Funciones logarítmicas y exponenciales

Sabemos que si r es cualquier racional entonces $\frac{d}{dx}x^r = r\,x^{r-1}$, por lo tanto $\int x^r\,dx = \frac{1}{r+1}x^{r+1} + c$ *siempre y cuando* $r \neq -1$.

Así que las derivadas de potencias racionales de x son potencias racionales de x y las antiderivadas de potencias racionales de x son potencias racionales de x, *excepto para* $r = -1$

¿Y quien es $\int 1/x\,dx$?

Resulta ser una función con propiedades muy especiales, que no es una combinación de potencias de x.
El cálculo puede usarse para hallar funciones nuevas y para saber como son todas las funciones que comparten algunas propiedades.

Ejemplo. ¿Existen funciones que preserven sumas, es decir que cumplan $f(x+y) = f(x) + f(y)$?
Si, las funciones como $f(x)=ax$ cumplen la propiedad, ya que $f(x+y) = c(x+y) = cx + cy = f(x) + f(y)$
¿Y como serán *todas* las funciones con esa propiedad?
Supongamos que la función es derivable y que $f(x+y) = f(x) + f(y)$
derivando respecto a y (dejando x fija) obtenemos $f'(x+y) = 0 + f'(y)$ y haciendo $y=0$ queda $f'(x) = f'(0)$
lo que dice que la derivada f' es una constante c, así que $f(x) = cx+d$ para alguna otra constante d.
Pero si $d\neq 0$ entonces $f(x+y) = c(x+y)+d \neq cx+d + cy+d = f(x) + f(y)$ por lo tanto $d=0$ y entonces $f(x) = cx$.

Ejercicio. ¿Existen funciones que preserven productos, es decir que cumplan $f(x\cdot y) = f(x)\cdot f(y)$?
Si (tarea fácil: hallar muchas. Tarea difícil: hallar todas)
$f(x\cdot y) = f(x)\cdot f(y)$
$x\cdot f'(x\cdot y)=f(x)\cdot f'(y)$
$x\cdot f'(x)=f(x)\cdot f'(1)$

En el siglo XVII Napier descubrío una función que convertía productos en sumas, es decir con la propiedad de que $f(xy) = f(x) + f(y)$. Esta función, llamada **logaritmo** fue muy importante para simplificar los cálculos astronómicos, que eran espantosos.

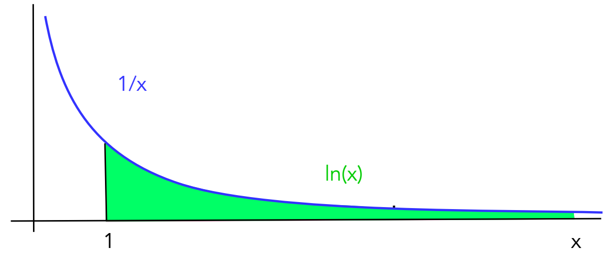
Con el desarrollo del Cálculo en el siglo XVIII Leibnitz vio que esta función se podía obtener usando derivadas e integrales.
Supongamos que existe una función tal que
$f(x\cdot y) = f(x) + f(y)$
Si 0 está en el dominio de f entonces $f(0) = f(x\cdot 0) = f(x) + f(0)$ por lo que $f(x) = 0$ para toda x. y esta función no tiene chiste.
Si 1 está en el dominio $f(1) = f(1\cdot 1) = f(1) + f(1)$ y por lo tanto $f(1) = 0$.
Ahora supongamos que f es derivable y cumple
$f(x\cdot y) = f(x) + f(y)$
derivando respecto a y (dejando a x fija) queda
$x\cdot f'(x\cdot y) = 0 + f'(y)$ (por la regla de la cadena)
y si tomamos $y=1$ queda
$x\cdot f'(x) = f'(1)$
por lo tanto
$f'(x)=f'(1)/x$
así que la derivada de $f(x)$ es c/x para alguna constante c
Conocemos una función cuya derivada es c/x:

$$\int_a^x c/t\,dt$$

Como sabemos que $f(1)=0$ entonces a debe ser 1. Todas las funciones que cumplan $f(x\cdot y) = f(x) + f(y)$ deben tener la misma derivada, así que deben ser de esta forma, salvo que cambia c.

Definimos el **logaritmo natural** (tomando $c=1$) como la función

$$\ln(x) = \int_1^x 1/t \, dt$$



Si existen funciones que cumplan $f(x\cdot y) = f(x) + f(y)$ entonces deben ser múltiplos de $\ln(x)$.
Pero no hemos demostrado que $\ln(x)$ cumpla la propiedad.

Lema. Para $x,y>0$, $\ln(x\cdot y) = \ln(x) + \ln(y)$

Demostración. Tenemos que ver que

$$\int_1^{xy} 1/t \, dt = \int_1^{x} 1/t \, dt + \int_1^{xy} 1/t \, dt$$

Para demostrarlo basta ver que para cada valor fijo de y las funciones $\ln(xy)$ y $\ln(x) + \ln(y)$ tienen el mismo valor en $x=1$ y que las dos funciones tienen derivadas iguales.

Cuando $x=1$ por definición $\int_1^{1} 1/t \, dt + \int_1^{y} 1/t \, dt = 0 + \int_1^{1y} 1/t \, dt$ así que cuando $x=1$ son iguales para cada y.

y derivando respecto a x obtenemos por el teorema fundamental del cálculo y la regla de la cadena:

$$\frac{d}{dx}\ln(x\cdot y) = \frac{d}{dx}\int_1^{xy} 1/t \, dt = y\,\frac{1}{xy} = \frac{1}{x}$$

$$\frac{d}{dx}\ln(x) + \frac{d}{dx}\ln(y) = \frac{d}{dx}\int_1^{x} 1/t \, dt + \frac{d}{dx}\int_1^{y} 1/t \, dt = \frac{1}{x} + 0 = \frac{1}{x}$$

así que sus derivadas son iguales para todo x.

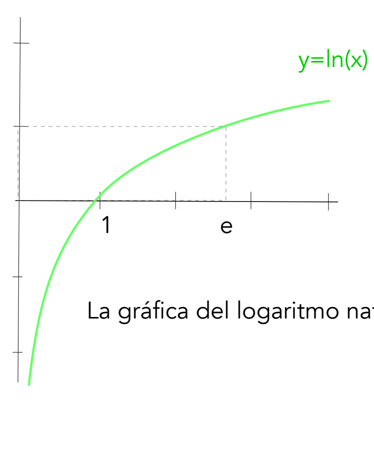
Pregunta: ¿Se podrá extender la función $\ln(x)$ para $x<0$?

Corolario. Si x, y son números reales positivos entonces

1. $\ln(x/y) = \ln(x) - \ln(y)$. En particular $\ln(1/x) = -\ln(x)$.
2. $\ln(x^m) = m\cdot\ln(x)$ para cada entero m.
3. $\ln(x^{1/n}) = 1/n\cdot\ln(x)$ para cada entero $n\neq 0$.
4. $\ln(x^r) = r\cdot\ln(x)$ para cada racional r.

Demostración.
1. Se sigue de que $\ln(x) = \ln(x/y\ y) = \ln(x/y) + \ln(y)$
2. $\ln(x^m) = \ln(x\cdot x\cdot\ldots\cdot x) = \ln(x)+\ln(x)+\ldots+\ln(x) = m\ln(x)$ para cada natural n.
$\ln(x^{-n}) = \ln(1/x^n) = \ln(1/x\ 1/x \ldots 1/x) = \ln(1/x)+\ln(1/x)+\ldots+\ln(1/x) = -\ln(x)-\ln(x)-\ldots-\ln(x) = -n\ln(x)$ para cada natural n.
3. $n\cdot\ln(x^{1/n}) = \ln(x^{1/n})+\ln(x^{1/n})+\ldots+\ln(x^{1/n}) = \ln(x^{1/n}\cdot x^{1/n}\cdot\ldots\cdot x^{1/n}) = \ln(x)$
4. Es consecuencia de 2 y 3 (tarea) •

La función $\ln(x)$ es creciente y es positiva para $x>1$ y negativa para $0<x<1$, ya que es la integral de una función positiva.



La gráfica del logaritmo natural

Ejercicio: ¿Como cuanto vale $\ln(2)$? (con un error menor a $1/10$)

Ejercicio. La función $\ln(x)$ no es acotada superiormente ni inferiormente

Existe un único número real e tal que $\ln(e)=1$.
Se puede calcular que $e \approx 2.71828\ldots$

Ejercicio. Calcular

$\ln(e^2)$ $\quad\quad$ $\ln(1/e)$ $\quad\quad$ $\ln(\sqrt{e})$ $\quad\quad$ $\ln(-e)$

R: 2, -1, 1/2, no existe

Todas las otras funciones que convierten productos en sumas, es decir que cumplen $f(xy) = f(x)+f(y)$ deben ser de la forma

$$f(x) = \int_1^x c/t\, dt \; = c \int_1^x 1/t\, dt \; = c \ln(x)$$

Es fácil ver que todas estas funciones convierten productos en sumas y por lo tanto cumplen con el corolario anterior. Veremos después que estas funciones son otros logaritmos.

Al componer $\ln(x)$ con otras funciones simples obtenemos nuevas funciones, cuyas derivadas podemos calcular con la regla de la cadena:

Ejemplo.

$$\frac{d}{dx}\ln(x^2+1) = \frac{2x}{x^2+1}$$

$$\frac{d}{dx}\ln(1/x) = \frac{-1/x^2}{1/x} = -1/x$$ lo que puede comprobarse porque $\ln(1/x) = -\ln(x)$

$$\frac{d}{dx}\operatorname{sen}(\ln(x)) = 1/x \cos(\ln(x))$$

Los ejemplos anteriores sugieren como hallar las antiderivadas de algunos cocientes

$$\int \frac{x^2}{x^3-1}\, dx = {}^1/_3 \ln(x^3-1)$$

$$\int \frac{1/x}{\ln(x)}\, dx = \ln(\ln(x))$$

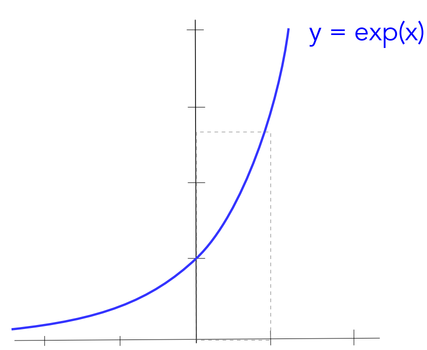
Todas las derivadas de funciones trigonométricas son combinaciones de funciones trigonométricas, pero no todas las antiderivadas de funciones trigonométricas son combinaciones de funciones trigonométricas

Ejemplo. $\frac{d}{dx}\ln(\operatorname{sen}(x)) = \frac{\cos(x)}{\operatorname{sen}(x)} = \tan(x)$ así que $\int \tan(x)\, dx = \ln(\operatorname{sen}(x)) + c$

La función exponencial.

Como **ln**(x): **R** → **R**$^+$ es una función creciente y biyectiva, tiene una inversa, a la que llamaremos la **función exponencial** **exp**(x): **R**$^+$ → **R**. Como **ln**(x) es continua, **exp**(x) es continua, y como ln(x) es derivable y su derivada $\ln'(x)=1/x$ es positiva, entonces **exp**(x) es derivable y su derivada es positiva.

La gráfica de exp es la reflexion de la gráfica de ln en la diagonal y=x :



Lema. **exp'**(x) = **exp**(x).

Demostración. Como exp(x) es la inversa de ln(x), si y=exp(x) entonces x=ln(y).

Así que $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{y}$ por lo tanto $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1/y} = y = \exp(x)$. •

Sabiendo que $\frac{d}{dx}\exp(x) = \exp(x)$ podemos calcular la derivadas de las composiciones de con otras funciones

Ejemplos.

$$\frac{d}{dx}\exp(1/x) = -1/x^2 \exp(1/x)$$

$$\frac{d}{dx}\exp(\text{sen}(x)) = \cos(x)\exp(\text{sen}(x))$$

$$\frac{d}{dx}\text{sen}(\exp(x)) = \exp(x)\cos(\exp(x))$$

$$\int x \exp(x^2)\,dx = {}^1/_2 \exp(x^2) + c$$

$$\int \exp^3(x)\,dx = {}^1/_3 \exp^3(x) + c$$

Lema. Para todos los reales x, y se cumple $\exp(x+y) = \exp(x) \cdot \exp(y)$.

Demostración. Los números $\exp(x+y)$ y $\exp(x) \cdot \exp(y)$ son iguales si y solo si sus logaritmos son iguales.
$\ln(\exp(x)\cdot\exp(y)) = \ln(\exp(x)) + \ln(\exp(y)) = x + y = \ln(\exp(x+y))$. •

¿Que función es $\exp(x)$?

Las potencias de un número positivo a, definidas para cada racional $r=m/n$ como $a^r = \sqrt[n]{a^m}$ tienen la propiedad de que $a^{r+s} = a^r \cdot a^s$, es decir que las potencias convierten sumas en productos igual que la función $\exp(x)$.
Sea $e = \exp(1)$.

Lema. $\exp(r) = e^r$ para cada racional r.

Demostración. Para cada natural m, $\exp(m) = (\exp(1))^m = e^m$ ya que $\exp$ convierte sumas en productos.
Y por la misma razón $e = \exp(1) = \exp(n\,{}^1/_n) = (\exp({}^1/_n))^n$ así que $\exp({}^1/_n) = \sqrt[n]{e} = e^{1/n}$
y combinando las dos se obtiene $\exp({}^m/_n) = \sqrt[n]{e^m} = e^{m/n}$. •

Las potencias de e no están definidas para valores irracionales (¿que significa $e^{\sqrt{2}}$ o e^{π}?) pero como $e^r = \exp(r)$ para cada número racional r, podemos *extender* la función e^r *definiéndola para cada real x como* $e^x = \exp(x)$.

Corolario. Para cada par de reales x, y se cumple $e^{x+y} = e^x e^y$

Demostración. Por definición $e^{x+y} = \exp(x+y)= \exp(x)\exp(y) = e^x e^y$. •

Otras funciones exponenciales.

Ya vimos que $\exp'(x) = \exp(x)$ ¿habrán otras funciones tendrán la propiedad $f'(x)=f(x)$?

Ejemplo. Los múltiplos reales de e^x tienen esta propiedad.

Teorema. Si f es derivable en **R** y $f'(x) = f(x)$ entonces existe un número real c tal que $f(x) = ce^x$.

Demostración. Si derivamos $\dfrac{f(x)}{e^x}$ obtenemos $\dfrac{f'(x)e^x - e^x f(x)}{e^{2x}} = 0$ ya que $f'(x) = f(x)$. Por lo tanto $f(x)/e^x$ es una constante. •

Ya vimos que $\exp(x+y) = \exp(x) \cdot \exp(y)$ ¿habrán otras funciones con la propiedad $f(x+y)=f(x)\cdot f(y)$?

Ejemplo. Los múltiplos reales de e^x **no** tienen esta propiedad.

Teorema. Si f es derivable en **R** y $f(x+y)=f(x)f(y)$ entonces existe un número real c tal que $f(x) = \exp(cx) = e^{cx}$.

Demostración. Si $f(x+y) = f(x)\cdot f(y)$ entonces $\ln(f(x+y))=\ln(f(x)\cdot f(y)) = \ln(f(x))+\ln(f(y))$ así que $\ln(f(x))$ preserva sumas y por lo tanto $\ln\circ f(x) = cx$ y esto dice que $f(x) = \exp(cx)$. •

Para cada real $a>0$ podemos definir las potencias racionales de a como $a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m}$ pero no podemos definir potencias irracionales de esta manera. Igual que antes se puede mostrar que para todo racional r se tiene que $a^r = \exp(\ln(a)x)$ así que podemos definir todas las potencias reales de x como $a^x = \exp(\ln(a)x)$

Como la función a^x es la composición de $\exp$ (que es una creciente) con la función lineal que multiplica a x por $\ln(a)$ (que es creciente si $\ln(a)>0$ y decreciente si $\ln(a)<0$) entonces a^x es creciente si $a>1$ y decreciente si $a<1$.

Lema. Para cada $a>0$, $\dfrac{d}{dx} a^x = \ln(a)\, a^x$

Demostración. $\dfrac{d}{dx} a^x = \dfrac{d}{dx} \exp(\ln(a)x) = \exp(\ln(a)x) \cdot \ln(a) = a^x \ln(a)$ •

Ejemplos.

$\dfrac{d}{dx} 2^x = \ln(2)\, 2^x$ $\qquad\qquad$ $\dfrac{d}{dx} (1/e)^x = \ln(1/e)\, (1/e)^x = - (1/e)^x$

Lema. Para cada $a>0$ y cualesquiera números reales x,y.

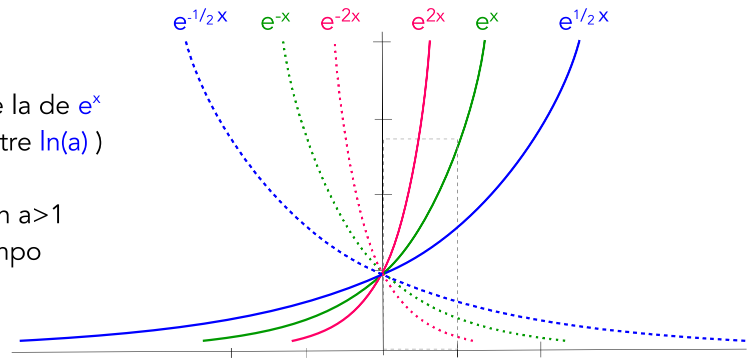
1. $a^{x+y} = a^x a^y$
2. $(a^x)^y = a^{xy}$

Demostración.

1. $a^{x+y} = \exp(\ln(a)(x+y)) = \exp(\ln(a)x+(\ln(a)y) = \exp(\ln(a)x)\exp(\ln(a)y) = a^{lc}a^y$
2. Recordar que para cada s real $e^s = \exp(s)$ y que $\ln$ es la inversa de $\exp$ así que $(a^x)^y = (e^{\ln(a)x})^y = e^{\ln(e^{\ln(a)x})y} = e^{(\ln(a)x)y} = e^{\ln(a)xy} = a^{xy}$ •

Como $a^x = e^{\ln(a)x}$ la gráfica de $y=a^x$ se obtiene de la de e^x reescalando horizontalmente (dividiendo a x entre $\ln(a)$)

así que todas las funciones exponenciales a^t con $a>1$ se comportan igual salvo por las escalas de tiempo (y cuando $a<1$ el tiempo va al revés)



Las funciones exponenciales cumplen $f'(x)=cf(x)$ lo que dice que en cada momento estas funciones crecen a un ritmo proporcional al valor de la función. Como $a^{x+t} = a^s a^t$ el valor de cada función exponencial se multiplica por el mismo valor en intervalos iguales de tiempo. Esto hace que las funciones exponenciales sirvan para modelar muchos fenómenos naturales, como el crecimiento de poblaciones y el decaimiento radiactivo.

Lema. Si $f(x)$ es una función derivable cuyo valor se multiplica por cantidades iguales en intervalos de tiempo iguales entonces $f(x)=a^x$ para algún número real a.

Demostración. Lo que estamos suponiendo es que para cada x y cada h, $f(x+h) = g(h)\cdot f(x)$.
Si derivamos $f(x)$ queda

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{g(h)\cdot f(x)-g(0)\cdot f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{[g(h)-g(0)]\cdot f(x)}{h} = g'(0)\cdot f(x)$$

así que $f'(x) = cf(x)$ para alguna constante c por lo que $f(x) = a^x$. •

Ejemplos.

- Si la población de un país crece a un 2% anual ¿que función da la población después de t años?
  La población se multiplica por 1.02 cada año, así que debe ser de la forma $p(t) = ca^t$ y como $p(0)=c$ y $p(1)=1.02c$ entonces $a=1.02$ y c es la población inicial.

- Si un elemento radiactivo se reduce a la mitad cada 3 años ¿que función da cantidad restante después de t años?
  La cantidad restante debe ser de la forma $r(t) = ca^t$ donde c es la cantidad del elemento en $t=0$ y $r(t+3) = 1/2\, r(t)$ por lo que $ca^{t+3} = {}^1/_2\, ca^t$ así que $a^3 = {}^1/_2$ y $a = \sqrt[3]{{}^1/_2}$.

Las funciones exponenciales $a^x : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^+$ son crecientes para $a>1$ y decrecientes para $0<a<1$

Como cada función $a^x : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^+$ (con a positivo y distinto de 0) es biyectiva entonces tiene una inversa, $\log_a(x) : \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}$ llamada el **logaritmo en base** a **de** x. En particular, $\ln(x) = \log_e(x)$.

Como $a^x : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^+$ es continua y derivable y su derivada nunca es 0, entonces $\log_e(x)$ es continua y derivable

Corolario. Para cada $a>0$ y cualesquiera números reales x,y.

3. $\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y)$
4. $\log_a(x^y) = y\log_a(x)$

Ya sabemos calcular a^b como $a^b = e^{\ln(a)b}$ ¿Como podremos calcular $\log_a(b)$?

$e^{\ln(b)} = b = a^{\log_a(b)} = e^{\ln(a)\log_a(b)}$ así que $\ln(b) = \ln(a)\log_a(b)$ por lo tanto $\log_a(b) = \ln(b)/\ln(a)$

así que todos los logaritmos se pueden calcular a partir del logaritmo natural

Ejemplo. Si la población de un país crece a un 2% anual, ¿cuantos años tardará en duplicarse?

$p(t) = p_o 1.02^t$ y se duplica cuando $p_o 1.02^t = 2p_o$ o sea cuando $1.02^t = 2$ usando logaritmos

$t = \log_{1.02} 2 = \ln(2) / \ln(1.02) \approx 0.69314... / 0.01980... \approx 35.002...$ así que alrededor de 35 años.

Lema. Para cada a positivo y distinto de 1, $\frac{d}{dx}\log_a(x) = \frac{1}{\ln(a)\, x}$

Demostración. Si $y = \log_a(x)$ entonces $x=a^y$ ya vimos que $\frac{dx}{dy} = \ln(a)\, a^y$ así que $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\ln(a)\, a^y} = \frac{1}{\ln(a)x}$.

Ejemplo. $\frac{d}{dx}\log_3(x) = \frac{1}{\ln(3)\, x}$

Ya definimos las funciones exponenciales a^x fijando como base un número real positivo a para todos los exponentes reales de x. ¿Que pasa si en lugar de fijar la base de una potencia fijamos el exponente? Si x es un real positivo las potencias racionales de x son $x^{m/n} = \sqrt[n]{x^m}$

¿pero que serán las potencias irracionales, como $x^{\sqrt{2}}$?

Para cada número real a definimos $x^a = e^{a\cdot\ln(x)}$. Esta función coincide con la función x^a cuando a es racional.

Lema. Para cada número real a, $\frac{d}{dx}x^a = ax^{a-1}$

Demostración. Si $\frac{d}{dx}x^a = \frac{d}{dx}e^{a\cdot\ln(x)} = a\cdot 1/x\cdot e^{a\cdot\ln(x)} = a\cdot e^{-\ln(x)}\cdot e^{a\cdot\ln(x)} = a\cdot e^{a\cdot\ln(x)-\ln(x)} = a\cdot e^{(a-1)\ln(x)} = ax^{a-1}$. •

Problemas

1. Estima el valor de e a partir de la definición de la integral, usando particiones en intervalos de longitud 1/10 y di cual es el rango de error (sin usar el valor de e).

2. Simplifica
   a. $(e^{-\sqrt{8}})^{1/\sqrt{2}}$ b. $e^{\ln(x)+\ln(1/x)}$ c. $\ln(1/e^x)$

3. Calcula las derivadas
   $a(x) = \ln(x^n)$ $b(x) = \ln(\tan(x))$ $c(x) = \ln(\ln(x))$
   $d(x) = e^{\sqrt{x}}$ $e(x) = e^{\text{sen}(1/x)}$ $f(x) = e^{x\ln(x)}$

4. Encuentra las antiderivadas
   a. $\int \ln(x)/x \; dx$ b. $\int x^\pi dx$ c. $\int \pi^x dx$

5. Demuestra que $\log_a(b) = \ln(b)/\ln(a)$.

6. Encuentra todas las soluciones de estas ecuaciones diferenciales
   a. $f'(x) = nf(x)$ b. $f'(x) = x^n \cdot f(x)$ c. $f'(x) = \text{sen}(x)\, f(x)$
   d. $f(x)+f'(x) = 0$ e. $f(x) \cdot f'(x) = 1/x$ f. $e^{f'(x)} = e^{f(x)+1}$
   g. $f(x)+f''(x)=0$ h. $f'(x)+f''(x)=0$ i. $f(x) \cdot f''(x) = 1$

7. La población de un país crece al 3% anual, cuanto tiempo tardará en duplicarse?

8. Si las bacterias en un cultivo se duplican en 30 minutos, cuanto habrán aumentado en t minutos?

9. Si en 4 años la cantidad de un elemento radiactivo se reduce en 1/10,
¿cuanto queda después de n años? ¿cuanto tardará en reducirse a la mitad?

10. Muestra que $\ln(x+y) < \ln(x) + \ln(y)$ para todos $x,y>1$. Hint: haz un dibujo que muestre los 3 logaritmos como áreas.

11. Muestra que si $a>1$ la función a^x crece eventualmente mas rápido que cualquier potencia de x
hint: calcula la derivada de a^x/x^n

12. ¿Si $1<x<y$ quien es mas grande, x^y o y^x ?

13. Demuestra que para saber como es la gráfica de una función exponencial basta conocerla en *cualquier* intervalo.

Mas aplicaciones de las funciones exponenciales.

La función gaussiana.

La función $f(x) = e^{-x^2}$ aparece en muchos lados: se usa en probabilidad y estadística, en física y química. Esta función es positiva y es par ($f(-x)=f(x)$) así que su gráfica queda arriba del eje x y es simétrica respecto al eje y.

Además $f(0)=1$ y $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$. La derivada es $f'(x) = -2xe^{-x^2}$.

Esto ya nos da una idea de como se ve su gráfica. Como $f'(x)$ es negativa para $x>0$, la función es decreciente después de 0. Para ver mas detalles podemos calcular su segunda derivada $f''(x) = 4x^2e^{-x^2}-2e^{-x^2} = (4x^2-2)\, e^{-x^2}$ que se anula en $x=\pm 1/\sqrt{2}$, es negativa en el intervalo $(-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$ y es positiva en $(-\infty,-1/\sqrt{2})$ y en $(1/\sqrt{2},\infty)$.

$\int e^{-x^2} dx$ también es una función importante, pero no es una combinación de funciones conocidas y solo puede expresarse como una integral.

Tarea: Dibujar (sin hacer cálculos) las gráficas de la derivada y la integral de la función gaussiana.

Caída libre con resistencia del aire.

Si un objeto cae por poco tiempo en el vacío, su velocidad es aproximadamente proporcional al tiempo transcurrido $v(t) = gt$ lo que puede escribirse como

(0) $v'(t) = g$

Pero si un objeto cae en el aire, la velocidad aumenta por la gravedad pero se reduce por la resistencia del aire. La aceleración de la gravedad es constante, pero la resistencia del aire aumenta con la velocidad.

Cuanto aumenta depende de muchas cosas, como el tamaño y la forma del objeto.

Para objetos redondos y pequeños la resistencia es (aproximadamente) proporcional a la velocidad, así que la velocidad $v(t)$ cumple la ecuación diferencial

(1) $v'(t) = g - c \cdot v(t)$

$v(t)$ debe ser una de las soluciones de esta ecuación, pero en principio no sabemos cual de ellas, así que hay que buscar todas. La ecuación no es tan fácil de resolver directamente, pero si la simplificamos olvidandonos por un momento de g queda

(2) $v'(t) = -c \cdot v(t)$ y ya conocemos todas las soluciones de esta ecuación, que son de la forma $v(t) = ae^{-ct}$

Por otro lado, la ecuación

(1) $v'(t) = g - c \cdot v(t)$

tiene una solución muy sencilla: $v(t) = g/c$ ya que $v'(t) = 0$.

Ahora es fácil ver que todas las funciones $v(t) = g/c + ae^{-ct}$ son soluciones de la ecuación (1).

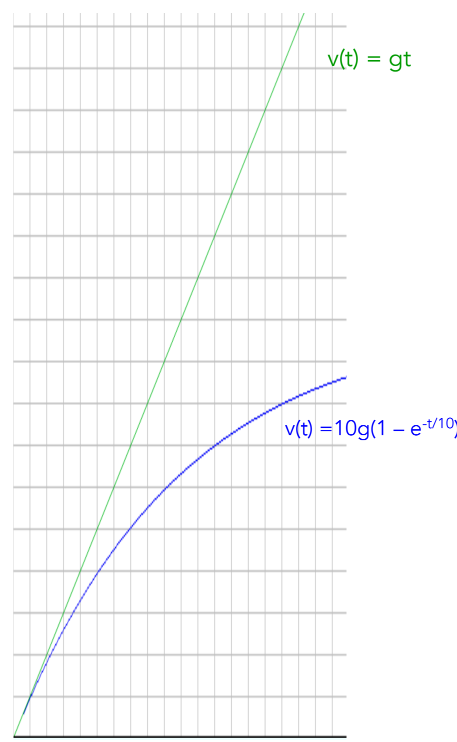
Y si tenemos dos soluciones de la ecuación (1) entonces su diferencia es una solución de la ecuación (2), por lo tanto todas las soluciones de la ecuación (1) son la suma de una solución particular de la ecuación (1) con las soluciones de la ecuación (2).

En la función $v(t) = g/c + ae^{-ct}$ el valor de a depende de la velocidad inicial.

Si la velocidad inicial es 0, entonces $v(0) = g/c + ae^{-c0} = g/c + a$

lo que dice que $a = -g/c$ y la solución queda

$v(t) = g/c - g/c\, e^{-ct} = g/c\,(1 - e^{-ct})$



Esta función tiene apariencia muy distinta a la función $v(t)=gt$ que no toma en cuenta la resistencia del aire. Como $c>0$ la función $v(t)$ es creciente, pero crece cada vez mas despacio ya que $v'(t) = ge^{-ct}$ .que se aproxima a 0.

$v'(0) = g$ que coincide con $v'(0) = g$. Los dos modelos se parecen mucho al principio, pero luego se vuelven muy distintos: la función $v(t) = gt$ no esta acotada, mientras que la función $v(t) = g/c\,(1 - e^{-ct})$ siempre es menor que g/c, que es la *velocidad terminal* del objeto.

La ecuación log!stica.

La fórmula de crecimiento exponencial de la población, conocida como la ley de Malthus, supone que el crecimiento es proporcional al tamaño de la población, es decir, $p'(t) = c\, p(t)$

y sabemos que las funciones que se comportan así son las exponenciales $p(t) = ca^t$

Este modelo da buenas estimaciones a corto plazo, pero a largo plazo falla porque los recurso son limitados y con el tiempo el crecimiento se vuelve insostenible.

¿Como se puede modelar el crecimiento de una población tomando en cuenta esto?

Una forma es decir que el crecimiento de la población es proporcional al producto de la población por lo que le falta para llegar su valor máximo posible:

$$p'(t) = c\, p(t)\, [p-p(t)]$$

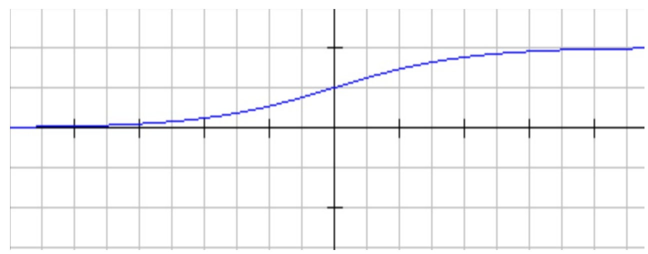
donde p es la población máxima que puede sobrevivir con los recursos que hay.

¿Sí habrán funciones que crezcan así? ¿cuales?

Si $f(x) = \dfrac{1}{1+e^{-cx}}$

entonces $f'(x) = \dfrac{ce^{-cx}}{(1+e^{-cx})^2}$

así que $f(x)(1-f(x)) = \dfrac{1}{1+e^{-cx}} \; \dfrac{1+e^{-cx} - 1}{1+e^{-cx}} = \dfrac{ce^{-cx}}{(1+e^{-cx})^2} = f'(x)$

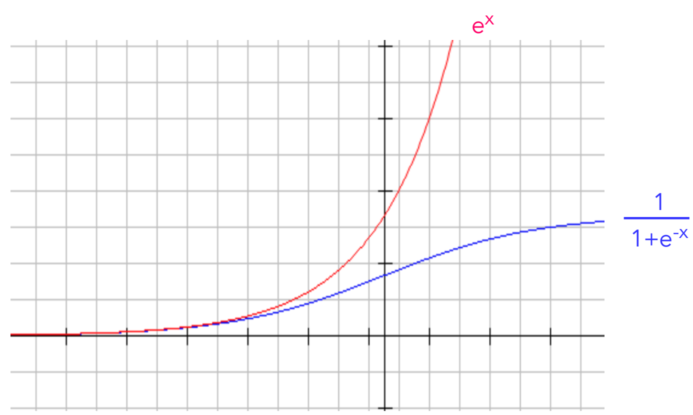


Pregunta: ¿Como se puede modificar esta función para que cumpla la ecuación $p'(t) = c\, p(t)\, [p-p(t)]$?

La antiderivada de $f(x) = \dfrac{1}{1+e^{-cx}}$ puede calcularse si reescribimos $\dfrac{1}{1+e^{-cx}} = \dfrac{e^{cx}}{1+e^{cx}}$ entonces es claro que

$$\int \frac{1}{1+e^{-cx}}\, dx = \int \frac{e^{cx}}{1+e^{cx}}\, dx = \ln(1+e^{cx}) + c$$

Aunque la función logística se ve muy distinta a las funciones exponenciales que modelan el crecimiento de la población a corto plazo, para valores pequeños de x se parecen mucho.



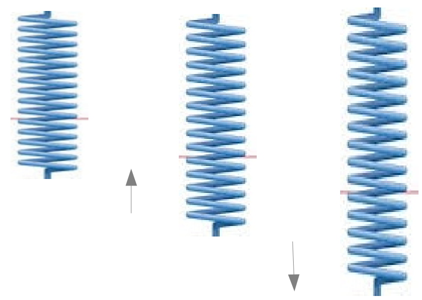
A ecuación logística se usa muchísimo. El modelo mas sencillo para la propagación de una epidemia supone que el numero de nuevas infecciones es proporcional al numero de individuos infectados multiplicado por el numero de individuos que aún pueden infectarse:

$i'(t) = c\, i(t)\, [p-p_I-i(t)]$ donde $i(t)$ es la población infectada, p es la población total y p_i es la población inmune.

Esta es básicamente la misma ecuación logística, que también se usa para modelar el ritmo de las reacciones químicas, los cambios en el lenguaje, la difusión de innovaciones...

La ecuación del resorte

Cada resorte tiene una longitud natural a la que trata de volver si se le estira o encoge. La fuerza con que trata de regresar es proporcional a la longitud (positiva o negativa) que esta estirado o encogido (Ley de Hooke)



Como la aceleración es proporcional a la fuerza, si $l(t)$ mide que tan estirado o encogido esta el resorte en el instante t, entonces $l(t)$ cumple la ecuación diferencial

$$l''(t) = -c \cdot l(t)$$

donde la constante c depende de la rigidez del resorte

Una solución es la función $l(t) = \operatorname{sen}(\sqrt{c} \cdot t)$ que es un movimiento oscilatorio cuya frecuencia está determinada por c. Pero no podemos estar seguros que el resorte se comporte así ya que puede haber otras soluciones de la ecuación.

Ejercicio. ¿Cuales son todas las soluciones de la ecuación $l''(t) = -c \cdot l(t)$?

R: $l(t) = a \cdot l\operatorname{sen}(\sqrt{c} \cdot t) + b \cdot l\cos(\sqrt{c} \cdot t)$

El modelo anterior no toma en consideración la fricción, de modo que el resorte nunca deja de oscilar.

En realidad la fricción frena al resorte, si suponemos que esta fuerza es proporcional a la velocidad, obtenemos una ecuación de la forma

$l''(t) = -b \cdot l'(t) - c \cdot l(t)$

Pregunta. ¿Pueden imaginar como serán las soluciones de esta ecuación?

$l(t) = ae^{-t}\cos(t)$ es solución de $l''(t) = -2 \cdot l'(t) - 2 \cdot l(t)$

Otras funciones que involucran exponenciales

Si $f(x)$ es cualquier función positiva y $g(x)$ es una función real podemos definir $f(x)^{g(x)} = e^{g(x) \cdot \ln(f(x))}$
Usando las derivadas de exp y ln y la regla de la cadena podemos calcular las derivadas de estas funciones.

Ejemplos.

$$\frac{d}{dx} x^x = \frac{d}{dx} e^{x \cdot \ln(x)} = e^{x \cdot \ln(x)} \frac{d}{dx} \ln(x) \cdot x = e^{x \cdot \ln(x)} \cdot [1+\ln(x)] = [1+\ln(x)] \cdot x^x$$

$$\frac{d}{dx} \operatorname{sen}(x)^{\cos(x)} = \frac{d}{dx} e^{\ln(\operatorname{sen}(x)) \cdot \cos(x)} = e^{\ln(\operatorname{sen}(x)) \cos(x)} [\cos^2(x)/\operatorname{sen}(x) - \ln(\operatorname{sen}(x)) \cdot \operatorname{sen}(x)] = [\cos^2(x)/\operatorname{sen}(x) - \ln(\operatorname{sen}(x)) \cdot \operatorname{sen}(x)] \cdot \operatorname{sen}(x)^{\cos(x)}$$

Problemas

14. Encuentra las derivadas

$a(x) = x^e$ $\quad$ $b(x) = 2^x$ $\quad$ $c(x) = 2^{x^x}$ $\quad$ $d(x) = x^{\sqrt{x}}$ $\quad$ $e(x) = \text{sen}^x(x)$

15. Esboza las gráficas de la derivada y de una antiderivada de $f(x) = e^{-x^2}$ a partir de la gráfica de f dada antes.

16. Sea $f(x)=x^x$

a. Calcula $\lim_{x\to 0} f(x)$ y $\lim_{x\to\infty} f(x)$.

b. Encuentra los puntos críticos de f.

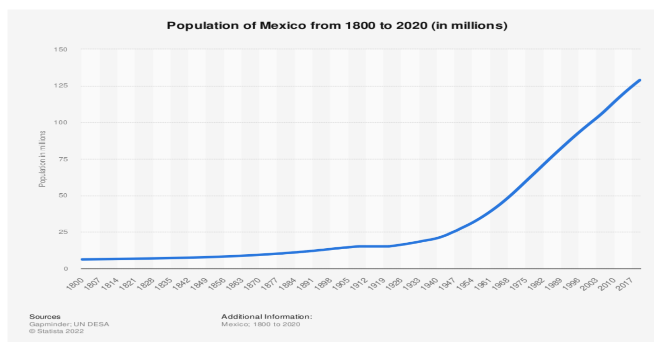
c. ¿En cuales intervalos f es creciente y en cuales intervalos es decreciente?

d. Esboza la gráfica de la función.

17. Muestra que la función logística $l(x)= \dfrac{1}{1+e^{-cx}}$ tiene la propiedad $f(-x) = 1-l(x)$.

Esto dice que la gráfica de l es simétrica al rotar 180° alrededor del punto (0,1/2). Como las gráficas de todas las funciones logísticas se obtienen de esa trasladando y estirando horizontalmente y verticalmente, todas son simétricas alrededor del punto de inflexión (donde la segunda derivada cambia de signo).

18. La gráfica muestra la población de México entre 1800 y 2020.
Suponiendo que la población sigue una ecuación logística ¿como cual sería el supremo de la población? Hint: ejercicio anterior.



19. Encuentra alguna solución de la ecuación logística $p'(t) = 2\, p(t)\, [3-p(t)]$

20. ¿Cuales son las soluciones de la ecuación diferencial $f''(t) = -4f(t)$?

21. ¿Que ecuación diferencial cumple la función $f(t) = e^{-2t}\cos(t)$? Hint: Es la ecuación de un resorte con fricción.

22. La temperatura de un objeto va cambiando proporcionalmente a su diferencia con la temperatura ambiente.

a. ¿Que ecuación diferencial cumple la temperatura $T(t)$ del objeto suponiendo que la temperatura ambiente es constante?

b. ¿Que función da la temperatura del objeto en el instante t?