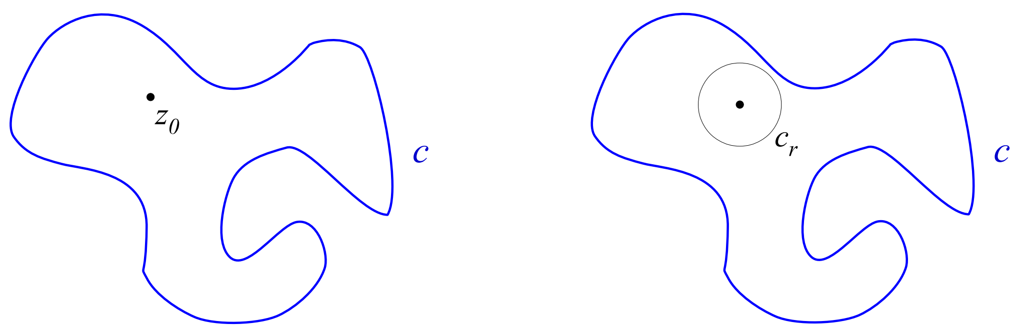
Fórmula integral de Cauchy

Fórmula integral de Cauchy. Si una función f es analítica en una región que contiene a curva simple cerrada c y a su interior, entonces para cada punto z_0 encerrado por c,

$$\int_c \frac{f(z)}{z-z_0}\ dz = 2\pi i\ f(z_0)$$

En particular, los valores de una función que es analítica en el interior de una curva c están determinados por los valores de la función en c.



Demostracion. Observar que la función $\frac{f(z)}{z-z_0}$ es analítica en todos los puntos del interior de c excepto z_0, por lo tanto si c_r es un círculo de radio r centrado en z_0 entonces

$$\int_c \frac{f(z)}{z-z_0}\ dz = \int_{c_r} \frac{f(z)}{z-z_0}\ dz$$

Ahora basta probar que

$$\int_{c_r} \frac{f(z)}{z-z_0}\ dz = \int_{c_r} \frac{f(z_0)}{z-z_0}\ dz \qquad \text{porque ya sabemos que} \qquad f(z_0)\int_{c_r} \frac{1}{z-z_0}\ dz = 2\pi i\ f(z_0)$$

Veamos entonces que

$$\int_{c_r} \frac{f(z)}{z-z_0}\ dz - \int_{c_r} \frac{f(z_0)}{z-z_0}\ dz = \int_{c_r} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\ dz = 0$$

Como $f(z)$ es continua en z_0, para cada $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $|f(z)-f(z_0)| < \epsilon$ si $|z-z_o| < \delta$ Asi que si $r < \delta$ entonces

$$\Big|\int_{c_r} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\ dz\Big| \leq \frac{\epsilon}{r} 2\pi r = 2\pi\epsilon$$

Como esto vale para todo ϵ tomando r suficientemente pequeño y el valor de la integral no cambia al disminuir el r, la integral debe valer 0. ▲

Ejemplos.

- $cos(z)$ es analítica en todo el plano, asi que si c es el circulo con centro en 0 y radio mayor a 1,

$$\int_c \frac{cos(z)}{z}\ dz = 2\pi i\ cos(0) = 2\pi i \qquad \int_c \frac{cos(z)}{z-1}\ dz = 2\pi i\ cos(1) \approx 3.3848i$$

$$\int_c \frac{cos(z)}{z-i}\ dz = 2\pi i\ cos(i) = 2\pi i(\frac{e^{i\cdot i}+e^{-i\cdot i}}{2}) = \pi(1/e+e)i$$

- ¿Cuanto valen las integrales de la función $\frac{1}{z(z-1)}$ en todas las curvas simples cerradas o.p en $\mathbb{C}$?

  Si c no encierra a 0 ni a 1 entonces $\frac{1}{z(z-1)}$ es analitica en el interior de c y

$$\int_c \frac{1}{z(z-1)}\ dz = 0$$

  Si c encierra a 0 pero no a 1, entonces $\frac{1}{z-1}$ es analítica en el interior de c y

$$\int_c \frac{1}{z(z-1)}\ dz = \int_c \frac{\frac{1}{z-1}}{z}\ dz = 2\pi i \frac{1}{0-1} = -2\pi i$$

  Si c encierra a 1 pero no a 0, entonces $\frac{1}{z}$ es analítica en el interior de c y

$$\int_c \frac{1}{z(z-1)}\ dz = \int_c \frac{\frac{1}{z}}{z-1}\ dz = 2\pi i \frac{1}{1} = 2\pi i$$

  Si c encierra a 0 y a 1, entonces la integral a lo largo de c es la suma de las integrales a lo largo de una curva c_0 que encierra solo a 0 y de otra curva c_1 que encierra solo a 1, asi que

$$\int_c \frac{1}{z(z-1)}\ dz = \int_{c_0} \frac{1}{z(z-1)}\ dz + \int_{c_1} \frac{1}{z(z-1)}\ dz = -2\pi i + 2\imath i = 0$$

Problemas

1. Si c es el círculo con centro en 0 y radio 3 (orientado positivamente) calcula

$$\int_c \frac{z^3+z^2+z+1}{z-1}\ dz \qquad \int_c \frac{z^3+z^2+z+1}{z+2}\ dz \qquad \int_c \frac{z^3+z^2+z+1}{z+1}\ dz$$

2. Calcula, para la misma c,

$$\int_c \frac{1}{z^2+1}\ dz \qquad \int_c \frac{sen(z)}{z^2-1}\ dz$$

3. Calcula, para todas las curvas simples cerradas (orientadas positivamente) en $\mathbb{C}$,

$$\int_c \frac{1}{z(z-1)(z+2)}\ dz$$

Derivadas de las funciones analíticas.

La fórmula integral de Cauchy dice que si $f(z)$ es analítica en una curva c y en su interior, entonces para cada punto z en el interior de c

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \ d\zeta$$

Observar que para que la integral del lado derecho tenga sentido no hace falta que la función f sea analítica, ni que la curva c sea cerrada, basta que f este definida y sea continua en c.

Afirmación. Si $f(z)$ es cualquier función que esta definida y es continua en una curva c entonces la función

$$g(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \ d\zeta$$

es analítica en todos los puntos de $\mathbb{C} - c$ y

$$g'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2} \ d\zeta$$

Demostración.

$$g'(z) = \lim_{w \to z} \frac{g(w) - g(z)}{w - z} \qquad \text{si es que este limite existe.}$$

Por definición, si $w, z \notin \mathbb{C}$,

$$\frac{g(w) - g(z)}{w - z} = \frac{1}{2\pi i(w - z)} \int_c \frac{f(\zeta)}{\zeta - w} - \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \ d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{f(\zeta)}{(\zeta - w)(\zeta - z)} d\zeta$$

Falta ver que

$$lim_{w \to z} \int_c \frac{f(\zeta)}{(\zeta - w)(\zeta - z)} d\zeta = \int_c \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)(\zeta - z)} d\zeta$$

La diferencia entre las integrales es

$$\int_c \frac{1}{(\zeta - w)(\zeta - z)} - \frac{1}{(\zeta - z)(\zeta - z)} \ f(\zeta) \ d\zeta = \int_c \frac{w - z}{(\zeta - w)(\zeta - z)^2} \ f(\zeta) \ d\zeta$$

Sea L es la longitud de c y sea M una cota superior para la norma de los valores de $f(\zeta)$ en c. Si la distancia mínima de z a los puntos de c es d y la distancia de w a z es menor que $d/2$ entonces

$$\Big| \int_c \frac{w - z}{(\zeta - w)(\zeta - z)^2} f(\zeta) \ d\zeta \Big| \leq \frac{|w - z|}{\frac{1}{2} d \ d^2} M \cdot L$$

y esta útima cantidad tiende a 0 cuando $|w - z| \to 0$. ▲

Afirmación. La derivada de la función $g(z)$ también es analítica y

$$g''(z) = \frac{2}{2\pi i} \int_c \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^3} \; d\zeta$$

Demostración. Ya sabemos que $g(z)$ es derivable y que

$$g'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{f(\zeta}{(\zeta - z)^2} \; d\zeta \qquad\qquad \text{asi que}$$

$$\frac{g'(w) - g'(z)}{w - z} = \frac{1}{2\pi i(w - z)} \int_c \frac{f(\zeta)}{(\zeta - w)^2} - \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2} \; d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{\zeta - w + \zeta - z}{(\zeta - w)^2(\zeta - z)^2} \; f(\zeta) \; d\zeta$$

Falta ver que

$$lim_{w\to z} \int_c \frac{\zeta - w + \zeta - z}{(\zeta - w)^2(\zeta - z)^2} \; f(\zeta) \; d\zeta = \int_c \frac{2}{(\zeta - z)^3} \; f(\zeta) \; d\zeta$$

La diferencia de estas dos integrales es

$$\int_c \frac{(\zeta - w + \zeta - z)(\zeta - z) - 2(\zeta - w)^2}{(\zeta - w)^2(\zeta - z)^3} f(\zeta) \; d\zeta = \int_c \frac{(3\zeta - z - 2w)(w - z)}{(\zeta - w)^2(\zeta - z)^3} f(\zeta) \; d\zeta$$

Sea L la longitud de c y sea M una cota para los valores de $f(\zeta)$ en c. Si la distancia mínima de z a los puntos de c es d y la distancia maxima es D y si w dista de z menos que $d/2$ entonces

$$\Big| \int_c \frac{(\zeta - z + 2\zeta - 2w)(w - z)}{(\zeta - w)^2(\zeta - z)^3} f(\zeta) \; d\zeta \Big| \leq \frac{4D|w - z|}{\frac{1}{4}d^2 \; d^3} M \cdot L$$

y esta útima cantidad tiende a 0 cuando $|w - z| \to 0$. ▲

Se puede demostrar por inducción que la función $g(z)$ tiene derivadas de todos los ordenes y que

$$g^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_c \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} \; d\zeta$$

Ejemplo. Si c es el círculo con centro en 0 y radio 1, entonces

$$\int_c \frac{cos(z)}{z} \; dz = 2\pi i \, cos(0) = 2\pi i \qquad \int_c \frac{cos(z)}{z^2} \; dz = \frac{2\pi i}{1} cos'(0) = 0 \qquad \int_c \frac{cos(z)}{z^3} \; dz = \frac{2\pi i}{2} cos''(0) = -\pi i$$

Las fórmulas integrales para las derivadas de g tienen mucha aplicaciones, pero basta saber que la segunda derivada de g existe para obtener el siguiente resultado, que muestra cuan distintas son las funciones diferenciables reales de las funciones diferenciables complejas:

Teorema. Si una función f es analítica en una región A entonces la derivada de f tambien es analítica en A. Por lo tanto f es infinitamente diferenciable y sus derivadas son funciones analíticas en A.

Demostración. Para cada $z \in A$ elijamos una curva simple cerrada c que encierre a z y cuyo interior este contenido en A. Por la fórmula integral

$$f(z) = \int_c \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta$$

y por las dos afirmaciones anteriores esta función es derivable al menos dos veces, asi que $f'(z)$ es analítica. Entonces el mismo argumento aplicado a $f'(z)$ muestra que $f''(z)$ es analitica, y aplicado a $f''(z)$ muestra que $F'''(z)$ es analítica, etc. ▲

Problemas

4. Si c es un círculo con centro en el origen y radio menor que $\frac{\pi}{2}$, calcula

$$\int_c \frac{1}{z\ cos(z)}\, dz \qquad \int_c \frac{1}{z^2\ cos(z)}\, dz \qquad \int_c \frac{1}{z^3\ cos(z)}\, dz$$

5. Calcula

$$\int_c \frac{e^z}{z^n}\, dz \qquad para\ n \in \mathbb{N}$$

donde c es una curva simple cerrada (orientada positivamente) que encierra al origen.

6. Muestra que si $f(z)$ es analítica en una región simplemente conexa A, entonces para toda curva simple cerrada c en A, y todo z_0 en el interior de c,

$$\int_c \frac{f'(z)}{z - z_0}\, dz = \int_c \frac{f(z)}{(z - z_0)^2}\, dz$$

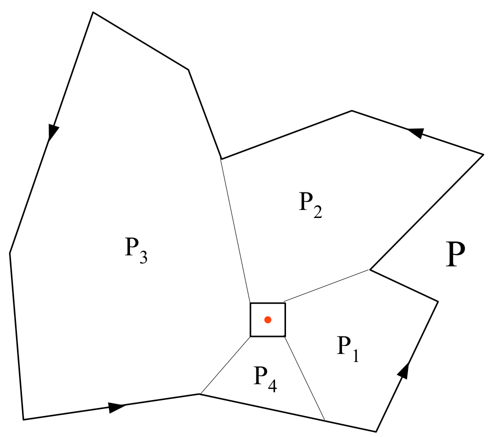
El Teorema de Cauchy-Goursat dice que si una función es analítica en una región simplemente conexa A, antonces $\int_c f(z)dz = 0$ para todas las curvas cerradas en A. El siguiente resultado muestra que el reciproco tambien es cierto, sin importar si la región es simplemente conexa:

Teorema de Morera. Si $f(z)$ es una función continua en una región A y todas las integrales de f en curvas cerradas en A valen 0, entonces f es analítica en A.

Demostración. Para cada z en A hay una curva cerrada c que encierra a z y y cuyo interior este contenido en A. Como todas las integrales de $f(z)$ en curvas cerradas son 0, el teorema de independencia de la trayectoria dice que $f(z)$ tiene una antiderivada $F(z)$ en el interior de c. Como $F(z)$ es analítica entonces por el teorema anterior $F'(z)$, que es igual a $f(z)$, tabién es analítica. ▲

El siguiente resultado dice que las funciones complejas no pueden tener picos aislados, como sucede con la función valor absoluto en $\mathbb{R}$, que es continua en todo $\mathbb{R}$ y es derivable en todos los puntos de $\mathbb{R}$ menos el 0.

Corolario. Si una función $f(z)$ es continua en una región A y es analítica en $A - z_0$, para un z_0 en A, entonces f es analítica en todo A.



Demostración. Basta ver que f es analítica en un disco D alrededor de z_0. Para esto basta mostrar que para cada curva poligonal cerrada P en D, $\int_P f(z)\ dz = 0$. Si el interior de P no contiene a z_0 entonces la integral es 0 por el Teorema de Cauchy-Goursat. Si z_0 está en el interior de P, y $\square$ es un cuadrado de lado ϵ alrededor de z_0, entonces

$$\int_P f(z)\ dz = \int_\square f(z)\ dz$$

ya que la región que queda entre P y $\square$ es la unión de 4 regiones acotadas por poligonos P_1, P_2, P_3 y P_4 y la integral de f en cada P_i es 0.

Ahora como f es continua en z_0, existe una cota superior M para los valores de f cerca de z_0 y

$$\Big|\int_{\square} f(z)dz\Big| \leq M \cdot (longitud\ de\ \square) = M \cdot \epsilon$$

Si hacemos $\epsilon \to 0$, entonces $\Big|\int_{\square} f(z)dz\Big| \to 0$, pero la integral no depende del tamañ0 de $\square$, asi que la integral debe ser 0. ▲

Desigualdades de Cauchy.

Las fórmulas integrales de Cauchy dicen que si $f(z)$ es una función analítica en una región A y c_R es un círculo con centro en z y radio r totalmente contenido en A, entonces las derivadas de f en z satisfacen

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i}\int_{c_r} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}}\ d\zeta$$

Asi que si M es una cota superior para $|f|$ en c_r,

$$|f^{(n)}(z)| = \frac{n!}{2\pi}\Big|\int_{c_r} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}}\ d\zeta\Big| \leq \frac{n!}{2\pi}\frac{M}{r^{n+1}}2\pi r = \frac{n!}{r^n}M$$

Estas son las *desiguladades de Cauchy*, de las que veremos algunas aplicaciones.

Observar que existen muchas funciones reales que son infinitamente diferenciables y son acotadas en todo $\mathbb{R}$, por ejemplo $f(x) = sen(x)$. Esto no puede ocurrir con las funciones diferenciables complejas:

Teorema de Liouville. Si f una función entera (es decir, analítica en todo $\mathbb{C}$) y existe una constante M tal que $|f(z)| \leq M$ para toda $z \in \mathbb{C}$, entonces f es constante.

Demostración. Para cada $z \in \mathbb{C}$ tomemos un círculo de radio r con centro en z, entonces por la primera desigualdad de Cauchy $|f'(z)| \leq \frac{M}{r}$. Como f es analítica en todo $\mathbb{C}$, podemos hacer $r \to \infty$ y obtenemos que $|f'(z)| = 0$. Asi que $f'(z) = 0$ para todo $z \in \mathbb{C}$ y por lo tanto $f(z)$ es constante. ▲

Un corolario del Teorema de Liouville es el siguiente:

Teorema Fundamental del Algebra. Cada polinomio complejo $P(z) = a_n z^n + ... + a_1 z + a_0$ de grado mayor que 0 tiene al menos una raíz compleja.

Demostración. Supongamos que existe un polinomio $P(z)$ que es distinto de 0 para todo $z \in \mathbb{C}$. Entonces $f(z) = \frac{1}{P(z)}$ es una función entera. Por el Teorema de Liouville, basta demostrar que $f(z)$ es acotada para que $f(z)$ sea constante y por lo tanto $p(z)$ sea constante, que es una contradicción porque $p(z)$ tiene grado al menos 1. Para ver que $f(z)$ es acotada, observar que $lim_{z\to\infty} p(z) = \infty$, así que existe un r tal que $|p(z)| > 1$ para todo z con $|z| > r$. Además, como $|p(z)|$ es una función continua, alcanza un valor mínimo m en el disco cerrado con centro en 0 y radio r. Si este mínimo fuera 0, habria un punto z_0 tal que $|p(z_0)| = 0$ y entonces $p(z_0) = 0$. Por lo tanto $|p(z)| \geq min\{1, m\}$ asi que $|\frac{1}{p(z)}| \leq max\{1, \frac{1}{m}\}$. ▲

Corolario. Todo polinomio complejo se factoriza como un producto de factores lineales.

Demostración. Si un polinomio P de grado n tiene una raíz en z_1 entonces $P(z)$ es divisible por $z - z_1$, asi que $P(z) = (z - z_1)P_1(z)$ para un polinomio P_1 de grado $n - 1$. Ahora P_1 tiene una raiz en z_2, por lo tanto $P_1(z) = (z - z_2)P_2(z)$ donde P_2 es un polinomio de grado $n - 2$. Asi llegamos por inducción a que $P(z) = (z - z_1)(z - z_2) \dots (z - z_n)$. ▲

Problemas

7. Demuestra que si f es analítica en una región A y z_0 es un punto de A, entonces la función g definida como $g(z) = \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$ para $z \neq z_0$ y $g(z_0) = f'(z_0)$ es analítica en A.

8. Si $f(z)$ es analítica en A y $f(z_0) = 0$ para algún z_0 en A, entonces $f(z) = (z - z_0)g(z)$ donde $g(z)$ es una función analítica en A. Hint: problema anterior.

9. Demuestra que si $f(z)$ es una función entera y $\lim_{z\to\infty} \frac{f(z)}{z} = 0$ entonces $f(z)$ es constante.

10. Demuestra que si f es una función entera y $|f(z)| \leq M|z|^n$ para alguna constante M, entonces $f(z)$ es un polinomio de grado a lo mas n. Hint: desigualdades de Cauchy.

11. Si $p(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_2 z^2 + a_1 z + a_0$ entonces todas las raices de p están dentro del círculo de radio $R = max\{1, |a_0| + |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_{n-1}|\}$.

Principio del módulo máximo

Teorema del valor medio de Gauss. Si f es una función analítica en un disco D, el valor de f en el centro de D es el promedio de los valores de f en la frontera de D.

Demostración. Si z_0 es el centro de D y c es su frontera, entonces por la fórmula integral de Cauchy

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz$$

y si parametrizamos a c como $c(t) = z_0 + re^{it}$ para $0 \leq t \leq 2\pi$ entonces

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(c(t))}{c(t) - z_0} c'(t)\, dt = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + re^{it})}{re^{it}}\, ire^{it}\, dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{it})\, dt$$

▲

Corolario. Sea $f(z)$ es una función analítica en un disco D con centro en z_0. Si $|f(z_0)| \geq |f(z)|$ para todo z en la frontera de D, entonces $f(z) = f(z_0)$ para todos los puntos de D.

Demostración. Sea c un círculo centrado en z_0 y contenido en D. Si $|f(z)| \leq |f(z_0)|$ para toda z en c, entonces por el teorema del valor medio

$$|f(z_0)| = \frac{1}{2\pi} \left| \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{it})\, dt \right| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(z_0 + re^{it})|\, dt \leq \frac{1}{2\pi}\, |f(z_0)|\, 2\pi = |f(z_0)|$$

Si $|f(z_1)| < |f(z_0)|$ para algun $z_1 \in c$ entonces, como f es continua, $|f(z)| < |f(z_0)|$ en una vecindad de z_1 y la segunda desigualdad sería estricta, lo que es imposible. Por lo tanto $|f(z)| = |f(z_0)|$ para toda $z \in c$, y esto vale para todos los círculos centrados en z_0, asi que $|f(z)| = |f(z_0)|$ para toda $z \in D$, asi que el módulo de la función f es constante en todo D.

Afirmación: Las únicas funciones analíticas con módulo constante son las funciones constantes.

Hay varias maneras de probar esto, una es usando las ecuaciones de Cauchy-Riemann: Si $f = u + iv$ entonces $|f|^2 = u^2 + v^2$. Si $|f|$ es constante entonces $|f|^2$ es constante y sus derivadas parciales son 0.

$$2uu_x + 2vv_x = 0 \qquad\qquad 2uu_y + 2vv_y = 0$$

Por Cauchy-Riemann

$$u_x = v_y \qquad\qquad u_y = -v_x$$

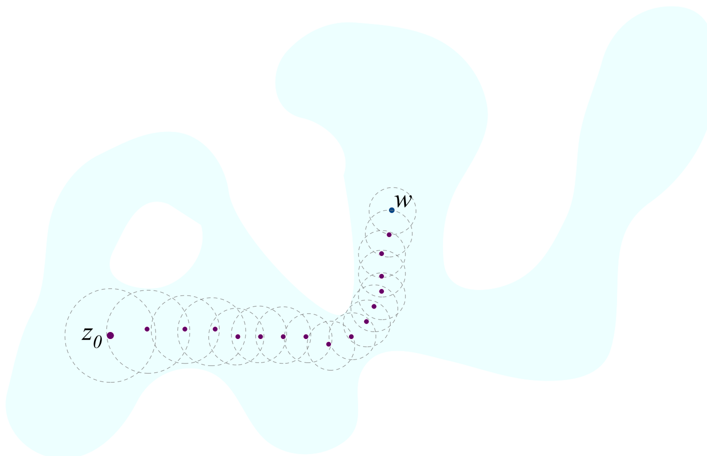
entonces podemos combinar las igualdades anteriores para obtener

$$u(u_x^2 + v_x^2) = 0 \qquad\qquad v(u_x^2 + v_x^2) = 0$$

Asi que $u = v = 0$ o $u_x^2 + v_x^2 = 0$ pero entonces $u_x = v_y = 0$ y $v_x = -u_y = 0$, asi que $u = v = 0$, por lo tanto $f = 0$. ▲

Principio del módulo máximo. Si $f(z)$ es una función analitica no constante en en una región conexa A, entonces $|f(z)|$ no puede alcanzar su valor máximo en el interior de A.

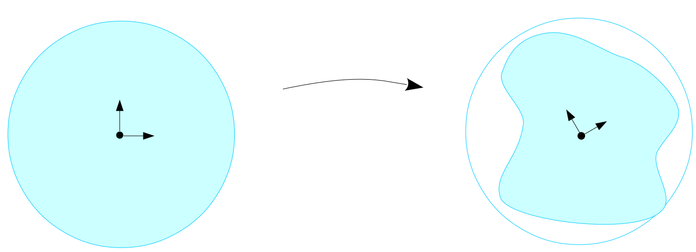
Demostración. Supongamos que existe un z_0 en el interior de A tal que $|f(z)| \leq |f(z_0)|$ para todo z en A. Si w es cualquier otro punto de A, entonces hay una cadena de discos $D_0, D_1, ..., D_n$ en A de modo que el centro de D_0 es z_0, el centro de D_n es w, y el centro z_i del disco D_i está contenido en D_{i-1}.



Por el corolario anterior, como $|f(z)|$ alcanza un máximo en z_0, entonces $f(z)$ es constante en D_0. Como $z_1 \in D_0$, $|f(z)|$ alcanza un máximo en z_1 y por lo tanto $f(z)$ es constante en D_1. Como $z_2 \in D_1$, $|f(z)|$ alcanza un máximo en z_2 y por lo tanto $f(z)$ es constante en D_2, y asi llegamos finalmente a que $f(z)$ es constante en todos los D_i y por lo tanto $f(w) = f(z_0)$ ▲

El siguiente teorema muestra que una función analítica que mapea a $D^2 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ en si mismo fijando su centro, no puede estirar al centro del disco mas que la identidad.

Lema de Schwartz. Si f es una función analítica que envía D^2 a D^2 y fija al origen entonces $|f'(0)| \leq 1$ y $|f(z)| \leq |z|$ para cada z en el disco.
Ademas, si $|f'(0)| = 1$ o si hay un $z_0 \neq 0$ tal que $|f(z_0)| = |z_0|$ entonces $f(z) = az$, $|a| = 1$.



Demostración. Definamos $g(z) = \begin{cases} \frac{f(z)}{z} & \text{if } z \neq 0 \\ \\ f'(z) & \text{si } z = 0 \end{cases}$

Por un ejercicio anterior g es analítica en el disco. Como f envía el disco en el disco, $|f(z)| < 1$ para toda z en D^2, Si z es un punto de D^2 con $|z| < r < 1$, entonces por el principio del módulo máximo

$$|g(z)| \leq sup_{|w|=r}|g(w)| \leq sup_{|w|=r}|f(w)|/r \leq 1/r$$

Haciendo $r \to 1$, obtenemos $|g(z)| \leq 1$ para todo z en D^2, es decir, $|g(0)| = |f'(0)| \leq 1$ y $\frac{|f(z)|}{|z|} \leq 1$.

Si $|f'(0)| = 1$ o si hay un punto $z_0 \neq 0$ en el interior de D^2 tal que $|f(z_0)| = |z_0|$ entonces $|g(z)|$ alcanza su valor máximo en el interior de D^2 y por el principio del módulo máximo $g(z)$ debe ser constante, i.e., $\frac{f(z)}{z} = a$, asi que $f(z) = az$, y como $|f'(0)| = 1$, $|a| = 1$. ▲

Ejemplo. Dados dos puntos en el interior del disco unitario D^2, existe una función analítica y biyectiva de D^2 en D^2 que envía uno al otro. Para ver esto basta ver que para cada c en el interior de D^2, hay una función así que envía 0 a c: $r(z) = \frac{z+c}{\bar{c}z+1}$.

Corolario. Todas las funciones analíticas y biyectivas de D^2 en D^2 son de la forma $\frac{az+c}{a\bar{c}z+1}$, donde a y c son complejos con $|a| = 1$ y $|c| < 1$.

Demostración. Dada una función analítica f de D^2 en D^2, si $f(0) = c$, podemos componerla con la función inversa de $r(z) = \frac{z+c}{\bar{c}z+1}$. La composición $g = r^{-1} \circ f$ envía D^2 a D^2, envía 0 a 0, y cumple $g(0) = 0$. Además, como g y g^{-1} son funciones analíticas de D^2 en D^2 que mandan 0 a 0, $|g'(0)| \leq 1$ y $|(g^{-1})'(0)| \leq 1$, pero $(g^{-1})'(0)g'(0) = (g^{-1} \circ g)'(0) = (id)'(0) = 1$, asi que $|g'(0)| = 1$ y por lo tanto g debe ser una rotación: $r^{-1} \circ f(z) = az$ así que $f(z) = r(az) = \frac{az+c}{\bar{c}az+1}$ ▲

Problemas

12. ¿Cual es el promedio de la función $1/z$ en el círculo con centro en $2i$ y radio r, si $r < 2$? ¿Puedes hallar el promedio si $r > 2$?

13. Encuentra el módulo máximo de las siguientes funciones:

    $z^2 - z$ en el disco $|z| \leq 1$ $\qquad\qquad$ $sen(z)$ en $[0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$.

14. Demuestra que si una función $f(z)$ es analítica en una región A y $f(z) \neq 0$ en A, entonces $|f(z)|$ no puede tener un mínimo en el interior de A.

15. Demuestra que si f es una función analítica y biyectiva del disco $D = \{z \mid |z| < 1\}$ a una región A, entonces la distancia de $f(0)$ a la frontera de A es a lo mas $|f'(0)|$.

Algunas propiedades de las funciones armónicas

Las funciones armónicas aparecen en las soluciones de muchos problemas de física, con el nombre de funciones potenciales. Por ejemplo, dada una distribución de cargas eléctricas en un conjunto c de puntos del plano, el potencial electrico resultante en el resto del plano es una función armónica en el complemento de c.

Recordar que las funciones armónicas en dos variables son las funciones $u : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ que son 2 veces diferenciables y satisfacen $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$.

Teorema. Cada función armónica en una región simplemente conexa A del plano es la parte real de una función analítica en A.

Demostración. La función $g = u_x - iu_y$ es analítica en A porque satisface Cauchy-Riemann: $(u_x)_x = u_{xx} = -u_{yy} = (-u_y)_y$ y $(u_x)_y = u_{xy} = u_{yx} = -(-u_y)x$

Como g es analítica en A, que es simplemente conexa, g tiene una antiderivada $f = p + iq$ en A. Ahora por un lado $f' = g = u_x - iu_y$ y por otro $f' = p_x + iq_x = q_y - ip_y$ asi que $p_x = u_x$ y $p_y = u_y$ por lo tanto $u = p + c$ para una constante c, asi que u es la parte real de $f + c$. ▲

Corolario. Las funciones armónicas son infinitamente diferenciables.

Teorema. Si u es una función armónica en un disco D, el valor de u en el centro de D es igual al promedio de los valores de u en la frontera de D.

Demostración. Sea v función armónica tal que u y v son las partes real e imaginaria de una funcíon analítica f en D. Por el teorema del valor medio de Gauss el valor de f en el centro de D es el promedio de los valores de f en la frontera de D, asi que la parte real en el centro es el promedio de las partes reales en la frontera (y la parte imaginaria es el promedio de las partes imaginarias). ▲

Teorema. Si u es una función armónica no constante en una región A, entonces u no puede alcanzar un valor máximo en el interior de A.

Demostración. Si z_0 es un punto en el interior de A y v es una conjugada armónica de u en una vecindad V de z_0, considerar la función $f(z) = e^{u+iv}$. Entonces f es analítica en V y como $|f(z)| = e^u$ no puede alcanzar un máximo en z_0, entonces u no puede alcanzar un máximo ahi. ▲

Las funciones armónicas también sirven para describir a las superficies mínimas, que son modelos matemáticos de las películas de jabón.

El Problema de Dirichlet: Dada una función continua f en la frontera de una región A del plano, hallar una función armónica u en A que sea continua y coincida con f en ∂A.

En el plano, el caso mas sencillo es cuando la frontera de la región es una curva. Si la curva es un círculo, hay fórmulas explícitas para hallar u a partir de f, pero en general, hallar la soluciones es muy difícil.

Teorema. Si el problema de Dirichlet tiene solución en una región acotada A, la solución es única.

Demostración. Supongamos que u_1 y u_2 fueran dos funciones armónicas en el interior de A que coinciden en ∂A. Entonces $u = u_1 - u_2$ es armónica en el interior de A y u es 0 en ∂A. Como u es continua $A \cup \partial A$, que es un conjunto cerrado y acotado, u debe alcanzar un valor máximo y un valor mínimo en $A \cup \partial A$. Pero u no puede alcanzar su valor máximo ni su valor mínimo en el interior de A, asi que debe alcanzarlos en ∂A, pero ahi ambos son 0, por lo tanto u debe ser identicamente 0 en A, asi que $u_1 = u_2$. ▲

Problemas

16. Demuestra que si u es una función armónica no constante en una región A, entonces u no puede alcanzar un valor mínimo en el interior de A (ojo: u puede valer 0 y tambien puede tomar valores negativos).

17. Demuestra que si una función u es armónica en todo el plano y u es acotada inferior o superiormente, entonces u es constante. Hint: Si v es una conjugada armónica de u, considera la función $e^{\pm(u+iv)}$.