Series

Una sucesión de números complejos $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$ en $\mathbb{C}$ converge al número complejo a ($a_n \to a$) si para cada $\epsilon > 0$, existe un N tal que $|a_n - a| < \epsilon$ siempre que $n \geq N$.

Diremos que una serie de números complejos $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ *converge* a un número s, si la sucesión de sumas parciales $s_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$ converge a s.

La sucesión a_i converge a algun punto en $\mathbb{C}$ si y solo si es una sucesión de Cauchy, es decir, si para cada $\epsilon > 0$, existe un N tal que $|a_i - a_j| < \epsilon$ siempre que $i, j \geq N$.

La serie $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ converge si y solo si la sucesión de sumas parciales es de Cauchy, es decir que para cada $\epsilon > 0$, existe un N tal que $\sum_{m+1}^{n} a_i < \epsilon$ siempre que $m, n \geq N$. Este es el *criterio de Cauchy.* Tomando $n = m + 1$, vemos que si $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ converge entonces $a_i \to 0$ (el recíproco no es cierto: $\frac{1}{n} \to 0$ pero $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ no converge).

La sucesión $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ *converge absolutamente* si $\sum_{i=1}^{\infty} |a_i|$ converge. Por el criterio de Cauchy, si $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ converge absolutamente, entonces $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ converge, ya que $\left| \sum_{m}^{n} a_i \right| \leq \sum_{m}^{n} |a_i|$

Recordemos algunos criterios de convergencia para series de números reales:

Series geometricas:

$\sum_{n=0}^{\infty} r^n$ converge a $\frac{1}{1-r}$ si $|r| < 1$ y diverge a ∞ si $|r| \geq 1$.

Demostracion. $1 + r + r^2 + \cdots + r^n = \frac{1-r^{n+1}}{1-r}$ si $r \neq 1$. Si $r < 1$ entonces $lim_{n\to\infty} r^n = 0$ asi que $lim_{n\to\infty} \frac{1-r^{n+1}}{1-r} = \frac{1}{1-r}$. Si $r \geq 1$ entonces r^n no converge a 0, asi que la serie diverge. ▲

Criterio de comparación:

Si $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge y $0 \leq a_n \leq b_n$ entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.
Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge y $0 \leq a_n \leq b_n$ entonces $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ diverge.

Demostracion. $0 \leq \sum_{i=m}^{n} b_i \leq \sum_{i=m}^{n} b_i$, asi que si el criterio de Cauchy se cumple para b_n entonces se cumple para a_n, y si falla para a_n entonces falla para b_n. ▲

Criterio de la razón:

Si $limsup_{n\to\infty}|\frac{a_{n+1}}{a_n}| < 1$ entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.
Si $liminf_{n\to\infty}|\frac{a_{n+1}}{a_n}| > 1$ entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge.

Demostracion. Si $limsup_{n\to\infty}|\frac{a_{n+1}}{a_n}| = s < 1$ y tomamos $s < r < 1$, entonces existe una N tal que $|\frac{a_{n+1}}{a_n}| < r$ para toda $n \geq N$. Asi que para $n > N$ se tiene $|a_n| \leq r|a_{n-1}| \leq r^2|a_{n-2}| \leq \cdots \leq r^{n-N}|a_N|$ asi que la serie $\sum_{n=N}^{\infty} a_n$ converge absolutamente por comparación con la serie $\sum_{n=0}^{\infty} r^n|a_N|$, $r < 1$.

Si $liminf_{n\to\infty}|\frac{a_{n+1}}{a_n}| = s > 1$ y tomamos $1 < r < s$, entonces existe una N tal que $|\frac{a_{n+1}}{a_n}| > r$ para toda $n \geq N$. Asi que $a_N > 0$ y para $n > N$ se tiene $|a_n| \geq r|a_{n-1}| \geq r^2|a_{n-2}| \geq \cdots \geq r^{n-N}|a_N|$, asi que $a_n \not\to 0$ y por lo tanto la serie diverge. ▲

Criterio de la raiz:

Si $limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1$ entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.
Si $liminf_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} > 1$ entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge.

Demostracion. Si $limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = s < 1$ y tomamos $s < r < 1$, entonces existe una N tal que $\sqrt[n]{|a_n|} < r^n$ para toda $n \geq N$. Asi que la serie $\sum_{n=N}^{\infty} a_n$ converge absolutamente por comparación con la serie $\sum_{n=N}^{\infty} r^n$, $r < 1$.

Si $limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = s > 1$ y tomamos $1 < r < s$, entonces existe una N tal que $\sqrt[n]{|a_n|} > r^n$ para toda $n \geq N$. Asi que $a_n \not\to 0$ y por lo tanto la serie diverge. ▲

Pregunta: ¿Cuales de estos criterios sirven o pueden adaptarse a series de números complejos?

Problemas

1. Da un ejemplo de dos sucesiones a_n y b_n de números complejos con $|a_n| < |b_n|$ y tales que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sea divergente pero $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ sea convergente.
2. Demuestra que $\sum_{n=1}^{\infty} na^n$ converge para $a \in \mathbb{C}$ si $|a| < 1$ y diverge si $|a| \geq 1$.
3. ¿Para cuales complejos a de norma 1 es cierto que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n}$ converge?

Sucesiones y series de funciones

Diremos que una sucesión de funciones $f_n : A \to \mathbb{C}$ *converge puntualmente* a una función $f : A \to \mathbb{C}$, si para cada $z \in A$, $f_n(z) \to f(z)$, es decir, si para cada $z \in A$ y cada $\epsilon > 0$, existe N tal que $|f_n(z) - f(z)| < \epsilon$ siempre que $n \geq N$.

Si $B \subset A$, diremos que la sucesión f_n *converge uniformemente* a f en B si para cada $\epsilon > 0$, existe N tal que $|f_n(z) - f(z)| < \epsilon$ para toda $z \in B$, siempre que $n \geq N$ (N no depende de z).

Diremos que la serie $\sum_{i=1}^{\infty} f_i(z)$ converge puntualmente (o uniformemente) a $f(z)$, si la sucesión de sumas parciales $\sum_{i=1}^{n} f_i(z)$ converge puntualmente (o uniformemente) a $f(z)$

Ejemplos:

- La sucesión $f_n(z) = \frac{n+1}{n} z$ converge puntualmente a $f(z) = z$ pero la convergencia no es uniforme en $\mathbb{C}$ (ya que $|f_n(z) - f(z)| \to \infty$ cuando $z \to \infty$).
- Las sucesión $f_n(z) = z^n$ converge a puntualmente a la función $f(z) = 0$ para $|z| < 1$. La convergencia es uniforme en cada disco $|z| \leq r$ con $r < 1$.

Criterio de Cauchy. La sucesión $f_n(z)$ converge uniformemente en B si y solo si para todo $\epsilon > 0$ existe N tal que $|f_n(z) - f_m(z)| < \epsilon$ para toda $z \in B$, siempre que $m, n > N$.
La serie $\sum_{i=1}^{\infty} f_i(z)$ converge uniformemente en B si y solo si para todo $\epsilon > 0$ existe N tal que $|\sum_{i=m}^{n} f_i(z)| < \epsilon$ para toda $z \in B$, siempre que $m, n > N$.

Teorema. Si las funciones $f_n : A \to \mathbb{C}$ son continuas entonces:

a) Si $f_n \to f$ uniformemente en $B \subset A$, entonces f es continua en B.

b) Si $\sum f_n \to F$ uniformemente en $B \subset A$, entonces F es continua en B.

Demostracion.
a) Si $f_n \to f$ uniformemente en B entonces para cada $\epsilon > 0$ existe N tal que $|f_n(z) - f(z)| < \epsilon/3$ para todo $z \in B$ si $n \geq N$. Como f_N es continua, para cada $z_0 \in A$ existe δ tal que $|f_N(z) - f_N(z_0)| < \epsilon/3$ siempre que $|z - z_0| < \delta$. Entonces si $z, z_0 \in B$ y $|z - z_0| < \delta$, la desigualdad del triángulo implica
$|f(z) - f(z_0)| \leq |f(z) - f_N(z)| + |f_N(z) - f_N(z_0)| + |f_N(z_0) - f(z_0)| < \epsilon/3 + \epsilon/3 + \epsilon/3 = \epsilon$
por lo tanto f es continua en cada $z_0 \in B$.
b) Como las sumas finitas de funciones continuas son continuas, podemos aplicar a) a la sucesion de sumas parciales. ▲

Ojo: Una sucesión de funciones continuas puede converger puntualmente a una función que no es continua. Una sucesión de funciones diferenciables reales puede converger uniformemente a una función que no es diferenciable:

Criterio M de Weierstrass. Dada una sucesión de funciones $f_n : A \to \mathbb{C}$, supongamos que hay una sucesión de constantes $M_n \geq 0$ tales que

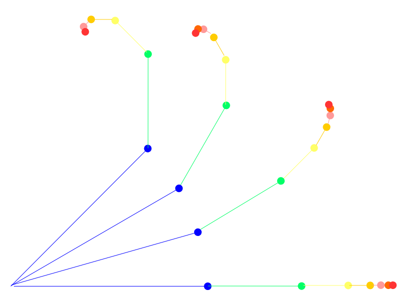
a) $|f_n(z)| \leq M_n$ para todo $z \in A$ y

b) $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ converge.

Entonces $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converge absolutamente y uniformemente en A.

Demostracion. Como $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ converge, entonces para cada $\epsilon > 0$ existe N tal que $\sum_{i=m}^{n} M_n < \epsilon$ si $m, n \geq N$. Pero $\sum_{i=m}^{n} f_n(z) \leq \sum_{i=m}^{n} M_n$ para cada $z \in A$, asi que por el criterio de Cauchy para series $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converge uniformemente en A. ▲

Ejemplo. La serie $\sum_{n=1}^{\infty} z^n$ converge uniformemente en cada disco $|z| \leq r$ si $r < 1$ ya que $|z^n| \leq r^n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} r^n$ converge si $r < 1$. Por lo tanto la función $\sum_{n=1}^{\infty} z^n$ es continua en cada disco $|z| < r$ con $r < 1$ y por lo tanto es continua en todo $|z| < 1$.



La serie $z + z^2 + z^3 + z^4 + z^5 + \ldots$ para 4 valores distintos de z

Problemas

4. La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ converge a una función continua en todo $\mathbb{C}$ (muestra que la serie converge uniformemente en cada disco $|z| \leq r$ para todo $r > 0$).

5. La serie $\sum_{n=1}^{\infty} nz^n$ converge uniformemente en cada disco $|z| \leq r$ si $r < 1$ y por lo tanto $F(z) = z + 2z^2 + 3z^3 + 4z^4 + ...$ es una función continua en el disco abierto $|z| < 1$.

Es natural preguntarse si la derivada de un límite de funciones derivables es el límite de las derivadas, o si la integral del limite es el límite de las integrales. Aún si el límite es uniforme la respuesta a la primera pregunta es en general negativa (un límite uniforme de funciones derivables no tiene que ser derivable) pero la respuesta de la segunda es positiva:

Lema. Si γ es una curva suave por pedazos en la región A y $f_n : A \to \mathbb{C}$ es una sucesión de funciones continuas que convergen uniformemente a f en γ, entonces

$$\int_\gamma f_n(z)\ dz \to \int_\gamma f(z)\ dz$$

Si $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ converge uniformemente en γ, entonces

$$\int_\gamma \big(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)\big)\ dz = \sum_{n=1}^{\infty} \int_\gamma f_n(z)\ dz$$

Demostracion. Como f_n converge uniformemente a f en γ entonces para cada $\epsilon > 0$ existe N tal que $|f_n(z) - f(z)| < \epsilon$ para $z \in \gamma$. Entonces

$$\Big|\int_\gamma f_n(z)\ dz - \int_\gamma f(z)\ dz\Big| = \Big|\int_\gamma (f_n(z) - f(z))\ dz\Big| \leq \int_\gamma |f_n(z) - f(z)|\ dz \leq \epsilon \cdot l(\gamma)$$

donde $l(\gamma)$ es la longitud de γ, que es fija, asi que cuando $n \to \infty$, $\int_\gamma f_n \to \int_\gamma f$.

Para demostrar la fórmula para las series, observar que las integrales sacan sumas finitas

$$\int_\gamma \big(\sum_{n=1}^{N} f_n(z)\big)\ dz = \sum_{n=1}^{N} \int_\gamma f_n(z)\ dz$$

ahora el resultado se sigue de aplicar la primera parte a la sucesión de sumas parciales. ▲

Sucesiones y series de funciones analíticas

Teorema de convergencia analítica. Sea f_n una sucesión de funciones analíticas en un abierto A. Si $f_n \to f$ y la convergencia es uniforme en cada disco cerrado en A, entonces f es analítica en A. Además $f_n' \to f'$ y la convergencia es uniforme en cada disco cerrado en A.

Si $F(z) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ converge en A y la convergencia es uniforme en cada disco cerrado en A, entonces F es analítica en A, $F'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(z)$ y la convergencia es uniforme en cada disco cerrado en A.

Demostracion. Para mostrar que la función f es analítica en A, basta ver que f es analítica en el interior de cada disco cerrado D contenido en A. Como f_n es analítica en D, $\int_c f_n(z)\,dz = 0$ para cada curva cerrada c en D. Como las funciones f_n convergen uniformemente a f en D, entonces $\int_c f_n \to \int_c f$ asi que $\int_c f = 0$ y por el teorema de Morera f es analítica en D.

Por la fórmula integral de Cauchy, si D es un disco contenido en A y centrado en z entonces

$$f_n'(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D} \frac{f_n(\zeta)}{(\zeta - z)^2}\,d\zeta \qquad y \qquad f'(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2}\,d\zeta$$

Como $f_n(\zeta)$ converge uniformemente a $f(\zeta)$ en ∂D y $\left|\frac{f_n(\zeta)}{(\zeta-z)^2} - \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^2}\right| = |f_n(\zeta) - f(\zeta)| \cdot \frac{1}{r^2}$ donde r es el radio de D, entonces $\frac{f_n(\zeta)}{(\zeta-z)^2}$ converge uniformemente a $\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^2}$ en ∂D. Asi que por el lema anterior las integrales convergen y por lo tanto las derivadas f_n' convergen a f'.

El resultado para las series se sigue aplicando lo anterior a la sucesion de sumas parciales $F_N(z) = \sum_{n=1}^{N} f_n(z)$, ya que sabemos que las derivadas sacan sumas finitas: $F_N'(z) = \sum_{n=1}^{N} f_n'(z)$. ▲

Si aplicamos el teorema de convergencia analítica repetidamente, vemos que si las funciones f_n son analíticas en A y convergen uniformemente en discos cerrados en A, entonces las derivadas k-esimas $f_n^{(k)}$ convergen a $f^{(k)}$ y la convergencia es uniforme en discos cerrados en A.

Ejemplos.

- La función $F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$ es analítica para $|z| < 1$. Su derivada es $F'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} nz^{n-1}$.
  Observar que $\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$ para $|z| < 1$ asi que $\sum_{n=0}^{\infty} nz^{n-1} = \frac{1}{(1-z)^2}$ para $|z| < 1$.
- $E(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ es analítica en $\mathbb{C}$.
  $E'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} n\frac{z^{n-1}}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{n-1}}{n-1!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = E(z)$.

Problemas

6. Demuestra que para cualquier sucesión acotada a_n en $\mathbb{C}$, la serie $a_0+a_1z+a_2z^2+a_3z^3+\dots$ es una función analítica para $|z|<1$.
7. Muestra que $f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}1/z^n$ es analítica para $|z|>1$ y encuentra su derivada.

Series de potencias

Una *serie de potencias* alrededor de un punto z_0 es una serie de la forma $\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n$. La serie define una función en todos los puntos $z\in\mathbb{C}$ donde converge, y la convergencia depende basicamente del módulo de los coeficientes a_n y de la distancia de z a z_0.

Ejemplo. $\dfrac{1}{1-z}=1+z+z^2+z^3+\cdots+z^n+\cdots=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}z^n$ para $|z|<1$ y por lo tanto

$$\frac{1}{z}=\frac{1}{1-(1-z)}=1+(1-z)+(1-z)^2+(1-z)^3+\cdots+(1-z)^n+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(z-1)^n \quad \text{para } |z-1|<1$$

Lema. Si la sucesión a_nr^n está acotada entonces la serie $\sum_{n=0}^{\infty}a_nr'^n$ converge para todo $r'<r$.

Demostracion. Si $|a_n|r^n\le M$ entonces $|a_n|r'^n=|a_n|r^n(\frac{r'}{r})^n\le M(\frac{r'}{r})^n$. Como $\frac{r'}{r}<1$ la serie $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{r'}{r})^n$ converge y por el criterio de comparación $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|r'^n$ tambien converge. ▲

Teorema. Para cada serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n$ existe un único R, $0\le R\le\infty$, llamado el *radio de convergencia*, tal que si $|z-z_0|<R$ la serie converge y si $|z-z_0|>R$ la serie diverge. La convergencia es uniforme en cada disco $|z-z_0|\le r$ con $r<R$.

Demostracion. Sea R el supremo de las $r\in[0,\infty]$ tales que $\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|r^n$ converge. Si $r<R$ entonces $\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|r^n$ converge y por el criterio M de Weierstrass $\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n$ converge absolutamente y uniformemente para $|z-z_0|\le r$.

Si $|z-z_0|=r$ y $\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n$ converge, entonces la sucesión $a_n(z-z_0)^n$ debe converger a 0, asi que la sucesión $|a_n|r^n$ debe estár acotada y por el lema anterior $\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|r'^n$ converge para todo $r'<r$. Asi que R (que es el supremo de las r para los que esa serie converge) debe ser al menos r. ▲

Ejemplo.

Para hallar el radio de convergencia de la serie $1+2iz-4z^2-8iz^3+16z^4+32iz^5-\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}(2i)^n z^n$ hay que hallar los valores de r para los que $\sum_{n=1}^{\infty}|2i|^n r^n$ converge. Por el criterio de la razón, esta serie converge si $lim_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}r^{n+1}}{2^n r^n}=2r<1$ y diverge si $lim_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}r^{n+1}}{2^n r^n}=2r>1$, así que el radio de convergencia es $1/2$.

Teorema. Cada serie de potencias $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n$ es analítica dentro de su círculo de convergencia. Además $f'(z)=\sum_{i=0}^{\infty}na_n(z-z_0)^{n-1}$ dentro de ese círculo y $a_n=f^{(n)}(z_0)/n!$.

Demostracion. La analiticidad de f y la fórmula para f' son consecuencias inmediatas del teorema de convergencia analítica. La fórmula para a_n se sigue de aplicar la fórmula para la derivada n veces y evaluar en z_0. ▲

Corolario. Si

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n=\sum_{n=0}^{\infty}b_n(z-z_0)^n$$

para toda z en algún disco centrado en z_0, entonces $a_n=b_n$ para toda n.

Demostracion. Si las dos funciones definidas por las series son iguales en un disco entonces sus derivadas son iguales en cada punto del disco, y por el resultado anterior los coeficientes estan determinados por las derivadas en z_0. ▲

Problemas

8. Muestra que el radio de convergencia de la serie $\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n$ está dado por
   $R=lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$
   $R=1/lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}$
   siempre que estos límites existan.

9. Demuestra que el radio de convergencia de la serie $\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n$ es igual al radio de convergencia de su derivada $\sum_{n=0}^{\infty}na_n(z-z_0)^{n-1}$.

10. ¿Cual es el radio de convergencia de las siguientes series?
    $f(z)=z+\frac{z^2}{2^2}+\frac{z^3}{2^3}+\cdots+\frac{z^n}{2^n}+\ldots$
    $g(z)=z+\frac{z^2}{2^2}+\frac{z^3}{3^2}+\cdots+\frac{z^n}{n^2}+\ldots$
    $h(z)=z+\frac{z^2}{2^2}+\frac{z^3}{3^3}+\cdots+\frac{z^n}{n^n}+\ldots$

Teorema de Taylor. Toda función analítica f en una región A tiene representaciones en series de potencias alrededor de cada punto z_0 de A:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n$$

Esta *serie de Taylor* converge en el disco mas grande centrado en z_0 y contenido en A.

Demostracion. Fijemos $z_0 \in A$. Sea D un disco con centro en z_0 y radio r contenido en A. Veremos que $f(z)$ tiene un desarrollo de potencias alrededor de z_0 que converge para todo $z \in D$. Por la fórmula integral de Cauchy, para cada z en el interior de D,

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta$$

Por otro lado

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta - z_0} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{\zeta - z_0}} = \frac{1}{\zeta - z_0} \sum_{n=0}^{\infty} (\frac{z - z_0}{\zeta - z_0})^n$$

que converge absolutamente para $\zeta \in \partial D$ si z esta en el interior de D ya que $|z - z_0| < r$ y $|\zeta - z_0| = r$.

Ahora

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} \cdot \frac{(z - z_0)^n}{(\zeta - z_0)^n}\, d\zeta$$

Como las funciones dentro de la serie son continuas en ∂D ya que ni z_0 ni z están en ∂D y la serie de funciones converge uniformemente en ∂D ya que $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r'}{r}\right)^n$ converge y $\frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0}$ está acotada en ∂D, entonces podemos intercambiar la integral con la sumatoria y obtenemos

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=0}^{\infty} \int_{\partial D} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} \cdot \frac{(z - z_0)^n}{(\zeta - z_0)^n}\, d\zeta$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=0}^{\infty} (z - z_0)^n \int_{\partial D} \frac{f(\zeta)\cdot}{(\zeta - z_0)^{n+1}}\, d\zeta$$

Y aplicando las formulas integrales de Cauchy para las derivadas obtenemos

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (z - z_0)^n \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$$

▲

Ejemplos.

Si $f(z)=z^{-1}$ entonces $f'(z)=-z^{-2}$, $f''(z)=2z^{-3}$ $f'''(z)=-3!z^{-4}$, $f''''(z)=4!z^{-5}$ asi que

$$1/z \;=\; 1-1(z-1)+1(z-1)^2-1(z-1)^3+1(z-1)^4+\dots \qquad \text{para } |z-1|<1$$

$$1/z \;=\; \tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{4}(z-2)+\tfrac{1}{8}(z-2)^2-\tfrac{1}{16}(z-2)^3+\tfrac{1}{32}(z-2)^4-\dots \qquad \text{para } |z-2|<2$$

$$\begin{aligned}\sqrt{z} &= 1^{1/2}+\frac{\frac{1}{2}1^{-\frac{1}{2}}}{1}(z-1)+\frac{-\frac{1}{4}1^{-\frac{3}{2}}}{2!}(z-1)^2+\frac{\frac{3}{8}1^{-\frac{5}{2}}}{3!}(z-1)^3+\frac{-\frac{15}{16}1^{-\frac{7}{2}}}{4!}(z-1)^4+\dots\\ &= 1+\tfrac{1}{2}(z-1)-\tfrac{1}{8}(z-1)^2+\tfrac{1}{16}(z-1)^3-\tfrac{5}{128}(z-1)^4+\dots \qquad \text{para } |z-1|<1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}e^z &= e^0+\tfrac{e^0}{1}z+\tfrac{e^0}{2!}z^2+\tfrac{e^0}{3!}z^3+\tfrac{e^0}{4!}z^4+\dots+\tfrac{1}{n!}z^n+\dots\\ &= 1+z+\tfrac{1}{2!}z^2+\tfrac{1}{3!}z^3+\tfrac{1}{4!}z^4+\dots+\tfrac{1}{n!}z^n+\dots \qquad \text{para todo } z\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}sen(z) &= sen(0)+\tfrac{cos(0)}{1}z-\tfrac{sen(0)}{2!}z^2-\tfrac{cos(0)}{3!}z^3+\tfrac{sen(0)}{4!}z^4-\tfrac{cos(0)}{5!}z^5-\tfrac{sen(0)}{6!}z^6+\dots=\\ &= z-\tfrac{1}{3!}z^3+\tfrac{1}{5!}z^5-\tfrac{1}{7!}z^7+\tfrac{1}{9!}z^9-\tfrac{1}{11!}z^{11}+\tfrac{1}{13!}z^{13}-\dots \qquad \text{para todo } z\end{aligned}$$

A partir de la serie de una función podemos encontrar fácilmente las series de otras funciones:

$$\tfrac{sen(z)}{z}=1-\tfrac{1}{3!}z^2+\tfrac{1}{5!}z^4-\tfrac{1}{7!}z^6+\tfrac{1}{9!}z^8-\tfrac{1}{11!}z^{10}+\tfrac{1}{13!}z^{12}-\dots \qquad \text{para todo } z\neq 0$$

$$sen(z^2)=z^2-\tfrac{1}{3!}z^6+\tfrac{1}{5!}z^{10}-\tfrac{1}{7!}z^{14}+\tfrac{1}{9!}z^{18}-\tfrac{1}{11!}z^{22}+\tfrac{1}{13!}z^{26}-\dots \qquad \text{para todo } z$$

Corolario. Las funciones analíticas son las funciones complejas que pueden escribirse localmente como series de potencias.

Demostracion. Todas las series de potencias son funciones analíticas dentro de sus discos de convergencia y cada función analítica esta representada por series de potencias en discos centrados en cada punto de su dominio. ▲

Ceros de funciones analíticas

Si $f(z)$ analítica en una región A entonces para cada punto z_0 en A, $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n$ en el disco mas grande centrado en z_0 y contenido en A.

Si $f^{(n)}(z_0) = 0$ para toda n entonces $f(z) = 0$ en todos los puntos del disco. Si no, hay un n tal que $f^{(i)}(z_0) = 0$ para todo $i < n$ pero $f^{(n)}(z_0) \neq 0$, y diremos que f *tiene un cero de orden* n en z_0.

Lema. Si f es una función analítica en la región A y $f(z)$ tiene un cero de orden n en z_0, entonces $f(z) = g(z)(z-z_0)^n$ donde g es una función analítica en A y $g(z_0) = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} \neq 0$.

Demostracion. Si $f(z)$ tiene un cero de orden n en z_0, entonces en una vecindad de z_0 $f(z)$ tiene desarrollo de Taylor de la forma $f(z) = \sum_{i=n}^{\infty} a_i(z-z_0)^i$, donde $a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} \neq 0$.

Considerar la función $g(z) = \frac{f(z)}{(z-z_0)^n}$ para $z \neq z_0$ y $g(z_0) = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$. Entonces $g(z)$ es analítica en $A - \{z_0\}$ y es continua en z_0 ya que $lim_{z \to z_0} g(z) = lim_{z \to z_0} \sum_{i=n}^{\infty} a_i(z-z_0)^{i-n} = a_n$ Por lo tanto $g(z)$ es analítica en A y podemos escribir $f(z) = g(z)(z-z_0)^n$. ▲

Lo anterior muestra que si una función analítica f tiene un cero en z_0, entonces hay una vecindad de z_0 donde f no tiene ningun otro cero, o donde f es identicamente 0.

Corolario. Si f es analítica en una región conexa A y hay una sucesion de puntos $z_i \to z_0 \in A$ con $f(z_i) = 0$ para toda i, entonces $f(z) = 0$ para todo $z \in A$.

Demostración. Si $f(z)$ se anula en una sucesión de puntos de A que convergen a un punto de A entonces por continuidad $f(z)$ debe anularse en el punto límite, y por lo anterior $f(z)$ debe anularse en toda una vecindad del punto límite. En particular, $f(z) = 0$ en una vecindad de z_0.

Tomemos cualquier $z_1 \in A$, queremos ver que $f(z_1) = 0$. Como A es conexa, existe una curva $\gamma : [0,1] \to A$ tal que $\gamma(0) = z_0$ y $\gamma(1) = z_1$. Sea s el supremo de los t tales que $f(\gamma[0,t]) = 0$. Por continuidad $f(\gamma(s)) = 0$ y hay una sucesión de puntos $\gamma(t_i) \to \gamma(s)$ tales que $f(\gamma(t_i)) = 0$. Por lo anterior f debe ser 0 en una vecindad de $f(\gamma(s)) = 0$, en particular $f(\gamma(t)) = 0$ para los $t > s$ cercanos a s, lo que dice que s no es el supremo, a menos que $s = 1$, lo que dice que $f(z_1) = f(\gamma(1)) = 0$. ▲

Corolario. Si f y g son funciones analíticas en una región conexa A y hay una sucesion de puntos $z_i \to z_0 \in A$ con $f(z_i) = g(z_i)$ entonces $f(z) = g(z)$ para todo $z \in A$.

Demostración. La función $f(z) - g(z)$ es analítica en A y $f(z_i) - g(z_i) = 0$, así que por el corolario anterior $f(z) - g(z) = 0$. ▲

Producto de series. Si $f(z) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i z^i$ y $g(z) = \sum_{j=0}^{\infty} b_i z^j$ para $|z| < r$ entonces

$$f \cdot g\ (z) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_{n-1} b_1 + a_n b_0) z^n \qquad\qquad \textit{para } |z| < r$$

o sea que el producto de dos series convergentes se obtiene multiplicando todos los términos de una por todos los terminos de la otra.

Demostración. $f(z)$ y $g(z)$ son analíticas para $|z| < r$, asi que el producto es una función analítica para $|z| < r$ y su serie de Taylor alrededor de 0 es

$$f \cdot g\ (z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(f \cdot g)^{(n)}(0)}{n!} z^n \qquad \textit{para todo } |z| < r$$

Usando la regla del Leibnitz $(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$ puede verse que $(f \cdot g)^{(n)} = \sum_{i=0}^{n} \frac{n!}{i!\ n-i!} f^{(i)} g^{(n-i)}$ por lo tanto

$$\frac{(f \cdot g)^{(n)}(0)}{n!} = \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(0)}{i\ !} \frac{g^{(n-i)}(0)}{n-i\ !} = \sum_{i=0}^{n} a_i b_{n-i}$$

▲

Problemas

11. Encuentra las series de Taylor de las siguientes funciones y da sus radios de convergencia.
    a) $1 - z + z^2 - z^3$ alrededor de 1 y alrededor de 2.
    b) $1/z$ alrededor de i
    c) e^z alrededor de 1
    d) $cos(z)$ alrededor de 0 y alrededor de $\pi/2$
12. Encuentra una serie para $log(z)$ integrando una serie para $1/z$ en $z = 1$ y da su radio de convergencia.
13. Encuentra (como puedas) las series de Taylor para las siguientes funciones alrededor de $z = 0$
    a) $\frac{1}{1+z^2}$
    b) $\frac{e^z - 1}{z}$
14. ¿De que órdenes son los ceros de las siguientes funciones?
    a) $e^z - e$ en $z = 1$ b) $1 + cos(z)$ en $z = \pi$ c) $sen(z^3)$ en $z = 0$
15. Demuestra que si $f(z)$ y $g(z)$ son funciones analíticas que tienen ceros de orden n en z_0 entonces $lim_{z \to z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{f^{(n)}(z_0)}{g^{(n)}(z_0)}$.
16. Encuentra los primeros términos de la serie de Taylor de $sen(z)cos(z)$ alrededor de $z = 0$.