Integración compleja

Aunque la interpretación mas común de la integral (definida) de una función real f es como el área bajo la curva $y = f(x)$ la definición de la integral es independiente de esta interpretación, y la integral puede usarse para calcular muchas cosas que no tienen que ver con áreas.

La propiedad mas importante de la integral real está dada por el Teorema Fundamental del Cálculo, que dice que si una función real $f(x)$ es continua, y si $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ entonces su derivada es $F'(x) = f(x)$. Esto implica que todas las funciones reales continuas tienen antiderivadas.

Las integrales complejas son una generalización de las integrales reales, donde nos olvidamos de la interpretación como área y nos quedamos con la definición como límite de sumas de Riemann, pero reemplazando los números reales por números complejos.

Recordar que para definir la integral de una función continua $f(x)$ en un intervalo $I = [a, b]$, tomamos una partición P del intervalo $[a, b]$ dada por una colección de puntos $a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_{n-1} < x_n = b$, elegimos un r_i en cada subintervalo $[[x_{i-1}, x_i]$ y calculamos la suma $\sum f(r_i)(x_i - x_{i-1}$. La norma de la partición P es $|P| = max\{|x_i - x_{i-1}|\}$. La integral se define como el límite de esta suma cuando la norma de la partición se aproxima a 0:

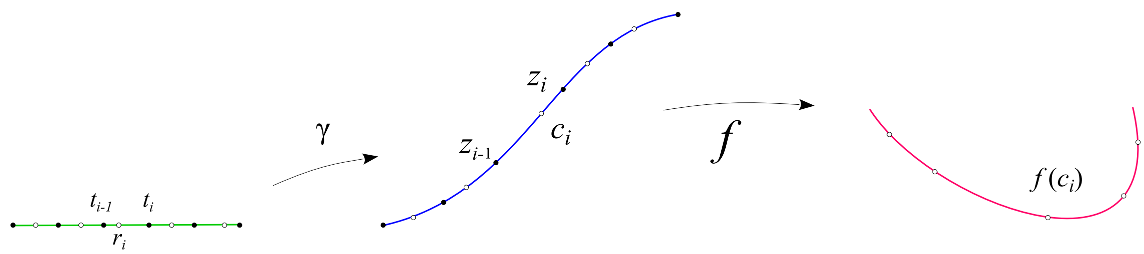
$$\int_I f(x)dx = lim_{|P|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(r_i)(x_i - x_{i-1})$$

Esta misma definición tiene sentido si en lugar de considerar una función real consideramos una funcion compleja $f(z)$, y si en lugar de tomar un intervalo I en $\mathbb{R}$, tomamos una curva γ en $\mathbb{C}$ (que sea suave o al menos suave por pedazos).

La partición del intervalo $I]$ en subintervalos $[x_{i-1}, x_i]$ se convierte en una partición P de la curva γ en arcos que van de un punto z_{i-1} a otro punto z_i y $|P| = max\{|z_i - z_{i-1}|\}$, como en el caso real. La elección de r_i en el intervalo $[x_{i-1}, x_i]$ se convierte en la elección de un punto c_i en el arco de curva que va de z_{i-1} a z_i.
La integral compleja de la función $f(z)$ a lo largo de la curva γ se define como:

$$\int_\gamma f(z)dz = lim_{|P|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)(z_i - z_{i-1})$$

La diferencia es que cada producto $f(c_i)(z_{i-1} - z_{i-1})$ es el producto de dos números complejos.



Si la curva es un intervalo real I y $f = u + iv$ (donde u y v son funciones reales) entonces la integral compleja puede calcularse haciendo dos integrales reales:

$$\int_I f = \int_I u + i \int_I v$$

Veamos ahora que las integrales complejas sobre cualquier curva pueden calcularse usando integrales reales:

Afirmación. Si la curva γ se parametriza como $\gamma : I \to A$ entonces

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_I f(\gamma(t))\gamma'(t)dt$$

Demostración. Comparemos las definiciones de las dos integrales, eligiendo para cada partición P de la curva γ una partición P' del intervalo I de manera que $\gamma(t_i) = z_i$ y $\gamma(r_i) = c_i$.

$$\int_\gamma f(z)dz = lim_{|P|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)(z_i - z_{i-1}) = lim_{|P'|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\gamma(r_i))\ (\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1}))$$

y

$$\int_I f(\gamma(t))\ \gamma'(t)dt = lim_{|P'|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\gamma(r_i))\ \gamma'(r_i)\ (t_i - t_{i-1})$$

Si γ fuera una función real, el teorema del valor medio diría que existe un $r_i \in [t_{i-1}, t_i]$ de modo que $\gamma'(r_i)\ (t_i - t_{i-1}) = \gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})$ y ambas sumas serian iguales. El teorema del valor medio no vale para funciones complejas (tarea). Sin embargo, podemos aplicarlo a la parte real y a la parte imaginaria de $\gamma(t) = x(t) + iy(t)$, para obtener dos numeros r_{i_1} y r_{i_2} tales que $x'(r_{i_1})\ (t_i - t_{i-1}) = x(t_i) - x(t_{i-1})$ y $y'(r_{i_1})\ (t_i - t_{i-1}) = y(t_i) - y(t_{i-1})$.

Como la curva γ es suave, $\gamma'(t) = x'(t) + iy'(t)$ es uniformemente continua, asi que dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $|x'(r_i) - x'(r_{i_1})| < \epsilon$ y $|y'(r_i) - y'(r_{i_2})| < \epsilon$ siempre que $|r_i - r_{i_j}| < \delta$.

Asi que si $|P'| < \delta$ entonces $|\gamma'(r_i)\ (t_i - t_{i-1}) - (\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1}))| < 2\epsilon|t_i - t_{i-1}|$.

Por lo tanto cuando $|P| \to 0$, la diferencia entre las sumas de Riemann debe ser menor que $2M|I|\epsilon$, donde M es una cota superior para f en γ y $|I|$ es la longitud de I. Como ϵ es arbitrario, los limites de las sumas deben ser iguales. ▲

En el cálculo en varias variables reales hay otras integrales a lo largo de curvas: las integrales de línea. Recordar que si $F(x, y) = (u(x, y), v(x, y))$ es una función continua de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$ y $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ es una curva suave, la integral de línea de F a lo largo de γ se define como:

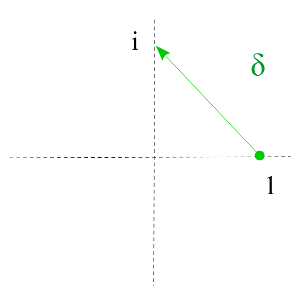
$$\int_\gamma F(s) \cdot ds = \int_I F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)dt = \int_I u(x,y)x'(t) + v(x,y)y'(t)dt = \int_\gamma udx + vdy$$

(donde $\cdot$ es el producto interno de vectores en $\mathbb{R}^2$).

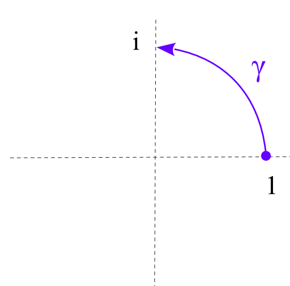
Corolario. Si $z = x + iy$ y $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ entonces

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_\gamma (u + iv)(dx + idy) = \int_\gamma udx - vdy + i\int_\gamma vdx + udy$$

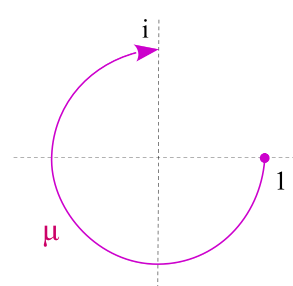
Ejemplo. Calcula las integrales de la función $f(z) = z$ a lo largo de estas 3 curvas:



$\delta(t) = 1 - t + ti$



$\gamma(t) = cos(t) + isen(t)$



$\delta(t) = cos(t) - isen(t)$

$$\int_{\delta} zdz = \int_0^1 (1-t+it)(-1+i)dt = \int_0^1 -1dt + i\int_0^1 1-2tdt = -t\Big|_0^1 + i(t-t^2)\Big|_0^1 = -1+0i$$

$$\int_{\gamma} zdz = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (cos(t)+isen(t))(-sen(t)+icos(t))dt =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} -2cos(t)sen(t) + i\int_0^{\frac{\pi}{2}} cos^2(t) - sen^2(t)dt = cos^2(t)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + i\cos(t)sen(t)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = -1+0i$$

$$\int_{\mu} zdz = \int_0^{\frac{3\pi}{2}} (cos(t)-isen(t))(-sen(t)-icos(t))dt =$$

$$= \int_0^{\frac{3\pi}{2}} -2cos(t)sen(t) + i\int_0^{\frac{3\pi}{2}} -cos^2(t) + sen^2(t)dt = cos^2(t)\Big|_0^{\frac{3\pi}{2}} - i\cos(t)sen(t)\Big|_0^{\frac{3\pi}{2}} = -1+0i$$

Ejemplo. Calcula las integrales de la función $f(z) = \frac{1}{z}$ a lo largo de γ, μ y δ

$$\int_{\gamma} \frac{1}{z}dz = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{cos(t)+isen(t)}(-sen(t)+icos(t))dt =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (cos(t)-isen(t))(-sen(t)+icos(t)) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} i\ dt = it\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2}i$$

$$\int_{\mu} \frac{1}{z}dz = \int_0^{\frac{3\pi}{2}} \frac{1}{cos(t)-isen(t)}(-sen(t)-icos(t))dt =$$

$$= \int_0^{\frac{3\pi}{2}} (cos(t)+isen(t))(-sen(t)-icos(t)) = \int_0^{\frac{3\pi}{2}} -i\ dt = -it\Big|_0^{\frac{3\pi}{2}} = -\frac{3\pi}{2}i$$

$$\int_{\delta} \frac{1}{z}dz = \int_0^1 \frac{1}{(1-t+it)}(-1+i)dt = \int_0^1 \frac{1-t-it}{(1-t)^2+t^2}(-1+i)dt =$$

$$= \int_0^1 \frac{2t-1}{2t^2-2t+1}dt + i\int_0^1 \frac{1}{2t^2-2t+1}dt = ?+?i$$

Moraleja: Al integrar una función compleja sobre distintas curvas con los mismos extremos, el resultado a veces depende de la trayectoria, y a veces no.

Problemas

1. Da un ejemplo que muestre que el teorema del valor medio no vale para funciones derivables complejas.

2. Si c es el círculo unitario recorrido en el sentido opuesto a las manecillas del reloj, calcula

$$a)\ \int_c z^2 dz \qquad b)\ \int_c e^z dz \qquad c)\ \int_c \overline{z} dz$$

3. Calcula la integral de $1/z$ en el círculo de radio r centrado en 0, recorrido en el sentido opuesto a las manecillas del reloj.

4. Calcula $\int_p xdz$ y $\int_q xdz$, donde p es la trayectoria poligonal que va de 0 a 1 a $1+i$ y q es la trayectoria poligonal que va de 0 a i a $1+i$.

Teorema fundamental del cálculo para integrales complejas. Si $F(z)$ es analítica en A y $\gamma : [a,b] \to A$ es una curva suave, entonces

$$\int_\gamma F'(z)dz = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))$$

Demostración.

Si $\gamma : [a,b] \to A$ y $F(\gamma(t)) = u(t) + iv(t)$ entonces por la regla de la cadena

$F'(\gamma(t))\gamma'(t) = (F(\gamma(t)))' = u'(t) + iv'(t)$ por lo tanto

$$\int_\gamma F'(z)dz = \int_a^b F'(\gamma(t))\ \gamma'(t)dt = \int_a^b u'(t) + iv'(t)dt$$

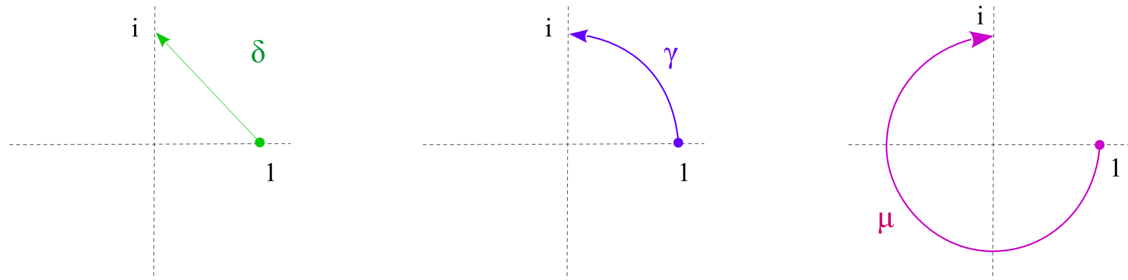
y por el Teorema fundamental del calculo (real)

$$\int_a^b u'(t)dt + i\int_a^b v'(t)dt = u(b) - u(a) + iv(b) - iv(a) = F(\gamma(b)) - f(\gamma(a))$$

▲

Observación. El teorema fundamental del cálculo vale tambien para las curvas suaves por pedazos, porque la integral en la curva completa es la suma de las integrales en los pedazos.

Ejemplo. Calculemos otra vez las integrales de la función z en las curvas δ, γ y μ:



Como z es la derivada de $z^2/2$ en todo $\mathbb{C}$ entonces

$$\int_\delta z dz = \int_\gamma z dz = \int_\mu z dz = \frac{1}{2} z^2 \bigg|_1^i = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} = -1$$

Ejemplo. Calculemos ahora las integrales de la función $1/z$ en las curvas δ, γ y μ.

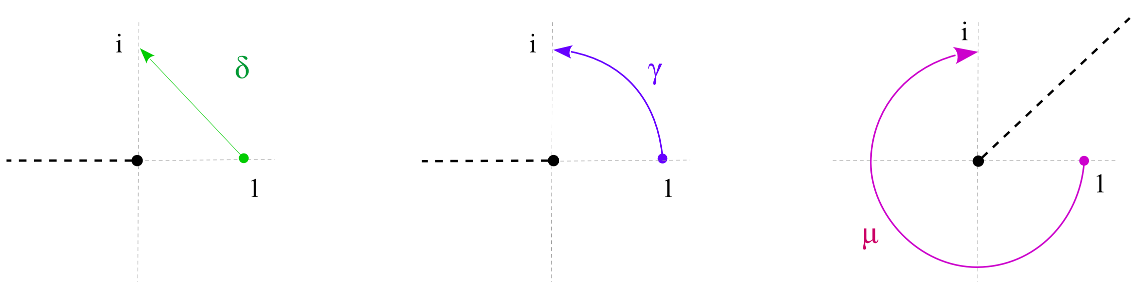
$1/z$ es la derivada de $log(z)$ en cada región de $\mathbb{C} - 0$ donde $log(z)$ pueda definirse de manera continua, es decir, en cada rama de $log(z)$.

Una rama de $log(z)$ definida en δ y γ es $log(z) = log|z| + i\ arg(z)$ con $-\pi < arg(z) < \pi$

$$\int_\delta \frac{1}{z} dz = \int_\gamma \frac{1}{z} dz = log(z)\bigg|_1^i = log|i| + i\ arg(i) - (log(1) + i\ arg(1) = 1 + \frac{\pi}{2} i - (0 + 0i) = \frac{\pi}{2} i$$

Una rama del logaritmo definida en μ es $log(z) = log|z| + i\ arg(z)$ con $-\frac{7\pi}{4} < arg(z) < \frac{\pi}{4}$

$$\int_\mu \frac{1}{z} dz = log(z)\bigg|_1^i = log|i| + i\ arg(i) - (log(1) + i\ arg(1) = 1 - \frac{3\pi}{2} i - (0 + 0i) = -\frac{3\pi}{2} i$$



$-\pi < arg(z) < \pi$

$-\frac{7\pi}{4} < arg(z) < \frac{\pi}{4}$

El teorema fundamental del cálculo para integrales complejas implica que si $F(z)$ es analítica en una región A y c es cualquier curva cerrada en A entonces

$$\int_c F'(z)dz = 0$$

ya que los valores de F en los extremos de c, que son los mismos, se cancelan.

Ejemplos.

Si $P(z)$ es un polinonio complejo y c es cualquier curva cerrada en $\mathbb{C}$ entonces $P(z) = Q'(z)$ donde Q es otro polinomio complejo, asi que

$$\int_c P(z)dz = \int_c Q'(z)dz = Q(p) - Q(p) = 0 \qquad \text{(donde } p \text{ es un punto de } c\text{)}$$

Para $n \neq 1$ y para cualquier curva cerrada c en $\mathbb{C} - 0$

$$\int_c \frac{1}{z^n} dz = 0$$

ya que $\frac{1}{z^n}$ es la derivada de $\frac{-1}{(n-1)z^{n-1}}$ para toda $z \neq 0$.

Sin embargo, para muchas curvas cerradas en $\mathbb{C} - 0$,

$$\int_c \frac{1}{z} dz \neq 0$$

ya que $1/z$ es la derivada de $log(z)$ solo en las regiones de $\mathbb{C} - 0$ donde $log(z)$ puede definirse de manera continua (es decir, en los dominios de las distintas ramas de $log(z)$).

Por ejemplo, si c es un círculo cuyo interior no contiene a 0 entonces

$$\int_c \frac{1}{z} dz = 0$$

ya que c está contenida en el dominio de una rama de $log(z)$.
Pero si c es un círculo cuyo interior si contiene a 0 entonces

$$\int_c \frac{1}{z} dz = \pm 2\pi i$$

(el signo depende de la orientación de c) como puede calcularse partiendo a c en dos arcos de modo que cada uno esté en el dominio de una rama de $log(z)$.

Problemas

5. Si s y s' son los dos semicírculos que van de 1 a -1, calcula

$$a)\quad \int_s sen(z)dz \qquad\qquad b)\quad \int_{s'} sen(z)dz$$

6. Calcula

$$a)\quad \int_s 1/\sqrt{z}\ dz \qquad\qquad b)\quad \int_{s'} 1/\sqrt{z}\ dz$$

7. Calcula las integrales de $1/z$

   a) En el segmento de linea recta que va de $-3-i$ a $2+i$.

   b) En el círculo de radio 6 con centro en $5+4i$

8. Demuestra que $\left|\int_\gamma f(z)dz\right| \leq ML$ donde M es una cota para f y L es la longitud de γ.

Si γ es una curva suave por pedazos y $-\gamma$ es la curva recorrida en sentido inverso, entonces por la definición de la integral

$$\int_{-\gamma} f(z)dz = -\int_\gamma f(z)dz$$

Si δ es otra curva suave por pedazos que empieza donde termina γ, y $\gamma+\delta$ es la curva que se obtiene recorriendo δ despues de γ, entonces

$$\int_{\gamma+\delta} f(z)dz = \int_\gamma f(z)dz + \int_\delta f(z)dz$$

Teorema (Independencia de la trayectoria). Si f es una funcion compleja continua en una región $A \subset \mathbb{C}$, entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. El valor de la integral $\int_\gamma f(z)dz$ no depende de la curva γ, solo de sus extremos.
2. Para toda curva cerrada c en A, $\int_c f(z)dz = 0$
3. Existe una función analítica F en A tal que $F'(z) = f(z)$.

Demostración.

($1 \Leftrightarrow 2$) Si γ y δ son dos curvas con los mismos extremos, entonces $\gamma - \delta$ es una curva cerrada, y

$$\int_{\gamma-\delta} f(z)dz = \int_{\gamma} f(z)dz - \int_{\delta} f(z)dz$$

Asi que las integrales de f en γ y en δ son iguales si y solo si la integral en la curva cerrada $\gamma - \delta$ es 0.

($3 \Rightarrow 1$) Por el teorema fundamental del cálculo para integrales complejas.

($1 \Rightarrow 3$) Dada una función $f(z)$ que es continua en A y cuyas integrales solo dependen de donde empiezan y donde terminan las curvas, debemos hallar una función $F(z)$ cuya derivada sea $f(z)$. Fijemos un punto z_0 en A y definamos

$$F(z) = \int_{\gamma_z} f(\zeta)d\zeta$$

donde γ_z es cualquier curva suave por pedazos que vaya de z_0 a z. $F(z)$ está bien definida porque la integral no depende de la curva. Falta probar que $F(z)$ es derivable y que $F'(z) = f(z)$, y para eso necesitamos ver si

$$lim_{w\to z} \frac{F(w) - F(z)}{w - z} - f(z) = 0$$

El punto z tiene una vecindad redonda U contenida en A. Fijemos un camino γ_z de z_0 a z y para cada $w \in U$ elijamos el camino $\gamma_w = \gamma_z + r_w$ donde r_w es el camino en línea recta de z a w. Entonces

$$F(w) - F(z) = \int_{\gamma_w} f(\zeta)d\zeta - \int_{\gamma_z} f(\zeta)d\zeta = \int_{r_w} f(\zeta)d\zeta$$

$$F(w) - F(z) - f(z)(w - z) = \int_{r_w} f(\zeta)d\zeta - f(z)\int_{r_w} 1d\zeta = \int_{r_w} f(\zeta) - f(z)d\zeta$$

Como f es continua en z, dado $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $|\zeta - z| < \delta \implies |f(\zeta) - f(z)| < \epsilon$

Si $|w - z| < \delta$ entonces $|\zeta - z| < \delta$ para toda $\zeta \in r_w$ y por lo tanto $|f(\zeta) - f(z)| < \epsilon$, asi que

$$\left| \int_{r_w} f(\zeta) - f(z)d\zeta \right| \leq \epsilon\ |w - z| \qquad \text{ya que } r_w \text{ tiene longitud } |w - z|$$

y por lo tanto

$$\left| \frac{F(w) - F(z)}{w - z} - f(z) \right| = \left| \frac{F(w) - F(z) - f(z)(w - z)}{w - z} \right| < \frac{\epsilon\ |w - z|}{|w - z|} = \epsilon$$

Como esto es cierto para cada $\epsilon > 0$ en una vecindad U de z entonces

$$lim_{w\to z} \frac{F(w) - F(z)}{w - z} - f(z) = 0 \qquad \text{asi que} \qquad F'(z) = lim_{w\to z} \frac{F(w) - F(z)}{w - z} = f(z)$$

. ▲