Singularidades

Hay muchas funciones que son analíticas en una región con excepción de algunos puntos aislados donde no están definidas. Por ejemplo, $1/z$ es analítica en $\mathbb{C} - \{0\}$ y $\frac{cos(z)}{sen(z)}$ es analítica en $\mathbb{C} - \{0, \pm\pi, \pm 2\pi, \pm 3\pi, \dots\}$. Estos son los *puntos singulares esas funciones.* No podemos esperar que una función tenga una serie de Taylor en un punto singular donde ni siquiera está definida, pero si la singularidad esta aislada entonces se pueden usar otro tipo de series.

Por ejemplo, $\quad e^z = 1 + z + \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{3!}z^3 + \frac{1}{4!}z^4 + \cdots + \frac{1}{n!}z^n + \dots \qquad$ para todo z

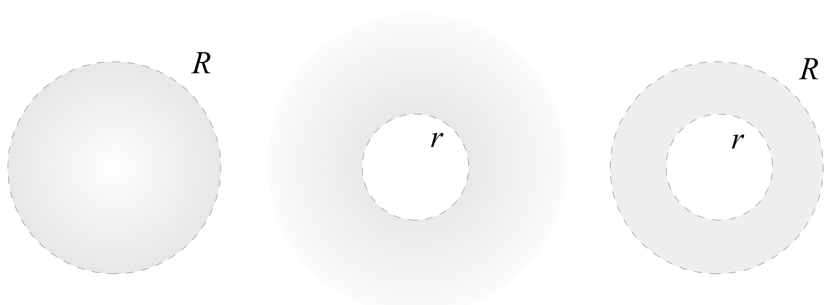
así que $\qquad e^{1/z} = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2}\frac{1}{z^2} + \frac{1}{3!}\frac{1}{z^3} + \frac{1}{4!}\frac{1}{z^4} + \cdots + \frac{1}{n!}\frac{1}{z^n} + \dots \qquad$ para todo $z \neq 0$.

Una *serie de Laurent* es una serie de potencias que pueden ser positivas y/o negativas:

$$\sum_{-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n =$$

$$= \dots + a_{-2}(z - z_0)^{-2} + a_{-1}(z - z_0)^{-1} + a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + a_3(z - z_0)^3 + \dots$$

Para que esta serie converja, tanto la serie de potencias positivas como la serie de potencias negativas deben converger. La serie de potencias positivas $\sum a_n(z - z_0)^n$ converge en el interior de un circulo $|z - z_0| < R$ y la serie de potencias negativas $\sum \frac{a_n}{(z-z_0)^n}$ converge en el exterior de un círculo: $r < |z - z_0|$ asi que si $r < R$ la serie completa converge en el anillo $r < |z - z_0| < R$.



Ejemplo. La serie $\dots \frac{1}{z^3} + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z} + 1 + \frac{1}{2}z + \frac{1}{4}z^2 + \frac{1}{8}z^3 + \dots$ converge para $1 < |z| < 2$. Como la función definida por la serie es un límite de funciones analíticas y la convergencia es uniforme en cada anillo $r' < |z| < R'$ con $1 < r'$ y $R' < 2$, entonces la serie define una función analítica en el anillo $1 < |z| < 2$.

Teorema de Laurent. Si f es una función analítica en una región que contiene al anillo $r < |z - z_0| < R$ entonces existe una serie de Laurent alrededor de z_0 que converge y coincide con $f(z)$ en ese anillo. La convergencia es uniforme en cada anillo $r' \leq |z - z_0| \leq R'$ para $r < r' < R' < R$. Los coeficientes de la serie están dados por

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} \, d\zeta$$

donde C es un círculo centrado en z_0 y contenido en el anillo.

Demostración. Haciendo un cambio de variable podemos asumir que $z_0 = 0$.

Si z es un punto en el interior del anillo $r' \leq |z| \leq R'$ entonces por la fórmula integral de Cauchy

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_{R'}} \frac{f(\zeta)}{\zeta} \, d\zeta - \frac{1}{2\pi i} \int_{C_{r'}} \frac{f(\zeta)}{\zeta} \, d\zeta$$

Por un lado, como z está en el interior de $C_{R'}$,

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{\zeta}\right)^n$$

que converge uniformemente en $C_{R'}$ asi que

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{C_{R'}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \, d\zeta = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \Big[\int_{C_{R'}} \frac{f(\zeta)}{\zeta^{n+1}} \, d\zeta \Big] z^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

que da la serie de las potencias positivas y 0.

Por otro lado, como z está en el exterior de $C_{r'}$,

$$-\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{z(1 - \frac{\zeta}{z})} = \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\zeta}{z}\right)^n$$

que converge uniformemente en $C_{r'}$ asi que

$$-\frac{1}{2\pi i} \int_{C_{r'}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \, d\zeta = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \Big[\int_{C_{r'}} f(\zeta) \zeta^n \, d\zeta \Big] \frac{1}{z^{n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_{-n-1}}{z^{n+1}}$$

que da la serie de las potencias negativas. ▲

Ejemplo. La función $f(z) = \frac{1}{z(z-1)}$ es analítica excepto en los puntos en $z = 0$ y en $z = 1$, asi que $f(z)$ es analítica en $0 < |z| < 1$, en $1 < |z|$, por lo que $f(z)$ tiene 2 series de Laurent distintas alrededor de 0, una para cada región:

$\frac{1}{z(z-1)} = \frac{1}{z} \frac{1}{z-1} = \frac{1}{z}(-1 - z - z^2 - z^3 - z^4 - \dots) = -\frac{1}{z} - 1 - z - z^2 - z^3 - \dots \qquad$ para $0 < |z| < 1$

$\frac{1}{z(z-1)} = \frac{1}{z^2} \frac{1}{1 - \frac{1}{z}} = \frac{1}{z^2}(1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^3} + \frac{1}{z^4} + \dots) = \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^3} + \frac{1}{z^4} + \frac{1}{z^5} + \frac{1}{z^6} + \dots \qquad$ para $|z| > 1$

Singularidades aisladas

Si f es una función que está definida y es analítica en una vecindad agujerada de z_0 (es decir, en todos los puntos de $\mathbb{C}$ tales que $0 < |z - z_0| < \epsilon$) decimos que f tiene una *singularidad aislada* en z_0. En este caso $f(z)$ tiene una serie de Laurent en un anillo $0 < |z - z_0| < \epsilon$:

$$f(z) = \ldots + a_{-2}(z - z_0)^{-2} + a_{-1}(z - z_0)^{-1} + a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + a_3(z - z_0)^3 + \ldots$$

La singularidad en z_0 puede ser de 3 distintos tipos:

- Si todas las a_{-i} son iguales a 0, la serie está definida y es continua en z_0, así que $f(z)$ puede extenderse a una función analítica en z_0. En este caso diremos que f tiene una *singularidad removible* en z_0.
- Si hay una cantidad finita de a_{-i} distintos de 0, de modo que $a_{-n} \neq 0$ pero $a_{-i} = 0$ para $-i < -n$, entonces $lim_{z \to z_0} f(z) = \infty$ y diremos que f tiene un *polo de orden* n en z_0.
- Si hay una infinidad de a_{-i} distintos de 0, diremos que f tiene una *singularidad esencial* n en z_0.

Ejemplo: Como la serie de Taylor de $f(z) = sen(z)$ alrededor de 0 es $z - \frac{1}{3!}z^3 + \frac{1}{5!}z^5 - \frac{1}{7!}z^7 + \ldots$

$f_1(z) = \frac{sen(z)}{z}$	$1 - \frac{1}{3!}z^2 + \frac{1}{5!}z^4 - \frac{1}{7!}z^6 + \ldots$	tiene una singularidad removible
$f_2(z) = \frac{sen(z)}{z^2}$	$\frac{1}{z} - \frac{1}{3!}z + \frac{1}{5!}z^3 - \frac{1}{7!}z^5 + \ldots$	tiene un polo de orden 1
$f_3(z) = \frac{sen(z)}{z^4}$	$\frac{1}{z^3} - \frac{1}{3!}\frac{1}{z} + \frac{1}{5!}z - \frac{1}{7!}z^3 + \ldots$	tiene un polo de orden 3
$f_4(z) = sen(\frac{1}{z})$	$\frac{1}{z} - \frac{1}{3!}\frac{1}{z^3} + \frac{1}{5!}\frac{1}{z^5} - \frac{1}{7!}\frac{1}{z^7} + \ldots$	tiene una singularidad esencial

Hallar las series de Laurent de una función puede ser muy dificil (¿cual es la serie de Laurent de $\frac{1}{sen(z)}$ alrededor de 0?), pero hay maneras mas sencillas de hallar el tipo de una singularidad:

Observación. Si f es analítica en $0 < |z - z_0| < \epsilon$ entonces:

a) $f(z)$ tiene una singularidad removible en z_0 si $lim_{z \to z_0} f(z)$ existe.

b) $f(z)$ tiene un cero de orden n en z_0 si $lim_{z \to z_0} \frac{f(z)}{(z-z_0)^n}$ existe y el límite es distinto de 0.

c) $f(z)$ tiene un polo de orden n en z_0 si $lim_{z \to z_0} f(z)(z - z_0)^n$ existe y el límite es distinto de 0.

Ejemplo. Como $lim_{z\to 0}\frac{z}{sen(z)} = 1$ entonces $\frac{1}{sen(z)}$ tiene un polo de orden 1 en 0.

Ejemplo. Si $f(z)$ que tiene un cero de orden n en z_0, entonces $g(z) = \frac{1}{f(z)}$ tiene un polo de orden n en z_0, y que si $f(z)$ que tiene un polo de orden m en z_0, entonces $g(z) = \frac{1}{f(z)}$ tiene un cero de orden m en z_0.

Una situación donde aparecen singularidades aisladas es en los cocientes de funciones analíticas.

Corolario. Si $f(z)$ y $g(z)$ son funciones analíticas tales que $f(z)$ tiene un cero de orden k y $g(z)$ tiene un cero de orden l en z_0, entonces:

a) si $k = l$, $\frac{f(z)}{g(z)}$ tiene una singularidad removible en z_0.

b) si $k > l$, $\frac{f(z)}{g(z)}$ tiene una singularidad removible en z_0, que es un cero de orden $k - l$.

c) si $l > k$, $\frac{f(z)}{g(z)}$ tiene un polo de orden $l - k$ en z_0.

Problemas

1. ¿En cuales regiones del plano convergen estas series?
   $\dots\frac{1}{16z^4} + \frac{1}{8z^3} + \frac{1}{4z^2} + \frac{1}{2z} + 1 + \frac{z}{3} + \frac{z^2}{9} + \frac{z^3}{27} + \frac{z^4}{81} + \dots$
   $\dots\frac{1}{4z^4} + \frac{1}{3z^3} + \frac{1}{2z^2} + \frac{1}{z} + 1 + \frac{z}{1} + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + \dots$
2. Calcula las series de Laurent alrededor de $z = 0$ (algunas tienen dos series)

   $$a)\ \frac{z^3}{z-2} \qquad b)\ \frac{1}{z^2(z+1)} \qquad c)\ \frac{e^z}{z^3} \qquad d)\ (z^2 - z)e^{1/z}$$

3. Calcula la serie de Laurent para la función $f(z) = \frac{1}{(z-1)(z+2)}$ para $1 < |z| < 2$.
   (hint: escribe a f como suma de dos funciones mas simples)
4. Calcula la serie de Laurent para la función $\frac{1}{(z-1)^2}$ para $|z| > 1$ derivando la serie para $\frac{1}{z-1}$
5. ¿De que tipo son las singularidades de las siguientes funciones en $z = 0$?

   $$a)\ \frac{1}{z^3 + z^2} \qquad b)\ \frac{cos(z)}{sen(z)} \qquad c)\ \frac{sen^2(z)}{cos(z) - 1} \qquad d)\ e^{1/z}$$

Si una función f tiene una singularidad aislada en z_0, y la singularidad es removible, entonces $lim_{z \to z_0} f(z) = w \in \mathbb{C}$ (y si definimos $f(z_0) = w$ la función es analítica en z_0). Si la singularidad es un polo entonces $lim_{z \to z_0} f(z) = \infty$. Pero si la singularidad es esencial, entonces $lim_{z \to z_0} f(z)$ nunca existe, y el comportamiento de f alrededor de z_0 es caotico:

Teorema (Casorati-Weierstrass). Si f tiene una singularidad aislada esencial en z_0 y w es cualquier punto en $\mathbb{C}$ entonces existe una sucesión de puntos $z_i \to z_0$ tal que $f(z_i) \to w$.

Demostración. Si existiera un $w \in \mathbb{C}$ tal que para ninguna sucesión $z_i \to z_0$ ocurre que $f(z_i) \to w$ entonces existiría un $\epsilon > 0$ y un $\delta > 0$ tal que si $0 < |z - z_0| < \delta$ entonces $|f(z) - w| > \epsilon$. En particular, $f(z) \neq w$ para $0 < |z - z_0| < \delta$ y $g(z) = \frac{1}{f(z)-w}$ sería analítica en $0 < |z - z_0| < \delta$ y $|g(z)| < 1/\delta$ ahi, así que si g tiene una singularidad en z_0 la singularidad es removible y podemos definir $g(z_0)$ para que g sea analítica en $0 < |z - z_0| < \delta$. Si $g(z) \neq 0$ entonces $f(z) = w + \frac{1}{g(z)}$ es analítica en z_0. Si $g(z_0) = 0$ entonces $g(z)$ tiene un cero de orden k en z_0 y por lo tanto $f(z) = w + \frac{1}{g(z)}$ tiene un polo de orden k en z_0. ▲

Funciones holomorfas y meromorfas

Si la función $f : A - \{z_0\} \to \mathbb{C}$ tiene un polo en z_0, podemos extenderla a $f : A \to \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ definiendo $f(z_0) = \infty$. Por otro lado, si $lim_{z \to \infty} f(z)$ existe, entonces podemos extenderla a $f : A \cup \{\infty\} \to \mathbb{C}$ definiendo $f(\infty)$ como ese límite. Tiene sentido preguntarse si estas funciones extendidas a ∞ se comportan como funciones analíticas ahi. Para esto podemos usar la inversión $I(z) = 1/z$, que es una función conforme de la esfera de riemann $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ en si misma.

Si $f(z_0) = \infty$ entonces $1/f(z_0) = 0$ y viceversa, y el comportamiento de $f(z)$ cerca de z_0 se refleja en el comportamiento de $1/f(z)$ cerca de z_0: $I \circ f(z) = \frac{1}{f(z)}$ tiene ceros en los puntos donde $f(z)$ tiene polos y viceversa. Por otro lado, el comportamiento de la función $f(z)$ cerca de ∞ se refleja en el comportamiento de la función $f(1/z)$ cerca de 0: diremos que $f(z)$ tiene un cero, o un polo, o una singularidad esencial en ∞, si $f(1/z)$ lo tiene en 0.

Vistos en la esfera, los ceros y los polos se parecen: los ceros son los puntos donde la función mapea la esfera alrededor del polo sur, los polos son donde la mapea alrededor del polo norte.

Las funciones analiticas de una región A a $\mathbb{C}$ se llaman también *holomorfas*. Las funciones que son analíticas en casi todo A, salvo por singularidades aisladas que son polos se llaman *meromorfas*. Las funciones meromorfas en A son como las funciónes analíticas de A a $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$.

Las funciones holomorfas en $\mathbb{C}$ son las funciones del plano al plano que son conformes salvo en un número finito de puntos. Las funciones meromorfas en $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ son las funciones de la esfera a la esfera que son conformes salvo en un número finito de puntos.

Ejemplos.

$f(z) = \frac{1}{sen(z)}$ es meromorfa en $\mathbb{C}$ (sus singularidades son polos ya que son los ceros de $sen(z)$).

$f(z) = sen(1/z)$ no es meromorfa en $\mathbb{C}$ (tiene una singularidad esencial en 0).

$f(z) = \frac{3z+2}{4z+1}$ es meromorfa en $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ (la singularidad en $-1/4$ es un polo, y la singularidad en ∞ es removible, haciendo $f(\infty) = 3/4$).

$f(z) = sen(z)$ es holomorfa y por lo tanto meromorfa en $\mathbb{C}$, pero no es meromorfa en $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ (porque $sen(z)$ tiene una singularidad esencial en ∞, ya que $sen(1/z)$ tiene una singularidad esencial en 0)

Observar que las sumas y productos de funciones holomorfas en una región A son funciones holomorfas (las funciones holomorfas forman un *anillo*), pero el cociente de dos funciones holomorfas puede no ser holomorfa porque puede tener singularidades. En cambio, si sumamos, multiplicamos o dividimos funciones meromorfas el resultado siempre es una funcion meromorfa (las singularidades de f/g son las singularidades de f y las de g (que son polos por definición) y los ceros de g (que tienen orden finito y por tanto dan lugar a polos de f/g). Las funciones meromorfas en A forman un *campo*.

Problemas

6. Muestra que si $f(z)$ tiene una singularidad aislada en z_0 y f está acotada en una vecindad agujerada de z_0 entonces $lim_{z \to z_0} f(z)$ existe y por lo tanto la singularidad es removible.

7. Demuestra que si f es una función entera y $lim_{z \to \infty} f(z) = \infty$ entonces f es un polinomio. Hint: prueba que $f(1/z)$ tiene un polo en 0.

8. ¿Como son las singularidades de estas funciones en ∞?

   a) $\frac{3z^2+2z+1}{2z^2+z-3}$ b) $\frac{1}{z^3+z^2}$ c) e^z d) $sen(1/z)$

   Da los valores de la función en las singularidades removibles y el orden de los polos.

9. ¿Cuales de las siguientes funciones son meromorfas en $\mathbb{C}$? ¿y en $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$?

   a) $z^5 + 3z^4 - 2z^2 + 5z + 1$ b) $\frac{z^2-4z+1}{z^3+3z-2}$ c) $sen(z)$ d) $1/e^z$

Residuos

Hay una relación importante entre la serie de Laurent de una función compleja f alrededor de una singularidad aislada y las integrales de f en los círculos que rodean a la singularidad.

Lema. Si $f(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ en el anillo $r < |z-z_0| < R$ entonces para cada círculo c con centro en z_0 y radio mayor que r y menor que R,

$$\int_c f(z)\ dz = 2\pi i\ a_{-1}$$

Demostración. Como la serie converge en el anillo, entonces converge uniformemente en cada círculo contenido en el anillo,

$$\int_c f(z)\ dz = \int_c \Big[\sum_{-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n\Big] dz = \sum_{-\infty}^{\infty}\Big[\int_c a_n(z-z_0)^n\ dz\Big]$$

Pero casi todas estas integrales valen 0 porque si $n \neq -1$ la función $a_n(z-z_0)^n$ tiene antiderivada $\frac{1}{n+1}a_n(z-z_0)^{n+1}$ en C, que es una curva cerrada. Así que la única integral distinta de 0 en la suma es

$$\int_c a_{-1}(z-z_0)^{-1}\ dz = \int_c \frac{a_{-1}}{z-z_0}\ dz = 2\pi i a_{-1}$$

▲

El coeficiente a_{-1} en la serie de Laurent de una función f en el anillo $0 < |z-z_0| < r$ es llamado el *residuo* f en z_0 y denotado por $Res(f, z_0)$.

Ejemplos.

$\frac{sen(z)}{z^4} = \frac{1}{z^3} - \frac{1}{3!}\frac{1}{z} + \frac{1}{5!}z - \frac{1}{7!}z^3 + \ldots$ para $0 < |z|$

$Res(\frac{sen(z)}{z^4}, 0) = -\frac{1}{3!}$ $\int_c \frac{sen(z)}{z^2}dz = -\frac{1}{3}\pi i$ para c centrado en 0.

$sen(\frac{1}{z}) = \frac{1}{z} - \frac{1}{3!}\frac{1}{z^3} + \frac{1}{5!}\frac{1}{z^5} - \frac{1}{7!}\frac{1}{z^7} + \ldots$ para $0 < |z|$

$Res(sen(1/z), 0) = 1$ $\int_c sen(1/z)\ dz = 2\pi i$ para c centrado en 0.

$\frac{1}{z^2-2z^3} = \frac{1}{z^2(1-2z)} = \frac{1}{z^2}(1+2z+4z^2+8z^3+16z^4+\ldots) = \frac{1}{z^2} + \frac{2}{z} + 4 + 8z + 16z^2 + \ldots$ para $0 < |z| < 1/2$

$Res(\frac{1}{z^2-2z^3}, 0) = 2$ $\int_c \frac{1}{z^2-2z^3}\ dz = 4\pi i$ para c centrado en 0 de radio $< 1/2$.

Corolario. Si dos series de Laurent definen la misma función en un anillo $r < |z - z_0| < R$, es decir si

$$\sum_{-\infty}^{\infty} a_n(z - z_0)^n = f(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} b_n(z - z_0)^n$$

para todo z en ese anillo, entonces $a_n = b_n$ para toda n.

Demostración. Si dividimos la igualdad entre $(z - z_0)^{k+1}$ obtenemos

$$\sum_{-\infty}^{\infty} a_n(z - z_0)^{n-k-1} = \frac{f(z)}{(z - z_0)^{k+1}} = \sum_{-\infty}^{\infty} b_n(z - z_0)^{n-k-n}$$

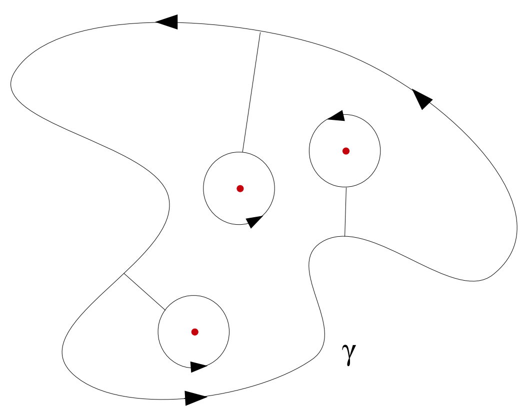
Si integramos esta función a lo largo de un círculo c centrado en z_0 y contenido en el anillo obtenemos por el lema anterior

$$2\pi i a_k = \int_c \frac{f(z)}{(z - z_0)^{k+1}} = 2\pi i b_k$$

(ya que a_k y b_k son los coeficientes de las series con exponente -1) ▲

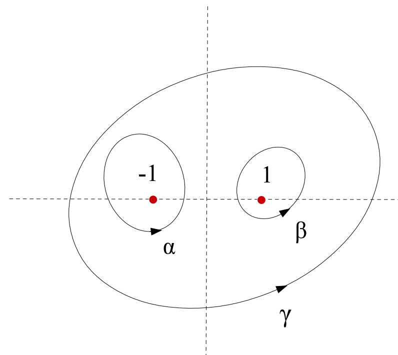
Teorema del Residuo. Si γ es una curva simple cerrada orientada positivamente y la función f es analítica en todos los puntos de γ y su interior con excepcion de $z_1, z_2, \ldots, z_n$ entonces

$$\int_\gamma f(z)\ dz = 2\pi i \sum_{i=1}^{n} Res(f, z_i)$$



Demostración. La función f es analítica en la región que queda dentro de γ y fuera de los puntos z_i, asi que por el teorema de Cauchy la integral sobre γ es igual a la suma de las integrales sobre círculos alrededor de los z_i's encerrados por γ, y por el lema anterior la integral de f en un círculo pequeño centrado en z_i es $2\pi i$ veces el residuo de f en z_i. ▲

Ejemplo. $f(z) = \frac{1}{z^2-1}$ tiene singularidades aisladas en 1 y en -1. Como $\frac{1}{z^2-1} = \frac{1}{2}\frac{1}{z+1} - \frac{1}{2}\frac{1}{z-1}$
$f(z)$ es la suma de $\frac{1}{2}\frac{1}{z+1}$ con una función analítica alrededor de -1, $Res(\frac{1}{z^2-1}, -1) = \frac{1}{2}$.
$f(z)$ es la suma de $-\frac{1}{2}\frac{1}{z-1}$ con una función analítica alrededor de 1, $Res(\frac{1}{z^2-1}, 1) = -\frac{1}{2}$.



$$\int_\alpha \frac{1}{z^2-1}\,dz = \pi i \qquad \int_\beta \frac{1}{z^2-1}\,dz = -\pi i \qquad \int_\gamma \frac{1}{z^2-1}\,dz = \pi i - \pi i = 0$$

Problemas

10. Evalua las siguientes integrales si c es el círculo unitario orientado positivamente.

$$a)\ \int_c \frac{z^4+2z^2+3z}{z^3}\,dz \qquad b)\ \int_c e^{1/z}\,dz \qquad c)\ \int_c \frac{sen(z)}{z^6}\,dz$$

11. Calcula las siguientes integrales en el círculo $c(a,r)$ con centro en a y radio r

$$a)\ \int_{c(1,1)} \frac{1}{z^2+1}\,dz \qquad b)\ \int_{c(2i,2)} \frac{1}{z^2+1}\,dz \qquad c)\ \int_{c(-i,3)} \frac{1}{z^2+1}\,dz$$

Calculo de Residuos

El cálculo de integrales sobre curvas cerradas de funciones que son analíticas excepto por singularidades aisladas se reduce al cálculo de los residuos de f en puntos singulares de f. Dependiendo de la función los residuos pueden ser desde muy faciles hasta muy dificiles de calcular. Por ejemplo: ¿Cual sera el residuo de $\frac{1}{sen(z)}$ en 0?

El residuo de una función $h(z)$ es mas o menos facil de encontrar si viene de un polo simple (de orden 1), ya que en este caso la serie de Laurent es de la forma
$h(z) = a_{-1}\frac{1}{z-z_0} + a_0 + a_1(z-z_0) + a_2(z-z_0)^2 + a_3(z-z_0)^3 + \ldots$
asi que el residuo es $a_{-1} = lim_{z\to z_0}(z-z_0)h(z)$.

Ejemplo. $\frac{1}{sen(z)}$ tiene un polo simple en 0 (ya que $sen(z)$ tiene un cero de orden 1 ahi).

Por lo tanto $Res(\frac{1}{sen(z)}, 0) = lim_{z\to z_0}\frac{z}{sen(z)} = 1$

Recordar que el orden del cero es el orden de la primera derivada distinta de 0, y que si una función $f(z)$ tiene un cero de orden n entonces $\frac{1}{f(z)}$ tiene un polo de orden n.

Ejemplo. $\frac{1}{z(z-1)(z-2)}$ tiene polos de orden 1 en 0, 1 y 2 (ya que $z(z-1)(z-2)$ tiene ceros de orden 1 en esos puntos: su derivada es $3z^2 - 6z + 2$ que es distinta de 0 en esos 3 puntos).

Por lo tanto $Res\Big(\frac{z+1}{z(z-1)(z-2)}, 2\Big) = lim_{z\to 2}(z-2)\frac{z+1}{z(z-1)(z-2)} = lim_{z\to 2}\frac{z+1}{z(z-1)} = \frac{3}{(2)(1)} = \frac{3}{2}$.

Lema. Si f y g son analíticas en z_0, f tiene un cero de orden n y g tiene un cero de orden $n+1$ en z_0 entonces

$$Res\Big(\frac{f(z)}{g(z)}, z_0\Big) = (n+1)\frac{f^{(n)}(z_0)}{g^{(n+1)}(z_0)}$$

Demostración. Como $f(z)$ tien un cero de orden n y $g(z)$ tiene un cero de orden $n+1$, entonces $h(z) = \frac{f(z)}{g(z)}$ tiene un polo de orden 1. Así que el coeficiente a_{-1} de la serie de Laurent de $h(z)$ esta dado por $lim_{z\to z_0}(z-z_0)h(z)$.

Como f tiene un cero de orden n en z_0, $f(z) = (z-z_0)^n p(z)$ donde $p(z)$ es una función analítica tal que $p(z_0) = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$. Como g tiene un cero de orden $n+1$ en z_0, $g(z) = (z-z_0)^{n+1}q(z)$ donde $q(z)$ es una función analítica tal que $q(z_0) = \frac{g^{(n+1)}(z_0)}{n+1!}$.

Asi que $lim_{z\to z_0}(z-z_0)h(z) = lim_{z\to z_0}(z-z_0)\frac{(z-z_0)^n p(z)}{(z-z_0)^{n+1}q(z)} = lim_{z\to z_0}\frac{p(z)}{q(z)} = \frac{p(z_0)}{q(z_0)} = (n+1)\frac{f^{(n)}(z_0)}{g^{(n+1)}(z_0)}$
▲

Ejemplos

$\frac{sen(z)}{cos(z)-1}$ tiene un polo simple en 0 (ya que $sen(z)$ tiene un cero de orden 1 y $cos(z)-1$ tiene un cero de orden 2). $Res(\frac{sen(z)}{cos(z)-1},0) = 2\frac{sen'(z)}{(cos(z)-1)''}\big]_{z=0} = 2\frac{cos(0)}{-cos(0)} = -2$.

$\frac{z^2}{sen^2(z)}$ tiene una singularidad removible en 0 (ya que z^2 y $sen^2(z)$ tienen ceros de orden 2 ahi), así que el residuo en 0 es 0.

$\frac{z}{z^4-1}$ tiene un polo simple en 1 (ya que z tiene un 'cero de orden 0'y z^4-1 tiene un cero de orden 1) $Res(\frac{z}{z^4-1},1) = \frac{z}{(z^4-1)'}\big]_{z=1} = \frac{1}{4(1)^3} = \frac{1}{4}$.

$\frac{1}{z^4+1}$ tiene polos simples en las raices cuartas de -1. Para cada raíz z_i
$Res(\frac{1}{z^4+1},z_i) = \frac{1}{(z^4+1)'}\big]_{z=z_i} = \frac{1}{4(z_i)^3} = -\frac{z_i}{4}$.

Problemas

12. Encuentra los puntos singulares y calcula los residuos ahí

$$a)\ \frac{5z^2+7z-1}{z^2-3z+2} \qquad b)\ \frac{1}{e^z-1} \qquad c)\ sen(1/z) \qquad d)\ \frac{cos(z)-1}{sen^2(z)}$$

13. Si f es analítica y g tiene un polo de orden 1 en z_0 ¿Cuanto vale el residuo de $f \cdot g$ en z_0?

    Si f y g tienen polos de orden 1 en z_0 ¿ Cuanto vale el residuo de $f \cdot g$ en z_0?

Cálculo de algunas integrales impropias

La integración compleja puede usarse para evaluar algunas integrales reales que no pueden hacerse con técnicas reales.

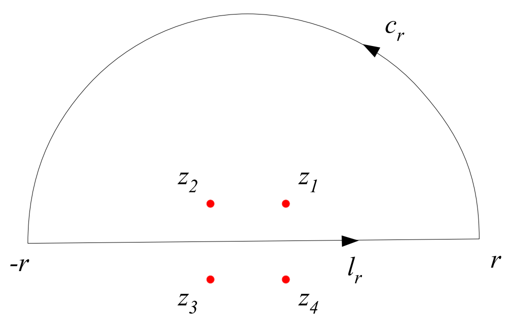
Calculemos la integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^4}\ dx = lim_{r\to\infty} \int_{-r}^{r} \frac{1}{1+x^4}\ dx$$

La integral real es una integral compleja

$$\int_{-r}^{r} \frac{1}{1+x^4}\ dx = \int_{l_r} \frac{1}{1+z^4}\ dz$$

Si c_r es el semicírculo de r a $-r$ en el semiplano superior, $l_r + c_r$ es una curva cerrada.



La función $\frac{1}{1+z^4}$ tiene polos simples en las raíces cuartas de -1, $z_i = \frac{\pm 1 \pm i}{\sqrt{2}}$

$Res(\frac{1}{z^4+1}, z_i) = \frac{1}{(z^4+1)'}\Big]_{z_i} = \frac{1}{4(z_i)^3} = -\frac{z_i}{4}$

$$\int_{l_r+c_r} \frac{1}{1+z^4}\ dz = 2\pi i(-\frac{z_1}{4} - \frac{z_2}{4}) = 2\pi i(-\frac{1+i}{4\sqrt{2}} - \frac{-1+i}{4\sqrt{2}}) = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$$

En el semicírculo c_r, $\left|\frac{1}{1+z^4}\right| \leq \frac{1}{1+r^4} < \frac{1}{r^4}$

$$\int_{c_r} \frac{1}{1+z^4}\ dz < \pi r \frac{1}{r^4} \leq \frac{\pi}{r^3} \qquad \text{asi que} \qquad lim_{r\to\infty} \int_{c_r} \frac{1}{1+z^4}\ dz = 0$$

Por lo tanto

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^4}\ dx = lim_{r\to\infty} \int_{l_r} \frac{1}{1+z^4}\ dz\ = lim_{r\to\infty} \int_{l_r+c_r} \frac{1}{1+z^4}\ dz = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$$

El procedimiento anterior puede usarse para calcular integrales

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$$

siempre y cuando $f(z)$ no tenga un número finito de polos, que ninguno sea real y que $|f(z)| < \frac{M}{r^2}$ para $|z| = r$ suficientemente grande (esta condición garantiza que $lim_{r\to\infty} \int_{c_r} f(z)dz = 0$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \pi i \sum Res(f, z_i)$$

La condición se satisface por ejemplo si $f(z)$ es el cociente de dos polinomios p y q con $grado(p) \leq grado(q) - 2$.

Calculemos ahora

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{2 + sen(\theta)} d\theta$$

Podemos ver esta integral real como una integral compleja en el círculo unitario S^1, parametrizando a los puntos del círculo como $z = e^{i\theta}$ de modo que $dz = ie^{i\theta}d\theta$ y $d\theta = \frac{dz}{iz}$.
Entonces $sen(\theta) = \frac{1}{2i}(e^{i\theta} - e^{-i\theta}) = \frac{1}{2i}(z - \frac{1}{z})$, por lo tanto

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{2 + sen(\theta)} d\theta = \int_{S^1} \frac{1}{2 + \frac{1}{2i}(z - \frac{1}{z})} \frac{dz}{iz} = \int_{S^1} \frac{1}{2iz + \frac{1}{2}(z^2 - 1)} \ dz = \int_{S^1} \frac{2}{z^2 + 4iz - 1} \ dz$$

Para calcular la última integral necesitamos los residuos de $\frac{2}{z^2+4iz-1}$ dentro del círculo S^1. El único cero del denominador $z^2 + 4iz - 1$ dentro del círculo es $z = (\sqrt{3} - 2)i$.

$$Res\Big(\frac{2}{z^2 + 4iz - 1}, (\sqrt{3} - 2)i\Big) = \frac{2}{2z + 4i}\Big|_{(\sqrt{3}-2)i} = \frac{2}{2(\sqrt{3} - 2)i + 4i} = \frac{1}{\sqrt{3}i}$$

Por lo tanto

$$\int_{S^1} \frac{2}{z^2 + 4iz - 1} \ dz = 2\pi i \frac{1}{\sqrt{3}i} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}$$

Esta misma técnica puede usarse para calcular integrales de funciones racionales (cocientes de polinomios) de $sen(\theta)$ y $cos(\theta)$

$$\int_0^{2\pi} R(sen(\theta), cos(\theta))d\theta$$