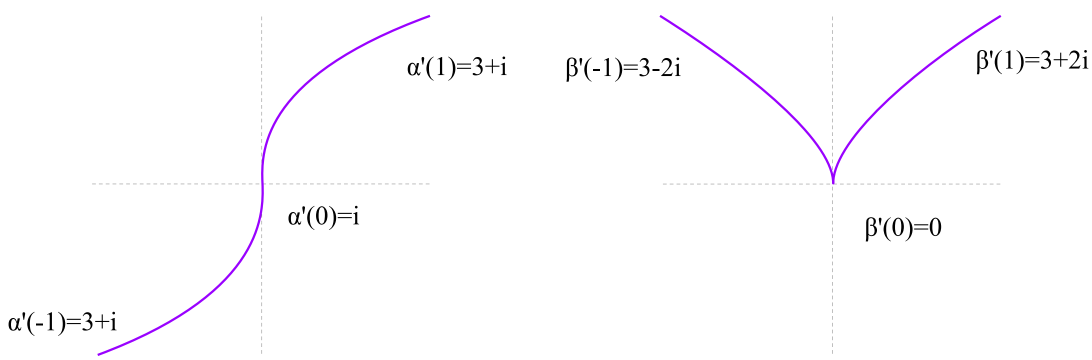
Curvas y funciones conformes.

Una *curva suave por pedazos* en el plano complejo es la imagen de una función continua $\alpha : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{C}$. que es derivable en casi todos los puntos de I. La derivada de α en instante t_0 es

$\alpha'(t_0) = lim_{t\to t_0} \frac{\alpha(t)-\alpha(t_0)}{t-t_0}$.

Como $t - t_0$ es real, $\frac{\alpha(t)-\alpha(t_0)}{t-t_0}$ es un complejo que apunta en la dirección de $\alpha(t_0)$ hacia $\alpha(t)$ y que aproxima la dirección de la curva en el instante t_0. El límite, $\alpha'(t_0)$, en caso de existir y ser distinto de 0, es un complejo que da la dirección exacta de la curva en ese instante.

Ejemplo. $\alpha(t) = t^3+ti$ y $\beta(t) = t^3+t^2i$ son curvas derivables en todos sus puntos: $\alpha'(t) = 3t^2+i$ y $\beta'(t) = 3t^2 + 2ti$. Como α' nunca es 0 entonces α tiene una dirección bien definida en cada punto y no puede tener picos, pero β' se anula en 0, y de hecho β tiene un pico en 0:



El pico de $\beta(t)$ no viene de un cambio brusco en la derivada $\beta'(t)$, ya que $\beta'(t)$ es continua, sino de un cambio brusco en su dirección, que está dada por el complejo unitario $\frac{\beta'(t)}{|\beta'(t)|}$:

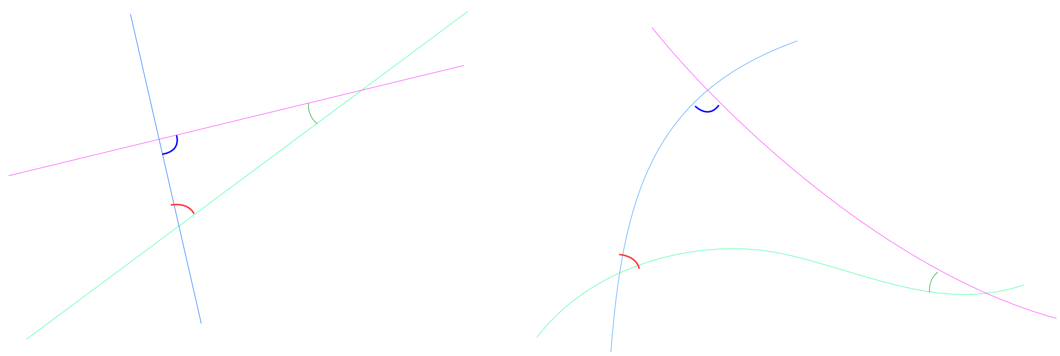
$lim_{t\to 0^+} \frac{\beta'(t)}{|\beta'(t)|} = lim_{t\to 0^+} \frac{3t^2+2ti}{\sqrt{9t^4+4t^2}} = lim_{t\to 0^+} \frac{3t^2+2ti}{t\sqrt{9t^2+4}} = lim_{t\to 0^+} \frac{3t+2i}{\sqrt{9t^2+4}} = \frac{2i}{2} = i$ pero

$lim_{t\to 0^-} \frac{\beta'(t)}{|\beta'(t)|} = lim_{t\to 0^-} \frac{3t^2+2ti}{\sqrt{9t^4+4t^2}} = lim_{t\to 0^-} \frac{3t^2+2ti}{-t\sqrt{9t^2+4}} = lim_{t\to 0^-} \frac{3t+2i}{-\sqrt{9t^2+4}} = \frac{2i}{-2} = -i$

La regla de la cadena, que tambien vale para la composición de funciones reales con una funciones complejas (la demostración es la misma) dice como cambia la dirección de la curva α al aplicarle una función analítica f: $(f \circ \alpha)'(t) = f'(\alpha(t))\ \alpha'(t)$ donde $f'(\alpha(t))$ es la derivada de la función analítica f en el punto $\alpha(t)$. Asi que si α' no se anula y f' no se anula en los puntos de α entonces la derivada de $f \circ \alpha$ tampoco se anula.

Una función analítica f manda curvas sin picos a curvas sin picos, a menos que las curvas pasen por puntos donde $f' = 0$.

Decimos que una función f es *conforme* en una región A del plano si manda a todas las curvas suaves (sin picos) en A a curvas suaves en $f(A)$ y preserva los ángulos de intersección entre ellas.



Teorema. Si f es analítica en una región A entonces f es conforme en todos los puntos de A donde $f'(a) \neq 0$.

Demostración. Sean α y β dos curvas suaves en A que se intersectan en un punto a de A tal que $f'(p) \neq 0$. Las direcciones de α y β en el punto de intersección estan dadas por complejos $\alpha'(t)$ y $\beta'(s)$ (donde $\alpha(t) = a = \beta(s)$), suponiendo que estos complejos son distintos de 0. Las curvas $f \circ \alpha$ y $f \circ \beta$ se intersectan en el punto $f(a)$ y sus direcciones estan dadas por los complejos $f'(a) \cdot \alpha'(t)$ y $f'(a) \cdot \beta'(t)$. Como estos dos complejos se obtienen multiplicando los primeros dos complejos por el complejo $f'(a) \neq 0$, el ángulo entre estos dos complejos es igual al ángulo entre los primeros dos. ▲

En particular, cada función analítica f en $\mathbb{C}$ manda a las familias de rectas horizontales y verticales del plano a dos familias de curvas que se interesectan ortogonalmente, excepto (quizas) en los puntos donde la derivada f' se anula.

Teorema. Si una función f es analítica en una región conexa A y $f'(z) = 0$ para todo $z \in A$ entonces f es constante.

Demostración. Hay que mostrar que $f(a) = f(b)$ para todos los puntos a y b de A. Sea $\alpha : [0,1] \to A$ una curva suave que vaya de a a b. Entonces $g(t) = f \circ \alpha$ es una función de $[0,1]$ en $\mathbb{R}$ que es diferenciable y $g'(t) = (f \circ \alpha)'(t) = f'(\alpha(t))\alpha'(t) = 0$ (ya que $f' = 0$ en todos los puntos de A). Asi que $\int_0^1 g'(t)dt = 0$. Pero $\int_0^1 g'(t) = g(1) - g(0) = f(b) - f(a)$, asi que $f(a) = f(b)$. ▲

Este teorema implica que si dos funciones analíticas tienen la misma derivada en una región conexa, entonces las funciones difieren por una constante.

Problemas

1. Ilustra el comportamiento infinitesimal de la función $p(z) = z^3 - 2z + 1$ cerca de los puntos $z = 0, 1, i$. Haz lo mismo para la función $q(z) = \frac{z-1}{z+1}$.

2. ¿En que región es analítica la función $h(z) = \frac{1}{z+\frac{1}{z}}$? ¿Cuales son los puntos donde h' se anula?

3. Demuestra que si $P(z)$ es un polinomio complejo y $P(c) = 0$ para un complejo c entonces $z - c$ divide a $P(z)$ así que $P(z) = (z - c)P_1(z)$, donde $P_1(z)$ es un polinomio de grado $n - 1$. Concluye que cada polinomio de grado n tiene a lo mas n raices complejas.

4. Si $H(z) = P(z)/Q(z)$ es una función racional con $P(z)$ un polinomio de grado m y $Q(z)$ un polinomio de grado n, ¿A lo mas en cuantos puntos puede no estar definida H? ¿En cuantos puntos puede no ser analítica? ¿En cuantos puntos puede anularse su derivada?

5. Si $f(z) = \frac{z+1}{z+2}$ y $g(z) = \frac{z^2+2iz+1}{z-1}$ Calcula $f \circ g(z)$ y $g \circ f(z)$ y sus derivadas (expresadas como funciones racionales).

6. Encuentra todos los puntos donde la función $P(z) = z^3 + z + 1$ no es conforme. Encuentra dos curvas α y β cuyo ángulo de intersección no se preserva al aplicarles la función P.

7. Sean f y g dos funciones analíticas en una región A.

   ¿Que relación hay entre f y g si $f'(z) = 2g'(z)$ para todo $z \in A$?

   ¿Y si $(f/g)'(z) = 2$ para todo $z \in A$?

8. Demuestra que si f es una función analítica cuya n-esima derivada existe y es 0, entonces f es un polinomio de grado menor que n.

Derivadas reales vs derivadas complejas.

Cada función $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ puede pensarse como una función $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ y viceversa. Es natural entonces preguntarse que relación hay entre las derivadas complejas y las derivada reales de estas funciones.

La definición de la derivada de funciones de varias variables reales no es tan directa como la definición de la derivada de funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$, porque no podemos definir la división entre vectores! En lugar de eso se usa una propiedad de la derivada de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$: la derivada de f en un punto a, en caso de existir, es el único número real r tal que $lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=r$ es decir que $lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)-r(x-a)}{x-a}=0$. Esto dice que la función lineal $r(x-a)$ aproxima tan bien a $f(x)-f(a)$ que la diferencia $|f(x)-f(a)-r(x-a)|$, aun dividida por $|x-a|$, se aproxima a 0 cuando x se aproxima a a.

Esta propiedad de tener una buena aproximación lineal cerca de un punto es la que se usa para definir las derivada funciones de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$:

$f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ es derivable en un punto (a,b) si existe una función lineal L que aproxime a la diferencia $f(x,y)-f(a,b)$ tan bien que

$lim_{(x,y)\to(a,b)}\frac{|f(x,y)-f(a,b)-L(x-a,y-b)|}{|(x-a,y-b)|}=0.$

Es facil ver que hay a lo mas una función lineal L con esa propiedad, si existe se le llama la *derivada* de f en el punto $\bar{a}$ y se le denota por Df.

En los cursos de cálculo se demuestra que si $f(x,y)=(u(x,y),v(x,y))$ y las derivadas parciales de u y v existen y son continuas entonces f es derivable y la matriz de la derivada Df es la matriz:

$$Df=\begin{bmatrix}\frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y}\\ \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y}\end{bmatrix}$$

Ahora observemos que si una función de $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ es derivable (como función compleja) en el punto $a+ib$ entonces:

$lim_{x+iy\to a+ib}\frac{f(x+iy)-f(a+ib)}{x+iy-(a+ib)}=r+is$ para algun complejo $r+is$ y esto equivale a decir que

$lim_{x+iy\to a+ib}\frac{f(x+iy)-f(a+ib)-(r+is)(x+iy-(a+ib))}{x+iy-(a+ib)}=0.$

Asi que si multiplicamos $x+iy-(a+ib)$ por el complejo $r+is$ obtenemos una buena aproximación de $f(x+iy)-f(a+ib)$ para $x+iy$ cerca de $a+ib$.

Pero multiplicar por el complejo $r + is$ corresponde en $\mathbb{R}^2$ a aplicar la función lineal L dada por la matriz $\begin{bmatrix} r & -s \\ s & r \end{bmatrix}$

Asi que podemos reescribir el limite anterior como

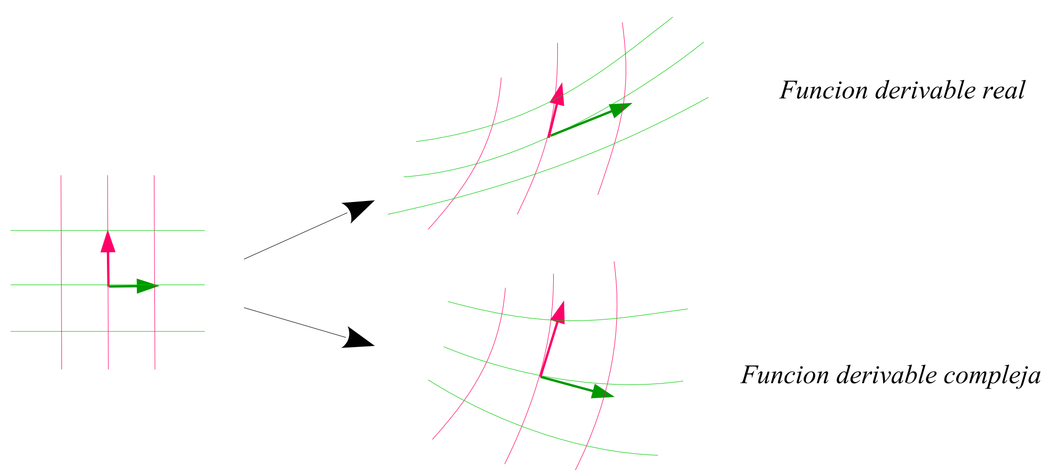
$lim_{(x,y)\to(a,b)} \frac{|f(x,y)-f(a,b)-L(x-a,y-b)|}{(|x-a,y-b)|} = 0.$

Esto dice que la función f es derivable como función de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$ y que la derivada compleja, vista como transformación lineal, da la derivada real. Pero esto también dice que las derivadas complejas son funciones lineales muy especiales porque sus matrices son ortogonales y tienen determinante positivo (multiplican a todos los vectores por el mismo escalar y los giran el mismo ángulo). Asi que una función derivable de $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}^2$ cuya derivada no este dada por una matriz ortogonal no puede ser derivable como función compleja!

Teorema (Cauchy-Riemann). Una función compleja $f(x+iy) = u(x+iy) + iv(x+iy)$ es derivable (como función compleja) si y solamente si $f(x,y) = (u(x,y), v(x,y))$ es derivable como función de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$ y sus derivadas parciales satisfacen:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{y} \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} \qquad \text{(Las ecuaciones de Cauchy-Riemann)}$$

es decir, si su derivada como función real tiene una matriz ortogonal con determinante positivo.



La derivada de $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ envía los vectores $(1,0)$ y $(0,1)$ a los vectores $(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial x})$ y $(\frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial y})$.
Las ecuaciones de Cauchy Riemann dicen que estos vectores son ortogonales y del mismo tamaño.

Demostración. Ya hemos mostrado que las funciones derivables complejas son derivables como funciones reales y que su derivada real tiene matriz ortogonal con determinante positivo.

Ahora si una función $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ es derivable en el punto (a,b) (como función real) y su derivada está dada por una matriz de la forma $Df=\begin{bmatrix} r & -s \\ s & r \end{bmatrix}$

entonces la expresión $lim_{(x,y)\to(a,b)}\frac{|f(x,y)-f(a,b)-Df(x-a,y-b)|}{|(x-a,y-b)|}=0$ puede reescribirse como

$lim_{x+iy\to a+ib}\frac{|f(x+iy)-f(a+ib)-(r+is)(x+iy-a-ib)|}{|x+iy-a-ib|}=0$ lo que equivale a

$lim_{x+iy\to a+ib}\frac{f(x+iy)-f(a+ib)-(r+is)(x+iy-a-ib)}{x+iy-a-ib}=0$

y esto dice que $r+is$ es la derivada compleja de f en el punto $a+ib$ ▲

Ejemplo 1. $f(x+iy)=x^2-y^2+2ixy$

Aqui $u=x^2-y^2$ y $v=2xy$ las dos son funciones reales derivables y

$\frac{\partial u}{\partial x}=2x$ $\quad\frac{\partial v}{\partial x}=2y$ $\quad\frac{\partial u}{\partial y}=-2y$ $\quad\frac{\partial v}{\partial y}=2x$

Asi que se satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann y f es derivable como función compleja.

La derivada de la función real $f(x,y)=(x^2-y^2,2xy)$ es $Df=\begin{bmatrix} 2x & -2y \\ 2y & 2x \end{bmatrix}$

La derivada compleja de $f(x+iy)=x^2-y^2+2ixy$ es $f'(x+iy)=2x+2iy$.

Ejemplo 2. $g(x+iy)=x^2+y^2+2ixy$

Aqui $u=x^2+y^2$ y $v=2xy$ las dos son funciones reales derivables y

$\frac{\partial u}{\partial x}=2x$ $\quad\frac{\partial v}{\partial x}=2y$ $\quad\frac{\partial u}{\partial y}=2y$ $\quad\frac{\partial v}{\partial y}=2x$

Asi que no se satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann y g no es derivable como función compleja.
La derivada de la función real $g(x,y)=(x^2+y^2,2xy)$ es $Dg=\begin{bmatrix} 2x & 2y \\ 2y & 2x \end{bmatrix}$ y no es ortogonal.

Ejemplo 3. $c(x+iy) = x - iy$

Aqui $u = x$ y $v = y$ las dos son funciones reales derivables y

$\frac{\partial u}{\partial x} = 1$ $\frac{\partial v}{\partial x} = 0$ $\frac{\partial u}{\partial y} = 0$ $\frac{\partial v}{\partial y} = -1$

Asi que no se cumplen las ecuaciones de Cauchy-Riemann y $c(x+iy) = x - iy$ no es derivable como función compleja.

La derivada de la función $f(x,y) = (x - y)$ es: $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ que es ortogonal pero tiene determinante negativo.

(esta función es $c(z) = \bar{z}$, que no preserva ángulos, sino que les cambia de signo)

Ejemplo 4. $e(x+iy) = e^x cosy + e^x seny\ i$

Aqui $u = e^x cosy$ y $v = e^x seny$ las dos son funciones reales derivables y

$\frac{\partial u}{\partial x} = e^x cosy$ $\frac{\partial v}{\partial x} = e^x seny$ $\frac{\partial u}{\partial y} = -e^x seny$ $\frac{\partial v}{\partial y} = e^x cosy$

Asi que se satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann y e es derivable como función compleja.

La derivada de la función real $e(x,y) = (e^x cosy, e^x seny)$ es $Df = \begin{bmatrix} e^x cosy & -e^x seny \\ e^x seny & e^x cosy \end{bmatrix}$

La derivada compleja de $e(x+iy) = e^x cosy + e^x seny\ i$ es $e'(x+iy) = e^x cosy + e^x seny\ i$.

(Esta función es $e(z) = e^z$, esto demuestra que es derivable y que su derivada es e^z.)

Ejemplo 5. $h(x+iy) = e^x seny + e^x cosy\ i$ no es derivable como función compleja:

La derivada de la función real $h(x,y) = (e^x seny, e^x cosy)$ es $Dh = \begin{bmatrix} e^x seny & e^x cosy \\ e^x cosy & -e^x seny \end{bmatrix}$ que es ortogonal, pero tiene determinante negativo.

(Esta función es la conjugada de e^z: no preserva ángulos, solo les cambia el signo.)

Teorema de la función inversa. Si f es una función analítica en una vecindad del punto a con derivada continua y $f'(a)$ es distinta de 0, entonces hay una vecindad U de a y una vecindad V de $f(a)$ de modo que $f: U \to V$ es biyectiva y la función inversa $g: V \to U$ es analítica. La derivada de g satisface $g'(w) = \frac{1}{f'(z)}$ para cada $w = f(z)$ en V.

Demostración. Sabemos que si f es analitica en una vecindad de a, antonces f es diferenciable como funcion de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$, y si la derivada compleja de f en un punto p es $r + is$ entonces la derivada real en ese punto está dada por la matriz $Df = \begin{bmatrix} r & -s \\ s & r \end{bmatrix}$

Pero si $r + is \neq 0$ entonces la matriz es invertible, y si $r + is$ es una función continua de p entonces la matriz tambien lo es. Ahora el teorema de la función inversa para funciones en $\mathbb{R}^n$ dice que si una función $f: U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ es derivable en una vecindad de un punto a, y si la derivada Df es continua y $Df(a)$ es invertible, entonces hay una vecindad del punto a donde la función es invertible, la inversa g es diferenciable y $Dg(w) = Df^{-1}(z)$ para $w = f(z)$ en V. Nos falta ver que g es derivable como función compleja, y para esto basta checar que se satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann:

$$Dg(w) = Df^{-1}(z) = \begin{bmatrix} r & -s \\ s & r \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{r}{r^2+s^2} & \frac{s}{r^2+s^2} \\ \frac{-s}{r^2+s^2} & \frac{r}{r^2+s^2} \end{bmatrix}$$

que es una matriz ortogonal con determinante positivo, asi que g es una función derivable compleja y su derivada en cada punto $w = f(z)$ es

$$g'(w) = \frac{r}{r^2+s^2} - \frac{s}{r^2+s^2} i = \frac{1}{r+is} = \frac{1}{f'(z)} \ \blacktriangle$$

Ejemplos.

Si $w(z) = z^4 + z^3 + z^2 + z$ entonces $w'(z) = 4z^3 + 3z^2 + 2z + 1$. En $z = i$, $w = i^4 + i^3 + i^2 + i = 0$ y $w' = 4i^3 + 3i^2 + 2i + 1 = -2 - 2i \neq 0$, asi que la función $w(z)$ es localmente invertible alrededor de $z = i$, la inversa local $z(w)$ es analítica alrededor de $w = 0$ y su derivada en 0 es $z' = \frac{1}{-2-2i}$.

Si $w = z^2$ entonces $\frac{dw}{dz} = 2z$ que no es 0 si z no es 0, asi que $w = z^2$ es localmente invertible en todos los puntos excepto 0 y la inversa local, $z = \sqrt{w}$, es analítica para $w \neq 0$ y su derivada es

$$\frac{1}{dw}\sqrt{w} = \frac{dz}{dw} = \frac{1}{\frac{dw}{dz}} = \frac{1}{2z} = \frac{1}{2\sqrt{w}}$$

Si $w = e^z$ entonces $\frac{dw}{dz} = e^z$, que es distinto de 0 para toda z, asi que $w = e^z$ es localmente invertible alrededor de cada punto, y cada rama de $z = log(w)$ es analítica y su derivada es

$$\frac{1}{dw} log(w) = \frac{dz}{dw} = \frac{1}{\frac{dw}{dz}} = \frac{1}{e^z} = \frac{1}{w}$$

Como cada rama de $log(z)$ es analítica, entonces para cada complejo a la función $z^a = e^{a\ log(z)}$ (definida en la misma región que $log(z)$) es analítica y su derivada es

$\frac{1}{dz}z^a = \frac{1}{dz}e^{a\ log(z)} = e^{a\ log(z)}\frac{a}{z} = ae^{a\ log(z)}e^{-log(z)} = ae^{(a-1)log(z)} = az^{a-1}$

Como $z^{a-1} = e^{a\ log(z)-1}$ nunca es 0, entonces $\frac{1}{dz}z^a = az^{a-1} \neq 0$ si $a \neq 0$, asi que $w(z) = z^a$ es localmente invertible alrededor de cada punto de $\mathbb{C}$ y la inversa local $z(w)$ es analítica.

Problemas

9. Calcula como puedas estos limites, si es que existen:
   $lim_{z\to 1}\frac{log(z)}{z-1}$ $\quad$ $lim_{z\to 0}\frac{tan(z)}{z}$ $\quad$ $lim_{z\to 0}\frac{cos(z)-1}{z}$ $\quad$ $lim_{z\to 0}\frac{cos(z)-1}{z^2}$

10. ¿Cuales de estas funciones complejas son analíticas y cuales no?
    $f(x+iy) = x^3 + 3xy^2 + (3x^2y + y^3)i$
    $h(x+iy) = x^3 + 3xy^2 - (3x^2y + y^3)i$
    $g(x+iy) = x^3 - 3xy^2 + (3x^2y - y^3)i$

11. Calcula las derivadas de las siguientes funciones
    $\sqrt[3]{z}$ $\quad$ 3^z $\quad$ z^{1-i} $\quad$ e^{e^z} $\quad$ z^z $\quad$ $log(sin(z))$

12. ¿En que región del plano es conforme la función $sen(z)$?

13. Calcula las derivadas de $w = sen^{-1}(z)$ y de $w = cos^{-1}(z)$ en donde estén definidas. ($sen^{-1}(z)$ es una inversa local de $sen(z)$, no es $1/sen(z)$).

14. Demuestra que si la función $f(z)$ es analítica en una región $A \subset \mathbb{C}$ entonces la función $g(z) = \overline{f(\bar{z})}$ es analítica en la región $\bar{A}$.

15. Si $w(z) = z^i$, encuentra la inversa local $z(w)$ y comprueba -sin usar el teorema de la función inversa- que $\frac{dz}{dw} = \frac{1}{\frac{dw}{dz}}$

Funciones armónicas

Para que una función $f(x+iy) = u(x+iy) + v(x+iy)i$ sea derivable como función compleja la parte real y la parte imaginaria deben estar relacionadas de una manera especial, ya que

$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \qquad\qquad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}$

Uno puede preguntarse si las funciones $u(x,y)$ y $v(x,y)$ tomadas por separado tienen alguna restricción, o si cualquier funcion derivable $u(x,y)$ puede ser la parte real o imaginaria de una función analítica.

Ejemplo 1. Considerar $u(x,y) = xy$

Si $u(x,y)$ es la parte real de una función analítica y $v(x,y)$ es su parte imaginaria entonces

$\frac{\partial u}{\partial x} = y \quad \Longrightarrow \frac{\partial v}{\partial y} = y \Longrightarrow v(x,y) = \frac{1}{2}y^2 + r(x)$ para alguna función $r(x)$

$\frac{\partial u}{\partial y} = x \Longrightarrow \frac{\partial v}{\partial x} = -x \Longrightarrow v(x,y) = -\frac{1}{2}x^2 + s(y)$ para alguna función $s(y)$.

Si hacemos $v(x,y) = \frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{2}x^2$ se cumplen las dos condiciones, y es facil ver que $u(x,y)$ y $v(x,y)$ satisfacen Cauchy-Riemann asi que son la parte real e imaginaria de una función analítica.

Ejemplo 2. Considerar ahora $u(x,y) = x^2 + y^2$

Si $u(x,y)$ es la parte real de una función analítica y $v(x,y)$ es su parte imaginaria entonces como

$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x \quad \Longrightarrow \frac{\partial v}{\partial y} = 2x \Longrightarrow v(x,y) = 2xy + r(x)$ para alguna función $r(x)$

$\frac{\partial u}{\partial y} = 2y \Longrightarrow \frac{\partial v}{\partial x} = -2y \Longrightarrow v(x,y) = -2xy + s(y)$ para alguna función $s(y)$.

Si existe una $v(x,y)$ que cumpla las dos condiciones entonces $2xy + r(x) = -2xy + s(y)$, asi que $4xy = s(y) - r(x)$ pero si derivamos respecto a x obtenemos $4y = -r'(x)$ que es imposible porque $4y$ no es función de x. Esto prueba que $u(x,y) = x^2 + y^2$ no es la parte real de ninguna funcion analítica.

Las ecuaciones de Cauchy-Riemann no solo dan relaciones entre la parte real e imaginaria de una función analítica, sino que ponen condiciones sobre cada una de ellas:

Si derivamos $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$ respecto a x obtenemos $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial x} = \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x}$

Si derivamos $\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}$ respecto a y obtenemos $\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} = -\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial y}$

Pero sabemos que las derivadas parciales cruzadas son iguales: $\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x}$

asi que $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ o sea $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$

Dada cualquier función $u : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ que es dos veces derivable, definimos el *Laplaciano* de u como:

$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ Si el laplaciano Δu es 0, decimos que u es *armónica.*

Ejemplos.

Si $u(x, y) = x^3 - 3xy^2$ entonces $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 6x - 6x = 0$ así que u es armonica.

Si $v(x, y) = x^3 - 3x^2 y$ entonces $\Delta u = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 6x - 6y \neq 0$ así que v no es armónica.

Y lo que mostramos antes fue:

Teorema. La parte real y la parte imaginaria de una función analítica son funciones armónicas.

Por ejemplo, $f(z) = \frac{1}{z}$ es analítica para $z \neq 0$, asi que su parte real, que es $u(x, y) = \frac{x}{x^2+y^2}$, debe ser armónica (y su parte imaginaria también).

Si dos funciones $u(x, y)$ y $v(x, y)$ son la partes real e imaginaria de una función analítica, decimos que u y v son *conjugadas armónicas.*

No es dificil ver que todas las conjugadas armonicas de una función armónica u difieren por una constante.

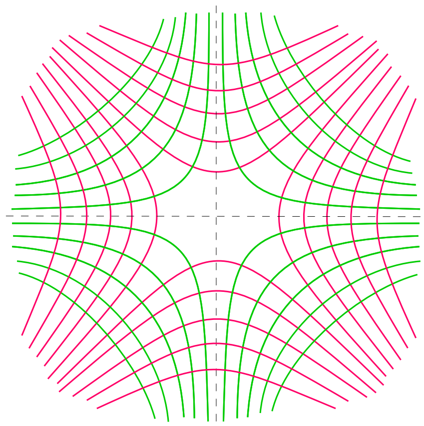
Afirmación. Las curvas de nivel de dos funciones armónicas conjugadas son ortogonales.

Demostracion. Las curvas de nivel de una función diferenciable $u(x, y) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ son ortogonales a su gradiente $\nabla u = (\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y})$. Si u y v son conjugadas armónicas entonces las ecuaciones de Cauchy-Riemann dicen que sus gradientes son ortogonales, asi que sus curvas de nivel deben ser ortogonales.

Ejemplo: $u(x,y) = x^2 - y^2$ y $v(x,y) = 2xy$ son conjugadas armónicas porque son la parte real e imaginaria de $f(z) = z^2$.

Sus gradientes son $\nabla u = (2x, -2y)$ y $\nabla v = (2y, 2x)$ que son ortogonales.

Las curvas de nivel de $u(x,y) = x^2 - y^2$ y $v(x,y) = 2xy$ se ven asi:



Es natural preguntarse si cualquier función armónica tiene una conjugada armónica.

Teorema. Cada función armónica es *localmente* la parte real de una función analítica.

Para demostrar este resultado necesitamos integrales complejas, de las que hablaremos a continuación.

Problemas

16. Cuales de estas funciones son armónicas y cuales no?

$$x^3 + 6x^2y - 3xy^2 - 2y^3 \qquad e^y senx \qquad log(x^2+y^2) \qquad \frac{1}{x^2+y^2}$$

17. Encuentra conjugadas armónicas de las siguientes funciones:

$$x^2 - 6xy - y^2 \qquad e^x seny \qquad \frac{y}{x^2+y^2}$$

18. Demuestra que las derivadas parciales de una función armónica son funciones armónicas (asumiendo que todas las derivadas existen).

19. Si $u(x,y)$ es una función armónica en una región A, entonces $f(x+yi) = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial x} i$ y $g(x+yi) = \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} i$ son funciones analíticas en A