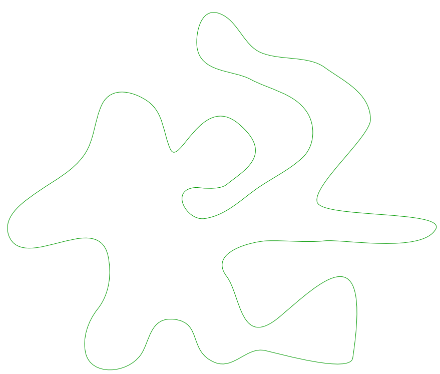
El Teorema de Cauchy

Decimos que una curva c es *cerrada* si termina en el mismo punto donde empieza. Decimos que una curva c es *simple* si no tiene autointersecciones. Uno de los primeros teoremas de topología del plano, descubierto por sus aplicaciones al cálculo complejo, es el siguiente:

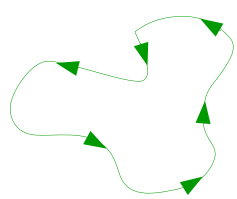
Teorema de Jordan. Cada curva simple cerrada divide al plano en dos regiones conexas, llamadas el *interior* y el *exterior* de c, de las que c es frontera común.



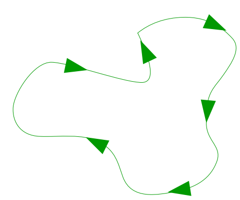
Una curva simple c

El interior de c

Cada curva admite 2 orientaciones. Decimos que una curva simple está *orientada positivamente* si su orientación es contaria a la de las manecillas del reloj.



Orientación positiva



Orientacion negativa

El Teorema de Cauchy contesta una pregunta fundamental del cálculo complejo:

¿Cuando es cierto que la integral de una función analítica f en una curva cerrada es 0?

Sabemos que esto ocurre si f tiene una antiderivada definida en toda la curva, y que a veces no ocurre, por ejemplo con la integral de $1/z$ a lo largo de un círculo con centro en el origen.

Teorema De Cauchy. Si c es una curva simple cerrada, y $f(z)$ es una función continua en c y $f(z)$ es analítica con derivada continua en el interior de c entonces

$$\int_c f(z)dz = 0$$

Demostracion. En las notas anteriores mostramos que las integrales complejas pueden calcularse como integrales de linea: Si $z = x + iy$ y $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ entonces

$$\int_c f(z)dz = \int_c (u + iv)(dx + idy) = \int_c udx - vdy + i \int_c vdx + udy$$

Recordar ahora el **Teorema de Green** para integrales reales: Si c es una curva simple cerrada orientada positivamente y M y N son funciones reales continuas en c y derivables con derivadas parciales continuas en la región interior R de c, entonces

$$\int_c Mdx + Ndy = \iint_R (\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y})\ dxdy$$

Si aplicamos el Teorema de Green a las funciones $M = v$ y $N = u$ obtenemos

$$\int_c vdx + udy = \iint_R (\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y})\ dxdy$$

y si lo aplicamos a $M = u$ y $N = -v$ queda

$$\int_c udx - vdy = \iint_R (-\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y})\ dxdy$$

Pero por las ecuaciones de Cauchy Riemann $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$ y $\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}$, asi que las dos integrales de la derecha son 0. ▲

Ejemplo. Si c es cualquier curva simple cerrada en el plano entonces

$$\int_c e^{z^2}\ dz = 0$$

ya que $f(z) = e^{z^2}$ es analítica en todo $\mathbb{C}$.

Ejemplo. Si c es una curva simple cerrada cuyo interior *no* contiene al origen entonces

$$\int_c 1/z\ dz = 0$$

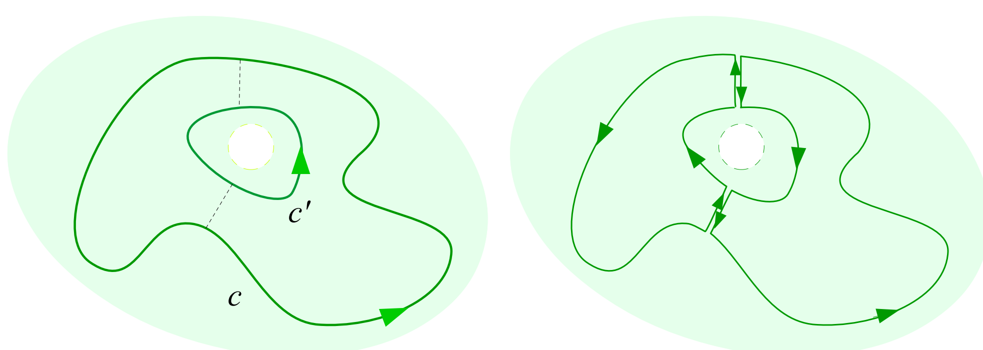
ya que $1/z$ es analítica en $\mathbb{C} - 0$. Pero si el interior de c sí contiene a 0 entonces la integral *no* es 0, como veremos mas adelante.

El Teorema de Cauchy puede aplicarse también, con cuidado, a curvas cerradas que no son simples, pero que pueden partirse en curvas cerradas simples.

La orientación de la curva c induce una orientación en cada uno de las curvas partidas, y puede verse de la definición de la integral compleja que la integral de c es la suma de las integrales de los pedazos. Asi que si la función f es analítica en el interior de cada uno de las curvas simples en las que se parte c, entonces la integral de f en c debe ser 0.

Corolario. Si f es una función analítica con derivada continua en una región A y si c y c' son dos curvas simples cerradas y ajenas en A tales que una puede deformarse a la otra dentro de A sin cambiar su orientacion, entonces

$$\int_c f(z)dz = \int_{c'} f(z)dz$$



Demostracion. Si las curvas c y c' son ajenas, podemos conectarlas con dos arcos a y a' en A para obtener dos curvas simples s y s' cuyos interiores estan contenidos en A. Por el Teorema de Cauchy las integrales de f en s y en s' son 0. Pero si c y c' tienen la misma orientación entonces

$$\int_c f - \int_{c'} f = \int_s f + \int_{s'} f = 0$$

ya que las integrales sobre los arcos a y a' se cancelan. ▲

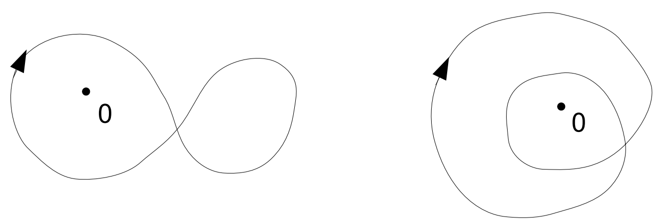
Ejemplos.

Si c es una curva simple cerrada c orientada positivamente y el interior de c contiene al origen, entonces

$$\int_c 1/z \; dz = 2\pi i$$

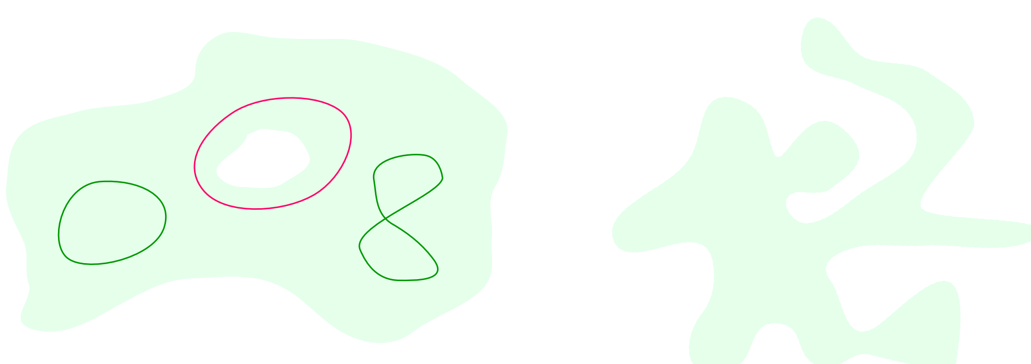
ya que podemos deformar la curva c a un circulo centrado en el origen.

Tambien podemos calcular las integrales de $1/z$ sobre curvas no simples cortándolas para obtener curvas simples con la misma orientación:



$$\int_c 1/z dz = -2\pi i \qquad \int_{c'} 1/z dz = -4\pi i$$

Una curva c en una región A es *contraible* en A si c puede deformarse continuamente a un punto en A. Una región A es *simplemente conexa* si todas las curvas cerradas en A son contraibles. Intuitivamente las regiones simplemente conexas del plano son las regiones sin hoyos.



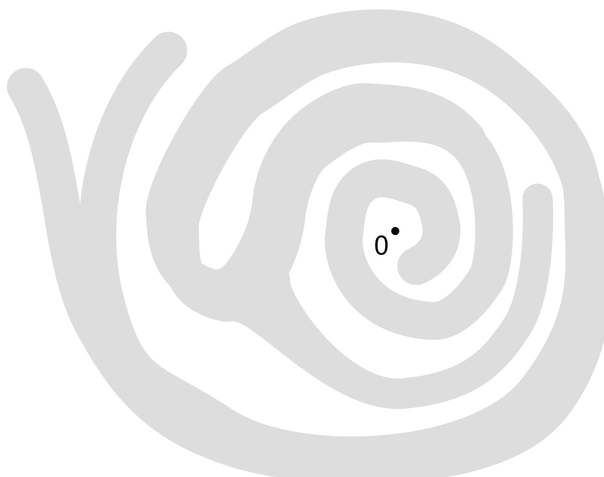
Curvas contraibles y no contraibles — Región simplemente conexa

Teorema de Cauchy (segunda versión). Si $f(z)$ es una función analítica con derivada continua en una región simplemente conexa A, entonces para toda curva cerrada c en A, $\int_c f(z) \; dz = 0$.

Corolario. Si $f(z)$ es una función analítica con derivada continua en una región simplemente conexa A, entonces f tiene una antiderivada en A.

Demostracion. Por el Teorema de Cauchy todas las integrales de f sobre curvas cerradas en A son 0. Por el teorema de independencia de la trayectoria, esto implica que las integrales de f sobre curvas que unen 2 puntos en A no dependen de las trayectorias, y que la función $F(z) = \int_{\gamma z} f(z)dz$ (donde γz es cualquier trayectoria de un punto fijo en A al punto z) es una antiderivada de f.

Ejemplo. Si A es cualquier región simplemente conexa del plano que no contiene a 0 entonces $f(z) = 1/z$ tiene una antiderivada en A.



Hay una rama del logaritmo definida en esta región

Problemas

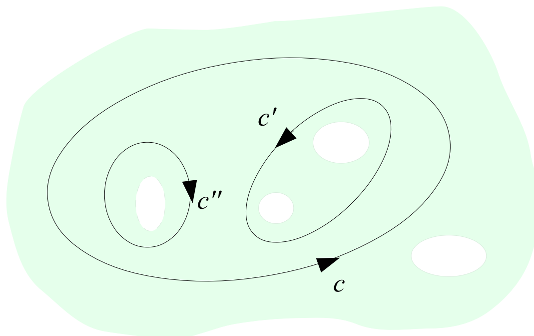
1. ¿Para cuales curvas simples cerradas es cierto que

$$\int_c \frac{1}{z^2 + z + 1}\, dz = 0 \text{ ?}$$

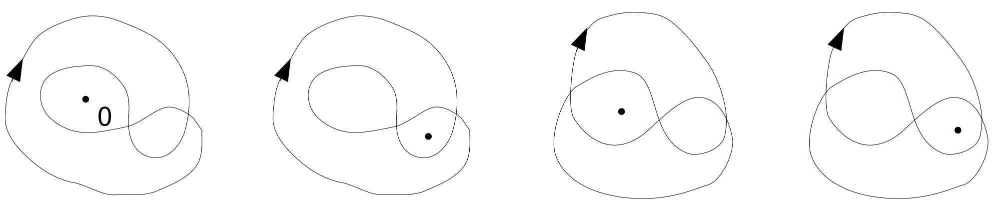
2. Si c es el círculo con centro en 1 y radio 2, orientado positivamente, calcula:

$$\int_c \frac{1}{z}\, dz \qquad \int_c \frac{1}{z-1}\, dz \qquad \int_c \frac{1}{z+2}\, dz$$

3. Si la función $f(z)$ es analítica en la región verde ¿que relación hay entre las integrales de f a lo largo de las siguientes curvas?

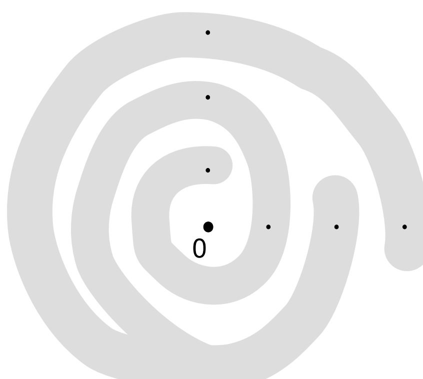


4. Calcula las integrales de la función $1/z$ en las siguientes curvas (el punto es el 0):



5. Si $log(z)$ es la rama del logaritmo definida en la región gris con $log(1) = 0$, evalúa:

   $log(2)$ $\qquad$ $log(3)$ $\qquad$ $log(i)$ $\qquad$ $log(2i)$ $\qquad$ $log(3i)$.



El teorema de Cauchy-Goursat

Toda función real $f(x)$ que es continua en un intervalo es la derivada real de una función $F(x)$ en ese intervalo: podemos construir la antiderivada de $f(x)$ como $F(x) = \int_a^x f(t)dt$.

No toda función compleja $f(z)$ que es continua en una región A es la derivada compleja de una función $F(z)$ en A: por el teorema fundamental para que esto suceda es necesario que la integral de $f(z)$ sea 0 en toda curva cerrada en A. El Teorema de Cauchy nos dice que esto sucede si $f(z)$ es derivable como función compleja y su derivada es continua. Pedir que f tenga derivada compleja y que esta sea continua parece una hipotesis muy fuerte comparada con la hipotesis en el caso real (que f sea continua). Goursat pudo probar el Teorema de Cauchy sin pedir que la derivada de f sea continua, y este pequeño cambio tiene consecuencias muy importantes.

Teorema. Si f es una función analítica en una región simplemente conexa A entonces para cada curva cerrada c en A

$$\int_c f(z)\ dz = 0$$

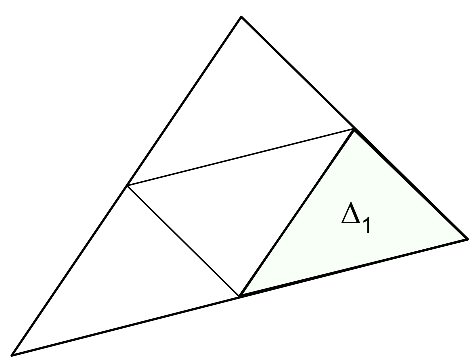
La demostración de este teorema está basada en el siguiente lema:

Lema de Goursat. Si f es una función analítica en una región que contiene a un triángulo Δ y su interior, entonces $\int_\Delta f(z)dz = 0$

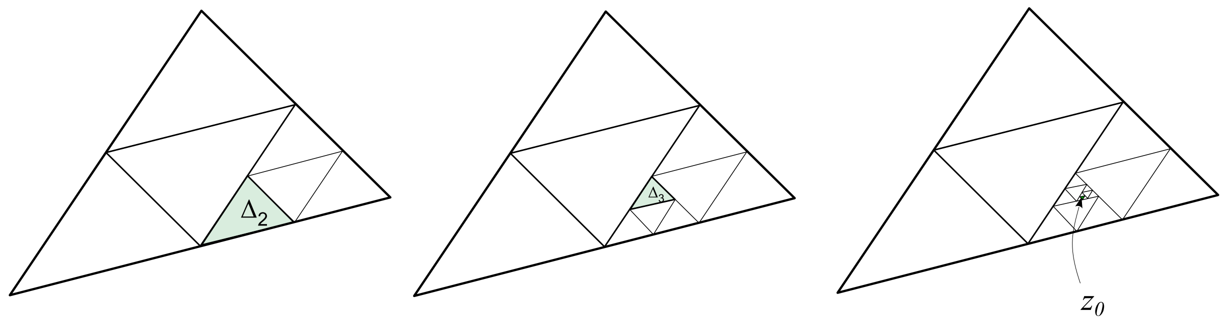
Demostración. Dividamos a Δ en 4 triángulos semejantes de la mitad del tamaño, Δ_a, Δ_b, Δ_c y Δ_d, orientados todos positivamente, como en la figura. Entonces

$$\int_\Delta f(z)dz = \int_{\Delta_a} f(z)dz + \int_{\Delta_b} f(z)dz + \int_{\Delta_c} f(z)dz + \int_{\Delta_d} f(z)dz$$

Para alguno de los 4 triángulos, llamemoslo Δ_1, debe ocurrir que $\left|\int_{\Delta_1} f(z)dz\right| \geq \frac{1}{4}\left|\int_\Delta f(z)dz\right|$



Si dividimos ahora a Δ_1 en 4 triángulos, entonces para alguno de ellos, llamemoslo Δ_2 debe ocurrir que $\left|\int_{\Delta_2} f(z)dz\right| \geq \frac{1}{4}\left|\int_{\Delta_1} f(z)dz\right| \geq \frac{1}{4^2}\left|\int_\Delta f(z)dz\right|$.



Repitiendo esta construcción obtenemos triángulos $\Delta_1 \supset \Delta_2 \supset ... \supset \Delta_n \supset ...$ tales que para cada n,

$$\text{diam}\Delta_n = \tfrac{1}{2^n}\text{diam}\Delta \qquad \text{perim}\Delta_n = \tfrac{1}{2^n}\text{perim}\Delta \qquad \Big|\int_{\Delta_n} f(z)dz\Big| \geq \tfrac{1}{4^n}\Big|\int_{\Delta} f(z)dz\Big|$$

Como los triángulos Δ_n estan anidados y su diámetro se aproxima a 0, su intersección es un punto z_0.

Ahora podemos usar la hipótesis de que $f(z)$ es derivable en z_0 para acotar el tamaño de la integral $\int_{\Delta_n} f(z)dz$ cuando Δ_n es muy pequeño. Como $lim_{z\to z_0} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} - f'(z_0) = 0$ entonces para cada $\epsilon > 0$, existe un $\delta > 0$ tal que $\left|\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} - f'(z_0)\right| < \epsilon$ siempre que $|z - z_0| < \delta$. Ahora si n es lo suficientemente grande para que $\text{diam}\Delta_n < \delta$ entonces

$$\big|f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0)\big| < \epsilon|z - z_0| \leq \epsilon \text{ diam}\Delta_n$$

Ahora observemos que

$$\int_{\Delta_n} f(z)dz = \int_{\Delta_n} f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0)\ dz$$

ya que las funciones $f(z_0)$ y $f'(z_0)(z - z_0)$ son las derivadas de las funciones $f(z_0)z$ y $\frac{f'(z_0)}{2}(z - z_0)^2$ y por lo tanto sus integrales en contornos cerrados son 0. Por lo tanto

$$\Big|\int_{\Delta_n} f(z)dz\Big| = \Big|\int_{\Delta_n} f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0)\ dz\Big| \leq \int_{\Delta_n} \epsilon|z - z_0|\ |dz| \leq \epsilon \text{ diam}\Delta_n \text{ perim}\Delta_n$$

asi que

$$\Big|\int_{\Delta} f(z)dz\Big| \leq 4^n\Big|\int_{\Delta_n} f(z)dz\Big| \leq 4^n\epsilon \text{ diam}\Delta_n \text{ perim}\Delta_n = \epsilon \text{ diam}\Delta \text{ perim}\Delta$$

Como esto vale para todo $\epsilon > 0$, entonces

$$\Big|\int_{\Delta} f(z)dz\Big| = 0$$

Corolario. Toda función analítica $f(z)$ en una región simplemente conexa A tiene una antiderivada en A.

Demostración. Definamos

$$F(z) = \int_{\tau_z} f(\zeta)\ d\zeta$$

donde τ_z es una trayectoria poligonal en A que va de un punto fijo z_0 hasta z (trayectoria poligonal = formada de un número finito de segmentos de recta). Tenemos que probar que $F(z)$ esta bien definida y que $F'(z) = f(z)$.

Para ver que $F(z)$ esta bien definida necesitamos mostrar que $F(z)$ no depende de la trayectoria poligonal que elijamos de z_0 a z, y para esto basta ver que si P es una curva poligonal cerrada en A entonces $\int_P f(\zeta)d\zeta = 0$.

Si P es una curva poligonal cerrada entonces P es el borde de un polígono que puede partirse en un número finito de triángulos $\Delta_1, \Delta_2, ..., \Delta_k$. Como A es simplemente conexa el interior de P está contenido en A. Si P y los triángulos Δ_i's estan orientados positivamente entonces

$$\int_P f(\zeta)d\zeta = \sum_{i=1}^{i=k} \int_{\Delta i} f(\zeta)d\zeta$$

Como cada Δ_i está en A y f es analítica en A entonces por el lema de Goursat $\int_{\Delta_i} f(\zeta)d\zeta = 0$ y por lo tanto $\int_P f(\zeta)d\zeta = 0$.

Para ver que $F(z)$ es una antiderivada de $f(z)$ necesitamos mostrar que

$$lim_{w\to z}\frac{F(z)-F(w)}{z-w} - f(z) = lim_{w\to z}\frac{F(z)-F(w)-f(z)(z-w)}{z-w} = 0$$

Por definición $F(z)$ y $F(w)$ se obtienen integrando $f(z)$ a lo largo de trayectorias poligonales de z_0 a z y a w, y por el lema podemos elegir las trayectorias que mas nos convengan. Elijamos cualquier trayectoria de z_0 a z en A y si w esta suficientemente cerca de z entonces la trayectoria en linea recta de z a w está en A. Entonces

$$F(z) - F(w) = \int_{zw} f(\zeta)d\zeta$$

Por lo tanto

$$F(z) - F(w) - f(z)(z-w) = \int_{zw} f(\zeta)d\zeta - \int_{zw} f(z)d\zeta = \int_{zw} f(\zeta) - f(z)\ d\zeta$$

Como f es continua en z (ya que f es analítica) entonces dado $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $|\zeta - z| < \delta$ implica que $|f(\zeta) - f(z)| < \epsilon$. Asi que si $|z-w| < \delta$ entonces $|\zeta - z| < \delta$ para toda ζ en zw, asi que

$$\Big|\int_{zw} f(\zeta) - f(z)d\zeta\Big| \leq |z-w|\epsilon$$

por lo tanto

$$\Big|\frac{F(z)-F(w)-f(z)(z-w)}{z-w}\Big| \leq \frac{1}{|z-w|}\Big|\int_{zw} f(\zeta)-f(z)\ d\zeta\Big| \leq \frac{1}{|z-w|}|z-w|\epsilon = \epsilon$$

Como esto ocurre para cada $\epsilon > 0$ siempre que $|z-w| < \delta$, entonces

$$lim_{w\to z}\frac{F(z)-F(w)}{z-w} - f(z) = 0 \qquad \text{asi que} \qquad F'(z) = f(z)$$

▲

Corolario Si $f(z)$ es función analítica en una región simplemente conexa A entonces para cada curva cerrada c en A, $\int_c f(z)dz = 0$

Demostración Por el corolario anterior f tiene una antiderivada en A, asi que por el teorema fundamental las integrales de f solo dependen de los extremos de las curvas. ▲

Problemas

6. Si c_r el círculo con centro en 0 y radio r, orientado positivamente y $a \in \mathbb{C}$, calcula

$$\int_{c_r} \frac{1}{z-a}\ dz \qquad\qquad \int_{c_r} \frac{z}{z-a}\ dz$$

(ojo: hay varios casos dependiendo de r)

7. Para cada curva simple cerrada c orientada positivamente, calcula

$$\int_c \frac{1}{z-i}\ dz \qquad\qquad \int_c \frac{1}{z^2+1}\ dz$$

(dibuja las curvas en los distintos casos)

8. Muestra que la integral de la función $\overline{z}$ en una curva simple cerrada c no es 0, sino que

$$\int_c \overline{z}\ dz = 2i \cdot (\text{area encerrada por } c)$$

(hint: teorema de green)