3 problemas clásicos.

Si $d(t)$ da la distancia recorrida por un objeto en movimiento hasta el instante t, entonces la velocidad del objeto el instante t es $v(t)=d'(t)$.
Supongamos ahora que no conocemos la distancia recorrida, pero conocemos su velocidad en cada instante. ¿Será posible averiguar la distancia recorrida a partir de su velocidad $v(t)$?

Si la velocidad es constante, digamos $v(t)=c$, y la distancia recorrida se mide desde $t=0$ entonces
$d(t)$ = velocidad x tiempo = ct.

Pero si la velocidad $v(t)$ no es constante sino que va cambiando, hallar la distancia recorrida no es tan fácil.
Si suponemos que en intervalos cortos de tiempo la velocidad no varía mucho, y multiplicamos la velocidad en un punto del intervalo por la duración del intervalo y los sumamos, obtendremos una aproximación de la distancia recorrida, y la aproximación será mejor entre mas pequeños sean los intervalos.

Caída libre. Para un objeto en caída libre la velocidad es proporcional al tiempo transcurrido, $v(t)=ct$. ¿Que distancia habrá recorrido el objeto hasta el instante t?
Podemos estimar la distancia recorrida por el objeto desde 0 hasta t, dividiendo el intervalo de tiempo de 0 a t en n intervalos de duración t/n, tomar la velocidad el final de cada intervalo multiplicada por su duración y sumarlos para obtener la distancia aproximada:

$$\text{Distancia aprox} \approx {}^{ct}/_{n} \cdot {}^{t}/_{n} + {}^{2ct}/_{n}\, {}^{t}/_{n} + {}^{3ct}/_{n} \cdot {}^{t}/_{n} + \ldots + {}^{nct}/_{n} \cdot {}^{t}/_{n} = {}^{ct^2}/_{n^2} + {}^{2ct^2}/_{n^2} + {}^{3ct^2}/_{n^2} + \cdots + {}^{nct^2}/_{n^2} =$$

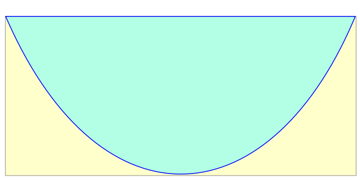
$$= (1+2+3+\ldots+n)\,\frac{ct^2}{n^2} = \frac{n(n+1)}{2}\;\frac{ct^2}{n^2} = \frac{n(n+1)}{n^2}\;\frac{ct^2}{2}$$

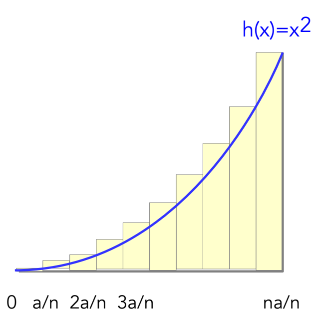
Para obtener mejores aproximaciones tomamos intervalos cada vez mas cortos. La distancia exacta el límite

$$\text{Distancia} = \lim_{n\to\infty} \frac{n(n+1)}{n^2}\;\frac{ct^2}{2} = 1\,\frac{ct^2}{2} = \frac{ct^2}{2}$$

Las mismas ideas pueden usarse para calcular cosas muy distintas, como áreas y volúmenes:

Area encerrada por una parábola. Arquímedes se interesó en el siguiente problema: Si se inscribe un arco de parábola en un rectángulo ¿que porción del área de un rectángulo queda abajo de la parábola?





El i-esimo rectángulo tiene base a/n y altura $(ia/n)^2$ así que tiene área

Por simetría basta ver la mitad derecha de la figura.
El rectángulo de la derecha tiene base a y altura a^2 así que tiene área a^3.

Podemos aproximar el área de la región amarilla de la derecha por la suma de las áreas de los rectángulos

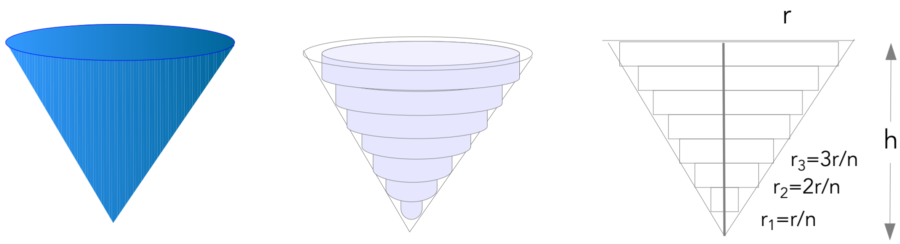
$(a/n)^2\, a/n + (2a/n)^2\, a/n + (3a/n)^2\, a/n + (4a/n)^2\, a/n + \ldots + (na/n)^2\, a/n = [1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \ldots + (n-1)^2]\,(a/n)^3$

Como $1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \ldots + n^2] = {}^{1}/_{6}\, n(n+1)(2n+1)$ entonces la suma de las áreas de los rectángulos es $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3}\; a^3$

y el área de la región amarilla de la derecha es $\lim_{n\to\infty} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3}\, a^3 = a^3/3$

que es la tercera parte del área del rectángulo que la encierra.

El volumen de un cono. Los griegos pudieron calcular el volumen exacto de un cono.



Si cortamos al cono en n rebanadas de ancho h/n podemos aproximar a cada una con un cilindro, el volumen del cono es aproximadamente igual a la suma de los volúmenes de los cilindros. El primer cilindro tiene radio 0, el segundo tiene radio r/n, el tercero tiene radio 2r/n,..., el i-esimo de radio (i-1)/n.
Y el volumen del i-esimo cilindro es π x radio^2 x altura = $\pi[(i-1)r/n]^2\, h/n$.

Así que la suma de los volumenes de los cilindros es

$\pi[0r/n]^2\, h/n + \pi[1r/n]^2\, h/n + \pi[2r/n]^2\, h/n + \ \dots + \pi[(n-1)r/n]^2\, h/n =$

$[0^2+1^2+2^2+\dots+(i-1)^2+\dots+(n-1)^2]\ \pi r^2 h/n^3$

Como $0^2+1^2+2^2+\dots+(i-1)^2+\dots+(n-1)^2 = 1/6\ (n-1)n(2n-1)$

entonces la suma de los volumenes de los cilindros es

$1/6\ (n-1)n(2n-1)/n^3 \pi r^2 h = \dfrac{(n-1)n(2n-1)}{6n^3}\ \pi r^2 h$

y el volumen exacto del cono es

$\lim_{n\to\infty} \dfrac{(n-1)n(2n-1)}{6n^3}\ \pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi r^2 h$.

Integración.

Los 3 ejemplos anteriores ilustran un método llamado **integración** para obtener resultados exactos a partir de aproximaciones y límites.

Una **partición** del intervalo [a,b] es una división del intervalo en intervalos mas cortos. Cada partición está determinada por la colección de puntos $a=x_0<x_1<x_2<\dots<x_{n-1}<x_n=b$ donde empiezan y terminan los subintervalos.

Si f: [a,b] $\to$ **R** una función real acotada y $P = \{x_0, x_1, x_2,\dots, x_{n-1}, x_n\}$ es una partición de [a,b], entonces en cada subintervalo $[x_{i-1},x_i]$ la función f tiene un infimo y un supremo, que llamaremos M_i y m_i.

Podemos tomar la suma:

$M_1(x_1-x_0)+M_2(x_2-x_1)+M_3(x_3-x_2)+\dots+M_{n-1}(x_{n-1}-x_{n-2})+M_n(x_n-x_{n-1})$

que se abrevia como $S(f,P) = \sum_{i=1}^{i=n} M_i(x_i-x_{i-1})$ y se llama la **suma superior** para f(x) para la partición P.

Análogamente podemos tomar la suma

$m_1(x_1-x_0)+m_2(x_2-x_1)+m_3(x_3-x_2)+\dots+m_{n-1}(x_{n-1}-x_{n-2})+m_n(x_n-x_{n-1})$

que se abrevia como $I(f,P) = \sum_{i=1}^{i=n} m_i(x_i-x_{i-1})$ y se llama la **suma inferior** para f(x) para la partición P.

Ejemplo. Si $f(x) = 1/x$ en el intervalo $[1,6]$ y P es la partición dada por los puntos $1<3<4<6$ entonces

$S(f,P) = 1(3-1)+1/3\,(4-3)+1/4(6-4) = 2+1/3+1/2 = 17/6$

$I(f,P) = 1/3(3-1)+1/4\,(4-3)+1/6(6-4) = 2/3+1/4+1/3 = 5/4$

y P' es la partición dada por los puntos $1<2<4<5<6$ entonces

$S(f,P') = 1/1(2-1)+1/2\,(4-2)+1/4(5-4)+1/5(6-5) = 1+1+1/4+1/5 = 49/20$

$I(f,P') = 1/2(2-1)+1/4\,(4-2)+1/5(5-4)+1/6(6-5) = 1/2+1/2+1/5+1/6 = 41/30$

Ejercicio.. Si $f(x) = \sqrt{x}$ en el intervalo $[0,7]$ y P es la partición dada por los puntos $0<2<5<7$ calcula $S(f,P)$ y $I(f,P)$.

$S(f,P) = \sqrt{2}\,(2-0)+\sqrt{5}\,(5-2)+\sqrt{7}\,(7-5) = 2\sqrt{2}+3\sqrt{5}+2\sqrt{7}$ $\quad$ $I(f,P) = \sqrt{0}\,(2-0)+\sqrt{2}\,(5-2)+\sqrt{5}\,(7-5) = 3\sqrt{2}+2\sqrt{5}$

Observaciones.

1. Para cada subintervalo $[x_{i-1}-x_i]$ de $[a,b]$ se cumple $m_i(x_i-x_{i-1}) \leq M_i(x_i-x_{i-1})$ y la igualdad se cumple sólo si la función f es constante en ese subintervalo. Por lo tanto las sumas superiores e inferiores de la misma partición satisfacen $I(f,P) \leq S(f,P)$ y la igualdad se cumple sólo si la función f es constante en de $[a,b]$.

2. Si a una partición P del intervalo $[a,b]$ le añadimos mas puntos (la refinamos) para obtener otra partición P', entonces $S(f,P') \leq S(f,P)$ y $I(f,P') \geq I(f,P)$, es decir que al refinar las particiones las sumas superiores disminuyen y las sumas inferiores aumentan.

¿Y que pasa si tomamos dos particiones distintas de $[a,b]$ que no están relacionadas?

Lema. Si P y P' son dos particiones de $[a,b]$ entonces $I(f,P) \leq S(f,P')$

Demostración. Si P y P' son dos particiones de $[a,b]$ la partición PUP' formada por los puntos de ambas es un refinamiento de las dos. Así que por las dos observaciones anteriores $I(f,P) \leq I(f,PUP') \leq S(f,PUP') \leq S(f,P')$. •

Consideremos ahora a todas las particiones posibles del intervalo $[a,b]$.
Por el lema anterior todas las sumas inferiores están acotadas por todas las sumas superiores.

Así que el conjunto $\{I(f,P) \,/\, P \text{ partición de } [a,b]\}$ es no vacío y está acotado superiormente, por lo que tiene un supremo y el conjunto $\{S(f,P) \,/\, P \text{ partición de } [a,b]\}$ es no vacío y está acotado inferiormente por lo que tiene un ínfimo. Sea $I(P) = \text{Sup}\,\{I(f,P)\}$ y $S(f) = \text{Inf}\,\{S(f,P)\}$. Entonces $I(P)$ y $S(f)$ son números reales y $I(f) \leq S(f)$.

Decimos que la función $f(x)$ es **integrable** en el intervalo $[a,b]$ si $I(f) = S(f)$ y a este número le llamamos la **integral** de f en el intervalo $[a,b]$ y lo denotamos como $\int_a^b f(x)dx$.

Ejemplo. La función $r(x) = \begin{cases} 1 & \text{si x es racional} \\ 0 & \text{si x es irracional} \end{cases}$ no es integrable en $[0,1]$. ya que $I(f)=0$ y $S(f)=1/2$

Lema. Si la función $f(x)$ es integrable en el intervalo $[a,b]$ y $m\leq f(x)\leq M$ entonces $m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$

Demostración. Para cada partición P, $m(b-a) \leq I(f,P)$ y $S(f,P) \leq m(b-a)$ así que $m(b-a) \leq \text{Sup}\,\{I(f,P)\} = \text{Inf}\{S(f,P)\} \leq M(b-a)$. •

Lema. La función f es integrable en el intervalo $[a,b]$ si y solo si para cada $\varepsilon>0$ existe una partición P de tal $[a,b]$ que $S(f,P) - I(f,P) < \varepsilon$.

Demostración. Sean $I(f)=\text{Sup}\,\{I(f,P)\}$ y $S(f) = \text{Inf}\,\{S(f,P)\}$. Entonces $I(f) \leq S(f)$, f es integrable si $I(f) = S(f)$ y si P es cualquier partición entonces $I(f,P) \leq I(f) \leq S(f) \leq S(f,P)$.
$\Leftarrow$ Si existe una partición P tal que $S(f,P) - I(f,P) < \varepsilon$ entonces por lo anterior $S(f) - I(f) \leq \varepsilon$. Y como ε es arbitrario, esto solo puede ocurrir si $S(f) - I(f) = 0$, lo que dice que f es integrable.

$\Rightarrow$ Y si la función f es integrable entonces $S(f) - I(f) = 0$.
Como $I(f)=\text{Sup}\,\{I(f,P)\}$, para cada $\varepsilon>0$ existe una partición P tal que $I(f,P)>I(f)-\varepsilon/2$
Como $S(f)= \text{Inf}\,\{S(f,P)\}$, para cada $\varepsilon>0$ existe una partición P' tal que $S(f,P')<S(f)+\varepsilon/2$
Si $P''=P \cup P'$ entonces $I(f,P'')>I(f)-\varepsilon/2$ y $S(f,P'')<S(f)+\varepsilon/2$
por lo tanto $S(f,P'') - I(f,P'') < S(f)+\varepsilon/2 - [I(f)-\varepsilon/2] = S(f) - I(f) + \varepsilon = 0 + \varepsilon$
así que existe una partición P'' de tal $[a,b]$ que $S(f,P') - I(f,P') < \varepsilon$ •

Lema. Si la función f es integrable en los intervalos $[a,b]$ y $[b,c]$ entonces f es integrable en el intervalo $[a,c]$ y

$$\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx$$

Demostración. Por el lema anterior la función f es integrable en $[a,b]$ si dado $\varepsilon>0$ existe una partición P de $[a,b]$ tal que $S(f,P) - I(f,P) < \varepsilon$ y f es integrable en $[b,c]$ si para dado $\varepsilon>0$ existe una partición P' de $[b,c]$ tal que $S(f,P') - I(f,P') < \varepsilon$.
Entonces para la partición $P\cup P'$ de $[a,c]$ se tiene $S(f,P\cup P¡) - I(f,P\cup P') = S(f,P) - I(f,P) - I(f,P) - I(f,P') < \varepsilon+\varepsilon = 2\varepsilon$ y como ε es arbitrario el lema anteior dice que f es integrable en $[a,c]$. •

Lema. Si f y g son funciones integrables en el intervalo $[a,b]$ entonces f+g es integrable en $[a,b]$ y

$$\int_a^b (f+g)(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

Demostración.
Como f es integrable, para cada existe una partición P tal que $S(f,P) - I(f,P) < \varepsilon/2$
Como g es integrable, para cada existe una partición P' tal que $S(f,P)'- I(f,P') < \varepsilon/2$
Afirmamos que para la partición $P\cup P'$ se cumple que $S(f+g,P\cup P') - I(f+g,P\cup P') < \varepsilon$.
Para verlo observemos que $S(f+g,P\cup P') \leq S(f,P\cup P') + S(g,P\cup P')$
y que $I(f+g,P\cup P') \geq I(f,P\cup P') + I(g,P\cup P')$
Así que $S(f+g,P\cup P') - I(f+g,P\cup P') \leq S(f,P\cup P') + S(g,P\cup P') - I(f,P\cup P') - I(g,P\cup P') \leq S(f,P) + S(g,P') - I(f,P) - I(g,P') < \varepsilon/2+ \varepsilon/2 = \varepsilon$
y como ε es arbitrario f+g es integrable en $[a,b]$. •

Ejercicio. ¿Será cierto que si f y g son integrables entonces $f\cdot g$ es integrable?

¿Y será cierto que $\displaystyle\int_a^b (f\cdot g)(x)dx = \int_a^b f(x)dx \cdot \int_a^b g(x)dx$?

Teorema. Si la función f es continua en el intervalo $[a,b]$ entonces f es integrable en $[a,b]$.

Demostración. Para demostrar que f es integrable basta ver que para cada $\varepsilon>0$ existe una partición P del intervalo tal que $S(f,P)-I(f,P) < \varepsilon$. La idea es sencilla, pero hay un detalle delicado (que aclararemos después). Intuitivamente, como la función f es continua en el intervalo $[a,b]$ entonces para cada $\varepsilon>0$ debería existir un $\delta>0$ tal que si $|x-x'|< \delta$ entonces $|f(x)-(x')|<\varepsilon$.
Tomemos una partición P del intervalo $[a,b]$ en subintervalos de longitud menor que δ. Entonces en cada uno de esos intervalos la función f varía menos que δ y por lo tanto si M_i y m_i son los valores máximo y mínimo de f en el i-esimo

intervalo $M_i-m_i \le \varepsilon$. Así que $S(f,P)-I(f,P) = \sum M_i(x_i-x_{i-1}) - \sum m_i(x_i-x_{i-1}) = \sum(M_i-m_i)(x_i-x_{i-1}) \le \sum \varepsilon\,(x_i-x_{i-1}) = \varepsilon \sum(x_i-x_{i-1}) = \varepsilon(b-a)$
Como ε es arbitrario, podemos reemplazar ε por $\varepsilon/(b-a)$ y el lema dice que f es integrable.
El problema con esta demostración es que no hemos probado que realmente exista una $\delta>0$ tal que si $|x-x'|< \delta$ entonces $|f(x)-(x')|<\varepsilon$. Esto lo haremos en el siguiente teorema. •

Una función f es continua si para cada x en su dominio y cada $\varepsilon>0$ existe $\delta>0$ tal que si $|x-x'| < \delta$ entonces $|f(x)-(x')| < \varepsilon$. En esta definición la δ no solo depende de ε sino también de x, y δ puede cambiar mucho al variar x. Una pregunta natural es si podremos elegir una δ que dependa solo de ε (y no de x) que es lo que usamos en la demostración anterior. Resulta que a veces si se puede y a veces no.

Decimos que una función real f es **uniformemente continua** en su dominio si para cada $\varepsilon>0$ existe $\delta>0$ tal que si $|x-x'| < \delta$ entonces $|f(x)-(x')| < \varepsilon$.

Ejemplo. La función $f(x)=1/x$ es continua en el intervalo $(0,1)$ pero no es uniformemente continua en ese intervalo., ya que al aproximarse x a 0 el valor de δ se aproxima a 0.

Teorema. Si f es continua en un intervalo cerrado entonces f es uniformemente continua en ese intervalo.

Demostración. Para ver que f es uniformemente continua en el intervalo tenemos que ver que para cada $\varepsilon>0$ existe una $\delta>0$ que sirve para todas las x del intervalo. Si para cada x elegimos la δ mas grande posible, tenemos que ver que el ínfimo de todas estas δ's (que seria la δ mas grande que sirve para todas) es mayor que 0.
Si el ínfimo de las δ fuera 0, existiría una sucesión de puntos $x_1,x_2,\ldots x_n,\ldots$ para los que las δ's tienden a 0.
Como el intervalo es cerrado, los puntos $x_1,x_2,\ldots x_n,\ldots$ deben acumularse en algún punto x del intervalo.
Veamos ahora que al acercarnos a un punto x del intervalo las δ's no pueden acercarse a 0, viendo que existe una vecindad de x donde las δ's son mayores que una δ fija.

La vecindad de radio r de un punto x es el conjunto de puntos que satisfacen $|x-x'| < r$.
Como f es continua en x existe $\delta'>0$ tal que si $|x-x'| < \delta'$ entonces $|f(x)-f(x')| < \varepsilon/2$.
Si x' es cualquier punto en la vecindad de radio $\delta'/2$ de x, la vecindad de radio $\delta'/2$ de x' está contenida en la vecindad de radio δ' de x y si $|x''-x'|<\delta'/2$ entonces x' y x'' están a distancia menor que δ' de x y por lo tanto
$|f(x'')-f(x')| \le |f(x'')-f(x)| + |f(x'')-f(x)| < \varepsilon/2+\varepsilon/2 = \varepsilon$.
Esto dice que para todos los puntos en una vecindad de x las δ son mayores que $\delta=\delta'/2$.
Así que las δ's no se aproximan a 0. •

Teorema (valor medio para integrales). Si la función f es continua en el intervalo $[a,b]$ entonces existe un c entre a y b tal que

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a)$$

Demostración. Como $f(x)$ es continua, $f(x)$ alcanza un valor máximo M y un valor mínimo m en el intervalo, y

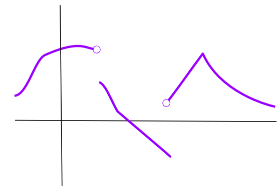
$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a) \quad \text{así que} \quad \int_a^b f(x)dx = k(b-a) \quad \text{para algún número entre } m \text{ y } M.$$

Como $f(x)$ es continua entonces (por el teorema del valor intermedio) $f(x)$ toma todos los valores entre m y M , por lo que existe un c tal que $f(c)=k$.

Así que $\int_a^b f(x)dx = f(c)\,(b-a)$ •

Todas las funciones continuas en un intervalo [a,b] son integrables en pero no todas las funciones integrables en [a,b] son continuas en [a,b] .

Ejercicio. Muestra que la función $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x=0 \\ 0 & \text{si } x\neq 0 \end{cases}$ es integrable en [-1,1].

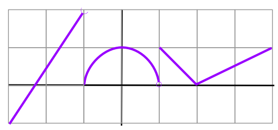


Una función real f es **continua por pedazos** si f es continua excepto en algunos puntos aislados, en los que el límite por la izquierda y por la derecha existen (pero pueden ser distintos).

Corolario. Si una función f es continua por pedazos en el intervalo [a,b] entonces f es integrable en [a,b].

Demostración. Si cambiamos los valores de la función integrable en un número finito de puntos, la función resultante es integrable y la integral no cambia. Así que si partimos el intervalo [a,b] en los puntos de discontinuidad de f y cambiamos los valores de f en los extremos de los subintervalos para obtener funciones continuas en los subintervalos, sin que cambie las integrales no cambian cambien.•

Ejercicio. Calcula la integral de esta función
(usando la interpretación como área)
Los cuadrados tienen lado 1
y la curva es un semicírculo.

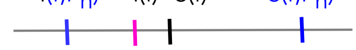


Teorema. Si la función f es continua en el intervalo [a,b] y P_n es la partición de [a,b] en n subintervalos de la misma longitud entonces la integral de f puede calcularse como

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \frac{f(x_1)+f(x_2)+\ldots+f(x_n)}{n}\ (b-a)$$ donde x_i es cualquier punto en el i-esimo intervalo.

Demostración. Como f es continua en el intervalo [a,b] entonces es uniformemente continua en ese intervalo, así que dado dado $\varepsilon>0$ existe $\delta>0$ tal que si $|x-x'| < \delta$ entonces $|f(x)-f(x')| < \varepsilon$. Esto implica que para cualquier partición P del intevalo en intervalos de longitud menor que δ se tiene que $S(f,P) - I(f,P) < \varepsilon(b-a)$.
Como $I(f,P) \leq I(f) = S(f) \leq S(f,P)$ esto dice que $I(f,P)$ y $S(f,P)$ se encuentran a distancia menor que $\varepsilon(b-a)$ del valor de la integral, que es $I(f)=S(f)$.

Así que si $1/n<\delta$ entonces $S(f,P_n) - I(f,P_n) < \varepsilon(b-a)$



Pero $\frac{f(x_1)+f(x_2)+\ldots+f(x_n)}{n}\ (b-a) = \sum f(x_i)\ (b-a)/n$

$y\ I(f,P_n) = \sum m_i\ (b-a)/n \leq \sum f(x_i)\ (b-a)/n \leq \sum M_i\ (b-a)/n = S(f,P_n)$

así que $\sum f(x_i)\ (b-a)/n$ también se encuentra a distancia menor que $\varepsilon(b-a)$ del valor de la integral, y haciendo n suficientemente grande podemos hacer que $1/n$ sea menor que cualquier δ y con esto podemos lograr que ε sea tan pequeño como queramos. •

Ejemplo. $\int_0^1 x^3\, dx = \lim_{n\to\infty} \frac{(1/n)^3+(2/n)^3+.+(n/n)^3}{n}\ (1-0) = \lim_{n\to\infty} \frac{1^3+2^3+.+n^3}{n^4}$

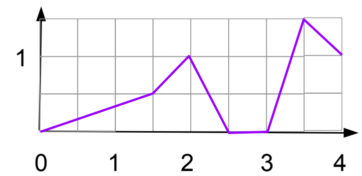
Ejercicio. ¿Como se escribe $\int_0^r \text{sen}(x)\, dx$ como un limite de promedios?

El teorema permite calcular algunas integrales de manera exacta, suponiendo que conocemos fórmulas para las sumas y que podemos calcular sus límites. Aunque esto no ocurre con frecuencia, el teorema da una manera eficiente de estimar numéricamente el valor de las integrales de funciones continuas.

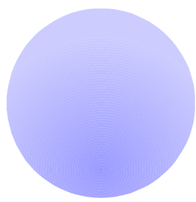
Problemas.

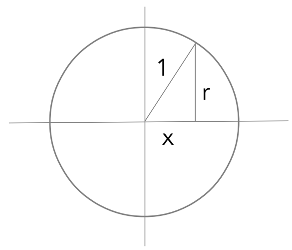
1. La gráfica muestra la velocidad de un objeto en cada instante t.

   Calcula la distancia que recorre desde t=1 hasta t=4.



2. Calcula el volumen de una esfera de radio 1, usando las ideas de los primeros ejemplos.





3. Si $f(x) = x^2$ encuentra una partición P del intervalo $[0,2]$ de modo que $S(f,P) - I(f,P) < 1$

4. Si $f: [-1,2] \to R$ es la función dada por $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si x es racional} \\ 0 & \text{si x es irracional} \end{cases}$

   a. ¿cual es el ínfimo de las sumas superiores de f?
   b. ¿cual es el supremo de las sumas inferiores de f?

5. a. Si $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b g(x)dx$ ¿que relación hay entre f y g?

   b. Si $\int_a^b f(x)dx > \int_a^b g(x)dx$ ¿que puedes decir de f y g?

6. Sea f una función integrable en $[a,b]$ y tal que $f(x)>0$ en $[a,b]$.

   a. Demostrar que $\int_a^b f(x)dx \geq 0$

   b. Demostrar que si f es continua entonces $\int_a^b f(x)dx > 0$

   c.* ¿Será cierto que $\int_a^b f(x)dx > 0$ sin suponer que f es continua?

7. a. Da un ejemplo de dos funciones no integrables cuya suma sea integrable.
   b. Muestra que la suma de una función integrable y una función no integrable no puede ser integrable.

8. a. ¿Será cierto que si f y g son funciones integrables en $[a,b]$ entonces $f \cdot g$ es integrable en $[a,b]$?

   b. ¿Habrá alguna relación entre $\int_a^b f(x)dx$, $\int_a^b g(x)dx$ y $\int_a^b f(x)g(x)dx$?

9. Escribir $\int_0^r \operatorname{sen}(x)\, dx$ como un limite de promedios.

10. Ya sabemos que $\int_0^1 x^3\, dx = \lim_{n\to\infty} \frac{1^3+2^3+\ldots+n^3}{n^4}$ así que este limite existe y es distinto de 0
    y esto sugiere que la suma $1^3+2^3+\ldots+n^3$ puede ser un polinomio de grado 4, $p(n) = an^4+bn^3+cn^2+dn+e$.
    Encuentra el polinomio usando sus valores para $n=1,2,3,4,5$.

11. ¿ A que integral aproximan las sumas $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \ldots + \frac{1}{n+n}$?

12. b. Estima *numéricamente* la integral $\int_0^2 \sqrt{x}\, dx$.

13. Encuentra el valor de c entre a y b tal que $\int_a^b x\, dx = c(b-a)$ (el c que cumple el teorema del valor medio para la integral de la función $f(x)=x$ en $[a,b]$).

14. Muestra que el teorema del valor medio para integrales puede fallar para funciones integrables que no son continuas.

15. Sea $d(x) = \begin{cases} 1/n & \text{si } x = m/n \text{ como fracción reducida} \\ 0 & \text{si } x \text{ es irracional} \end{cases}$

Demuestra que f es integrable en $[0,1]$ y di cuanto vale la integral.

16.* Hallar dos funciones integrables cuya composición no sea integrable (hint: problema anterior)

La integral como función.

Hasta ahora hemos pensado en integrales sobre un intervalo fijo $[a,b]$. A los extremos a y b se les llama *límites de integración* (porque delimitan la integral, no tiene nada que ver con límites de funciones).

Observaciones. El nombre que le demos a la variable dentro de una integral no tiene ninguna importancia, porque el resultado es el mismo:

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^b f(s)\, ds = \int_a^b f(t)\, dt$$

Definimos la integral cuando los limites de integración están invertidos como $\int_b^a f(x)\, dx = -\int_a^b f(x)\, dx$

y se define así para que se cumpla la igualdad $\int_a^b f(x)\, dx = \int_b^c f(x)\, dx = \int_a^c f(x)\, dx$ sin importar el orden de a, b y c.

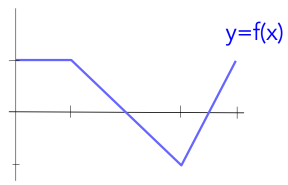
Ejemplos. $\int_1^3 x^2\, dx = \int_1^3 y^2\, dy$

$$\int_3^1 x^2\, dx = -\int_1^3 x^2\, dx$$

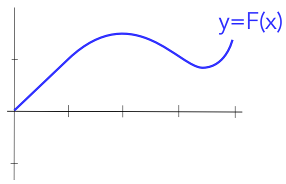
Si en lugar de fijar los límites de integración dejamos que varíen, por ejemplo tomando un intervalo $[a,x]$ entonces la integral resultante es una función de x.

Ejemplo. Ya vimos que $\int_0^a t\, dt = {}^1/_2\, a^2$ así que si $f(x) = x$ entonces $F(x) = \int_0^x s\, ds = {}^1/_2\, x^2$

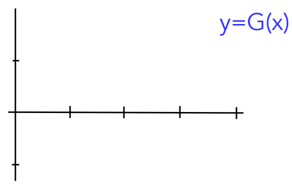
Ejemplo. Sea $f(x)$ la función en el intervalo $[0,4]$ cuya gráfica se ve así:

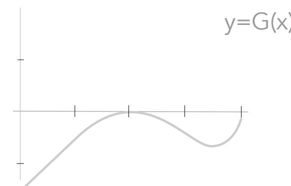


entonces la función $F(x) = \int_0^x f(s)ds$ está definida para $x \in [0,4]$ y su gráfica se ve mas o menos así:



Ejercicio. ¿Como se verá la gráfica de la función $G(x) = \int_2^x f(s)ds$ para $x \in [0,4]$?





Lema. Si la función $f(x)$ es acotada y es integrable en el intervalo $[a,b]$ entonces la función $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ es continua en $[a,b]$.

Demostración. Hay que ver que para cada $\varepsilon>0$ existe $\delta>0$ tal que si $|x-x'| < \delta$ entonces $|F(x)-F(x')| < \varepsilon$.

$$F(x) - F(x') = \int_a^x f(t)\,dt - \int_a^{x'} f(t)\,dt = \int_x^{x'} f(t)\,dt$$

Como es acotada en el intervalo $[a,b]$ entonces existen dos números reales r y s tales que $m \le f(t) \le M$ para $a \le x \le b$.

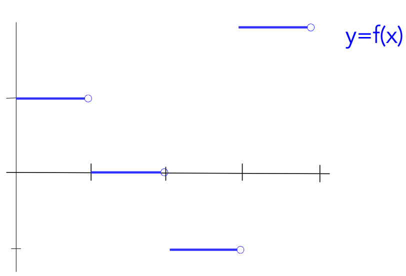
Así que $r(x'-x) \le \int_x^{x'} f(t)\,dt \le s(x'-x)$

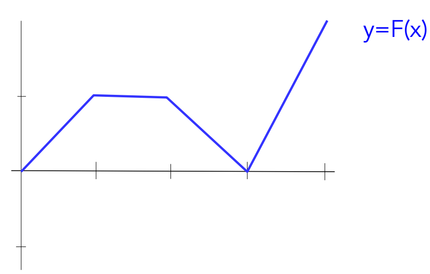
Por lo tanto $\left| \int_x^{x'} f(t)\,dt \right| \le \max\{|r||x'-x|, |s||x'-x|\}$

Si $|x-x'| < \varepsilon/\max\{|r|,|s|\}$ entonces $\left| \int_x^{x'} f(t)\,dt \right| < \max\{|r|\,\varepsilon/\max\{|r|,|s|\}, |s|\,\varepsilon/\max\{|r|,|s|\}\} \le \max\{\varepsilon, \varepsilon\} = \varepsilon.$

lo que dice que $|F(x)-F(x')| < \varepsilon.$ •

Ejemplo. Partiendo de la gráfica de $f(x)$ dibujar la gráfica de $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$

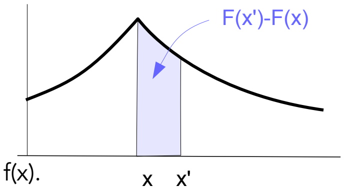




Teorema fundamental del calculo. Si la función $f(x)$ es continua en el intervalo $[a,b]$ entonces la función

$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ es derivable en $[a,b]$ y su derivada es $F'(x) = f(x)$.

Demostración. Hay que ver que $\lim_{x\to\infty} \frac{F(x)-F(x')}{x-x'}$ existe y es igual a $f(x)$.



La idea intuitiva es muy sencilla:

$F(x)-F(x')$ da el área de la región bajo la curva $y=f(x)$ en el intervalo $[x,x']$

Así que $\frac{F(x)-F(x')}{x-x'}$ da la 'altura promedio' de la curva sobre el eje x

Y como $f(x)$ es continua, cuando x' se aproxima a x la altura promedio se aproxima a $f(x)$.

Una demostración formal se ve así:

$$F(x) - F(x') = \int_a^x f(t)\,dt - \int_a^{x'} f(t)\,dt = \int_x^{x'} f(t)\,dt \qquad \text{Así que} \quad \frac{F(x)-F(x')}{x-x'} = \int_x^{x'} \frac{1}{x-x'} f(t)\,dt$$

Como $f(x)$ es continua, el teorema del valor medio para integrales dice que existe una x'' entre x y x' tal que

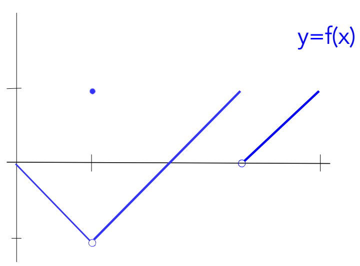
$$\int_x^{x'} f(t)\,dt = f(x'')\,(x-x') \qquad \text{y por lo tanto} \quad \frac{1}{x-x'}\int_x^{x'} f(t)\,dt = f(x'')$$

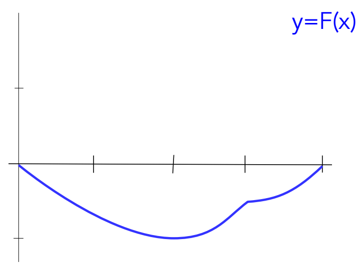
Si $x' \to x$ entonces $x'' \to x$ y como f es continua entonces $f(x'') \to f(x)$ así que

$$\lim_{x\to\infty} \frac{F(x)-F(x')}{x-x'} = \lim_{x\to\infty} f(x'') = f(x).$$

•

Ejemplo. Dibujar la gráfica de la integral de la función $f(x)$ desde 0 hasta x.





La función $F(x)$ es creciente en los intervalos donde $f(x)$ es positiva, y $F(x)$ es decreciente donde $F(x)$ es negativa.

$F(x)$ es derivable en todos los valores de x donde $f(x)$ es continua.

El Teorema fundamental del calculo dice que si $f(x)$ es una función continua entonces $F_a(x) = \int_a f(t)dt$ es una función cuya derivada es $f(x)$. Diremos que $F(x)$ es una **antiderivada** de $f(x)$.

Cada función continua tiene antiderivadas ya que para cada a, $F_a(x) = \int_a^x f(t)dt$ es una antiderivada de $f(x)$. pero esto no quiere decir que hallar los valores de las antiderivadas sea facil.

El teorema fundamental nos permite calcular fácilmente las integrales de funciones siempre que podamos hallar alguna antiderivada.

Corolario. Si la función $f(x)$ es continua en el intervalo $[a,b]$ y $f(x)$ es la derivada de una función $G(x)$ entonces

$$\int_a^b f(x)dx = G(b) - G(a)$$

Demostración. Por el teorema fundamental $F(x) = \int_a^t f(t)dt$ es una función cuya derivada es $f(x)$.
Hay una infinidad de funciones con derivada $f(x)$ (basta cambiar el valor de a), pero sabemos que todas las funciones con la misma derivada en un intervalo difieren por una constante, así que $F(x) = G(x)+c$ y solo nos falta hallar c.
Para hallarla observemos que $0 = F(a) = G(a) + c$ así que $c = -G(a)$. Por lo tanto $F(b) = G(b) - G(a)$. •

Ejemplos.

- La función x^4 es continua, y es la derivada de $\frac{1}{5}x^5$ por lo tanto $\int_1^3 x^4\,dx = \frac{1}{5}3^5 - \frac{1}{5}1^5 = \frac{242}{5}$
- La función $\frac{1}{x^2}$ es continua para $x>0$ y es la derivada de $-\frac{1}{x}$ por lo tanto $\int_1^3 \frac{1}{x^2}\,dx = (-\frac{1}{3}) - (-\frac{1}{1}) = \frac{2}{3}$

  Hay que tener cuidado de que las funciones que usemos estén definidas y sean continuas en el intervalo de integración. Si tratamos de calcular igual que antes

  $$\int_{-1}^3 \frac{1}{x^2}\,dx = = (-\frac{1}{3}) - (-\frac{1}{-1}) = -\frac{4}{3}$$

  llegamos a algo absurdo, porque la función $1/x^2$ es siempre positiva, así que su integral deberia ser positiva! (lo que sucede es que $f(x)=\frac{1}{x^2}$ no está definida en 0, por lo que no podemos aplicar el teorema).
- La función $\cos(x)$ es la derivada de $\mathrm{sen}(x)$ por lo tanto $\int_0^{\pi/2} \cos(x)\,dx = \mathrm{sen}(\frac{\pi}{2}) - \mathrm{sen}(0) = 1-0 = 1$

Otra manera de escribir el corolario es $\int_a^b F'(x)dx = F(b) - F(a) = F(x)\Big|_a^b$

Ejemplo. $\int_{-1}^2 10x(x^2-3)^4\,dx = (x^2-3)^5\Big|_{-1}^2 = (2^2-3)^5 - ((-1)^2-3)^5 = 1 - (-32) = 33$

La **integral indefinida** de $f(x)$ es $\int f(x)dx = g(x)+c$ donde $g(x)$ es *cualquier* antiderivada de $f(x)$ y c es una constante.

Para cada racional $r=\frac{m}{n}$, $x^r = \sqrt[n]{x^m}$ y sabemos que $\frac{d}{dx}x^r = r\,x^{r-1}$. Por lo tanto $\int x^r\,dx = \frac{1}{r+1}x^{r+1} + c$ si r-1.

Como $\frac{d}{dx}\mathrm{sen}(x) = \cos(x)$ entonces $\int \cos(x)\,dx = \mathrm{sen}(x) + c$

Ejercicio. Encuentra las siguientes integrales indefinidas

- $\int 1+x+x^2+x^{-3}+x^{1/4}+x^{-3/7}\,dx$ — $x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^{-2}+\frac{4}{5}x^{5/4}+\frac{7}{4}x^{4/7}+c$
- $\int 2\sqrt{x} + \frac{3}{\sqrt[3]{x}} + \frac{\sqrt[4]{x}}{\sqrt[5]{x^2}}\,dx$ — $\frac{1}{3}\sqrt{x^3}+2\sqrt[3]{x^2}+\frac{17}{20}\sqrt[20]{x^{17}}+c$
- $\int (x+1)^2\,dx$ — $\frac{1}{3}(x+1)^3+c$
- $\int (x^2+1)^2\,dx$ — $\frac{1}{5}x^5+\frac{2}{3}x^3+x+c$
- $\int \mathrm{sen}(2x)\,dx$ — $-\frac{1}{2}\cos(2x)+c$
- $\int \mathrm{sen}(x)\cos(x)\,dx$ — $\frac{1}{2}\mathrm{sen}^2(x)+c$

Las fórmulas de derivación nos permiten hallar las derivadas de cualquier combinación de funciones sencillas, pero hallar antiderivadas explicitas puede ser muy difícil o imposible, aún para funciones sencillas.

Ejemplos. $\int \mathrm{sen}^2(x)\,dx = ?$ $\int \mathrm{sen}(x^2)\,dx = ?$ $\int 1/x\,dx$

Sabemos que las antiderivadas existen, pero eso no significa que sean combinaciones de funciones conocidas.

El teorema fundamental del cálculo nos dice que si f(x) es una función continua entonces la función $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ es derivable y su derivada en cada punto es

$$F'(x) = f(x)$$

¿Que pasará si integramos la misma función pero con otros limites de integración?

Ejemplo. Si $G(x) = \int_x^b f(t)\,dt$ entonces $G(x) = -\int_b^x f(t)\,dt$ por lo tanto G(x) es derivable y $G'(x) = -f(x)$

Ejercicio. Si f(x) es continua ¿cuales son las derivadas de las siguientes funciones? (Hint: son composiciones de funciones)

$D(x) = \int_a^{3x} f(t)\,dt$ $\qquad$ $C(x) = \int_{x^2}^{b} f(t)\,dt$ $\qquad$ R: $D'(x) = 3f(x)$ $\quad$ $C'(x) = -2xf(x^2)$

Las integrales tienen muchas aplicaciones ademas del calculo de áreas y de volúmenes y del cálculo de la distancia recorrida por una partícula a partir de la velocidad. Otras aplicaciones incluyen el calculo de masas a partir de la densidad y el cálculo de momentos. Algunos problemas pueden resolverse integrando varias veces.

Ejemplo. Una partícula que se mueve en línea recta, de modo que en $t=0$ viaja con velocidad 1 y su aceleración en cada instante es $a(t)=t$. ¿Cual es su velocidad en cada instante? ¿que distancia recorre desde 0 hasta t?

Si v(t) es la velocidad de la partícula en el instante t, entonces $v'(t) = a(t) = t$. Como v(t) es una antiderivada de $a(t) = t$, entonces $v(t) = {}^1/_2t^2+c$ para alguna constante c y como $1 = v(0) = {}^1/_2 0^2+c = c$ así que $v(t) = {}^1/_2t^2+1$

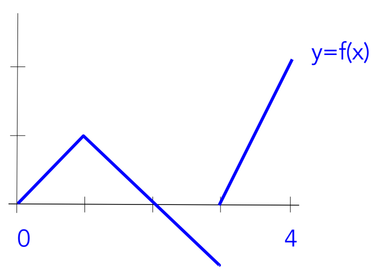
Si d(t) es la distancia recorrida por la partícula hasta el instante t, entonces $d'(t) = v(t) = {}^1/_2t^2+1$

Como d(t) es una antiderivada de $v(t) = {}^1/_2t^2+1$ entonces $d(t) = {}^1/_6t^3+t+d$ para alguna constante d

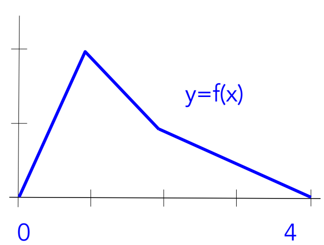
y como $0 = d(0) = {}^1/_6 0^3+0+d = d$ entonces $d=0$ así que $p(t) = {}^1/_6t^3+t$.

Problemas.

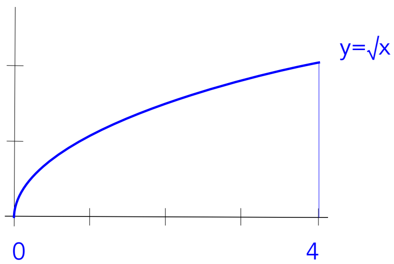
17. Si f(x) es la función cuya gráfica se muestra ¿como se ven las gráficas de $F(x) = \int_1^x f(s)ds$ y de $G(x) = \int_x^3 f(s)ds$?

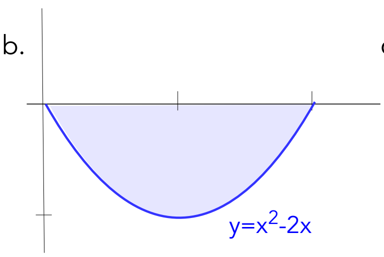


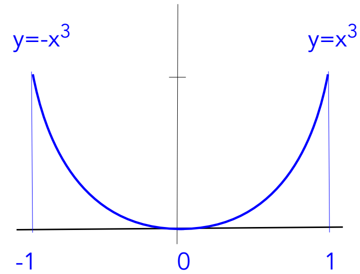
18. Dibuja la gráfica de una función f(x) en el intervalo [0,4] tal que $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$ se vea así



19. Calcula las siguientes áreas usando el TFC.

a. 

b. 

c. 

20. Sin calcular las integrales, muestra que las siguientes funciones son derivables y encuentra sus derivadas

a. $F(x) = \int_1^x 1/t \, dt$ b. $G(x) = \int_{-x}^x \tan(t) \, dt$ c. $H(x) = \int_{3x}^{x^2} \operatorname{sen}(2t) \, dt$

(puedes comprobar la última integrando y derivando)

21. Demuestra que si $f(x)$ y $g(x)$ son dos funciones continuas tales que $\int_a^x f(t) \, dt = \int_a^x g(t) \, dt$ para toda x en $[a,b]$ entonces $f(x) = g(x)$ en $[a,b]$.
¿Que pasa si $f(x)$ y $g(x)$ no son continuas?

22. Si $f(x)$ y $g(x)$ son dos funciones continuas tales que $\int_a^b f(t) \, dt = \int_a^b g(t) \, dt$ con $a<b$ demuestra que existe un c en $[a,b]$ tal que $f(c) = g(c)$.
¿Que pasa si $f(x)$ y $g(x)$ no son continuas?

23. Encuentra las integrales indefinidas usando solamente el TFC (sin métodos de integración)

a. $\int \sqrt[3]{x}+\sqrt{x^5}+1/\sqrt[7]{x}+1/\sqrt{x^7} \, dx$ b. $\int (x^2+1)^3 \, dx$ c. $\int \frac{x^2+x+x^{-1}}{x} \, dx$ d. $\int x\sqrt{x^2+1} \, dx$

e. $\int \operatorname{sen}(3x+2) \, dx$ f. $\int \cos^3(x)\operatorname{sen}(x) \, dx$ g. $\int \frac{\operatorname{sen}(1/x)}{x^2} \, dx$ h. $\int \frac{\cos(x)}{\operatorname{sen}^2(x)} \, dx$

24. ¿Cual es el valor el máximo de la función $F(x) = \int_0^x 1\text{-}t \, dt$ para x en **R**? ¿Cual es el valor el mínimo?

25. ¿En que momento la función $F(x) = \int_a^x \frac{1}{1+t^2} \, dt$ crece más rápido ? (sin integrarla)

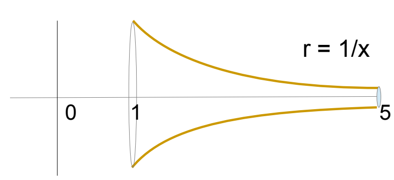
26. ¿Será cierto que todas las antiderivadas de $f(x)$ son de la forma $F_a(x) = \int_a^x f(t)dt$ para alguna a?

27. ¿Existe alguna función $f(x)$ y algún punto a tales que...

a. $\int_a^x f(t) \, dt = x^3+2$ b. $\int_a^x f(t) \, dt = x^2+3$

28. Una partícula se mueve en línea recta, partiendo del reposo en $t=1$ y con aceleración $a(t)=\sqrt{t}$.
¿cual es su velocidad en el instante t? ¿que distancia habrá recorrido hasta el instante t?

29. Calcula el volumen de esta trompeta:



Ecuaciones diferenciales

En muchas aplicaciones es necesario hallar una función que no conocemos y de la que solo tenemos información de su derivada, o conocemos alguna relación entre la función y la derivada de la función.

Si $f(x)$ es una función desconocida y sabemos que su derivada es $f(x)$, entonces $f(x)$ es una antiderivada de $g(x)$.

Ejemplos.

- Si sabemos que la derivada de $f(x)$ es x^2 entonces $f(x)$ debe ser una antiderivada de x^2 asi que $f(x) = 1/3x^3+c$ para alguna constante c.

- Si sabemos que la *segunda* derivada de $f(x)$ es $3x^2+2x+1$ entonces $f'(x) = x^3+x^2+x+c$ para alguna constante c y entonces $f(x) = {}^1/_4x^4+{}^1/_3x^3+{}^1/_2x^2+cx+d$ para algunas constantes c y d.

En muchos casos no conocemos la derivada, sino alguna relación entre la función $f(x)$ y su derivada $f'(x)$.

Ejemplos.

- Una función que es igual a su derivada es una solución de la ecuación $f'(x) = f(x)$

- Una función multiplicada por su derivada da 1, se escribe $f(x)\cdot f'(x) = 1$.

- ¿Hay alguna función que dividida entre su derivada de x? Buscamos $f(x)$ tal que $f(x)/f'(x) = x$.

- ¿Existe una función cuya derivada sea el cuadrado de la función? $f'(x) = f^2(x)$

Las **ecuaciones diferenciales** expresan relaciones entre funciones y sus derivadas y otras funciones. Son muy importantísimas en la física y otras ciencias. En general son difíciles de resolver, pero hay algunas que pueden resolverse usando antiderivadas.

Ejemplos.

- Si $f(x) = x$ entonces $f'(x) = 1$ así que $f(x)$ satisface la ecuación $f(x)/f'(x) = x$.
  Si $f(x) = x^r$ con r racional entonces $f(x) = rx^{r-1}$ así que $f(x)$ satisface la ecuación $f(x)/f'(x) = rx$.
  Mas adelante veremos que las únicas funciones que satisfacen estas ecuaciones son múltiplos reales de las soluciones dadas.

- La ecuación $f(x)\cdot f'(x) = 1$ puede escribirse como $\frac{d}{dx}{}^1/_2\, f^2(x) = 1$ y tomando antiderivadas queda ${}^1/_2f^2(x) = x+c$ por lo que $f(x) = \sqrt{2(x+c)}$. Podemos checar que $f(x)\cdot f'(x) = \sqrt{2(x+c)}\,\frac{2}{\sqrt{2(x+c)}} = 1$ y el argumento muestra qye estas son las únicas soluciones de esta ecuación.

- La ecuación $f'(x) = f^2(x)$ puede escribirse como $\frac{f'(x)}{f^2(x)} = 1$ que es $-\frac{d}{dx}\frac{1}{f(x)} = 1$ y antiderivando queda $\frac{1}{f(x)} = x+c$

  así que $f(x) = -\frac{1}{x+c}$ podemos ver que $f'(x)/f^2(x) = -(x+c)^{-2}/(x+c)^{-2} = 1$

- La ecuación $f'(x) = f(x)$ no tiene soluciones polinomiales, porque el grado de $p'(x)$ es menor que el de $p(x)$. Por una razón similar ninguna suma de potencias de x (positivas o negativas, enteras o fraccionarias) funciona. Pronto hallaremos una solución de esta ecuación.

Ejemplo. Caída libre en el vacío.
Asumir que la aceleración de un objeto que cae a la tierra (o a la luna, o al sol...) es constante ($d''(t)=c$) funciona bien para distancias cortas y para velocidades pequeñas.
En realidad, de acuerdo a la ley de gravitación de Newton, la aceleración no es constante sino inversamente proporcional al cuadrado de la distancia del objeto al centro de la tierra (o de la luna o del sol...). Así que la distancia recorrida $d(t)$ cumple la ecuación diferencial

$d''(t) = \dfrac{c}{d^2(t)}$ o sea $d''(t)\cdot d^2(t) = c$

Aunque no sepamos como resolver una ecuación así, *supongamos* que $d(t)$ es alguna potencia de t (porque son las funciones mas simples) y veamos si podemos hallar una solución de esa forma.

$d(t)=kt^a$

$d'(t)=kct^{a-1}$

$d''(t)=a(a-1)kt^{2-a}$

$[a(a-1)kt^{a-2}]\ [k^2t^{2a}]= c$

$a(a-1)k^3t^{3a-2} = c$

como t^{3a-2} es una función constante, $a=2/3$ y como $a(a-1)k^3 = c$, $k=[a(a-1)]^{-1/3}$

$d(t)=kt^{2/3}$

Problemas.

30. Encuentra una función tal que...
    a. su derivada al cuadrado sea x
    b. multiplicada por su derivada de x
    c. sea el cuadrado de su derivada

31. Encuentra todas las soluciones de las ecuaciones
    a. $f'(x) = \text{sen}(x)+\cos(x)$
    b. $f(x)f'(x) = x^2$
    c. $f'(x) = 1/f^3(x)$
    d. $f'(x)/f^2(x) = 4x$

32. La Luna tiene aprox.1700 km de radio y la aceleración gravitacional en su superficie es de aprox 1.6m/seg^2. Si un objeto cae desde 1000 km de su superficie,
    a. ¿Que función daría su posición (en km sobre la superficie) en el instante t (en segundos) si la aceleración fuera constante?
    b. ¿Que función da su posición en el instante t de acuerdo a la ley de gravitación universal?
    c. ¿Cuanto tiempo tardara en chocar con la superficie, según las dos funciones?