Métodos de integración

Calcular integrales es fácil cuando podemos hallar antiderivadas, pero hallar la antiderivada de una función es en general mucho mas difícil que hallar su derivada.
Usando las reglas para la derivada de una suma, para la derivada del producto, para la derivada de una composición y para la derivada de la inversa, podemos hallar las derivadas de cualquier combinación (usando sumas, restas, productos, cocientes y composiciones) de las funciones mas simples: las constantes, las potencias de x, las exponenciales y los logaritmos, las funciones trigonométricas y sus inversas. A todas estas funciones se les conoce como **funciones elementales**.

Ejemplos de funciones elementales:

$$f(x) = \frac{x^5+7x^3-x^2+x+2}{x^4-3x^4+5x^2-3x} \qquad g(x) = \sqrt{x\cdot \ln(x)+e^{\text{sen}(x)}} \qquad h(x) = \arctan(\ln(\cos(1/x)))$$

Recordemos las derivadas de las funciones básicas, y veamos para cuales conocemos sus antiderivadas:

$\frac{d}{dx} x^r = r\, x^{r-1}$ | $\int x^r\, dx = \frac{1}{r+1} x^{r+1} + c$ para $r \neq -1$ y $\int x^{-1}\, dx = \ln(x) + c$

$\frac{d}{dx} \ln(x) = x^{-1}$ | $\int \ln(x)\, dx = ?$

$\frac{d}{dx} e^x = e^x$ | $\int e^x\, dx = e^x + c$

$\frac{d}{dx} \text{sen}(x)\, dx = \cos(x)$ | $\int \text{sen}(x)\, dx = -\cos(x) + c$

$\frac{d}{dx} \cos(x)\, dx = -\text{sen}(x)$ | $\int \cos(x)\, dx = \text{sen}(x) + c$

$\frac{d}{dx} \tan(x) = \sec^2(x)$ | $\int \tan(x)\, dx = ?$

$\frac{d}{dx} \cot(x) = -\csc^2(x)$ | $\int \cot(x)\, dx = ?$

$\frac{d}{dx} \sec(x) = -\sec(x)\tan(x)$ | $\int \sec(x)\, dx = ?$

$\frac{d}{dx} \csc(x) = -\csc(x)\cot(x)$ | $\int \csc(x)\, dx = ?$

$\frac{d}{dx}\ \text{arcsen}(x)\, dx = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ | $\int \text{arcsen}(x)\, dx = ?$

$\frac{d}{dx}\ \arccos(x)\, dx = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ | $\int \arccos(x)\, dx = ?$

$\frac{d}{dx}\ \arctan(x)\, dx = \frac{1}{1+x^2}$ | $\int \arctan(x)\, dx = ?$

$\frac{d}{dx}\ \text{arcot}(x)\, dx = -\frac{1}{1+x^2}$ | $\int \text{arccot}(x)\, dx = ?$

$\frac{d}{dx}\ \text{arcsec}(x)\, dx = \frac{1}{|x|\sqrt{1-x^2}}$ | $\int \text{arcsec}(x)\, dx = ?$

$\frac{d}{dx}\ \text{arccs}(x)\, dx = -\frac{1}{|x|\sqrt{1-x^2}}$ | $\int \text{arccsc}(x)\, dx = ?$

Como las derivadas de todas estas funciones son combinaciones de estas mismas funciones, las reglas de derivación muestran que todas las derivadas de funciones elementales son funciones elementales.

¿Será cierto que las antiderivadas de funciones elementales son funciones elementales?
Veamos un par de funciones de la lista:

Ejemplo. Podemos hallar la antiderivada de $\ln(x)$ viendo que hay una función cuya derivada es *casi* $\ln(x)$:

$$\frac{d}{dx}\, x\cdot\ln(x) = 1\cdot\ln(x) + x\cdot 1/x = \ln(x) + 1$$

así que para hallar la antiderivada de $\ln(x)$ basta restarle a $x\cdot\ln(x)$ una función cuya derivada sea 1:

$$\int \ln(x)\, dx = x\cdot\ln(x) - x + c$$

Ejemplo. Podemos hallar la antiderivada de $\tan(x)$ si la escribimos como $\frac{\text{sen}(x)}{\cos(x)}$ y vemos que $-\text{sen}(x)$ es la derivada de $\cos(x)$ así que

$$\int \tan(x)\, dx = \int \frac{\text{sen}(x)}{\cos(x)}\, dx = \int -\frac{d}{dx}\ln(\cos(x))\, dx = -\ln(\cos(x)) + c$$

Aún faltan las antiderivadas de varias funciones de la lista, como $\sec(x)$ y $\csc(x)$ y todas las inversas de las trigonométricas, que requieren mas trabajo.

Aunque veremos que todas estas funciones tienen antiderivadas elementales, resulta que muchas funciones elementales (que son combinaciones de estas funciones) **no** tienen antiderivadas elementales, así que no pueden expresarse como combinaciones de funciones conocidas.

Problemas.

1. ¿Puedes explicar por que las derivadas de $\arcsen(x)$ y $\arccos(x)$ difieren solo por el signo?

2. Calcula $\int \cot(x)\, dx$

3. a. Comprueba que $\int \sec(x)\, dx = \ln(\sec(x)+\tan(x)) + c$
   b. ¿Quien es $\int \sec^2(x)\, dx$?
   c. ¿Puedes calcular $\int \sec^3(x)\, dx$? (la respuesta **no** es $1/4 \sec^4(x) + c$. Puedes usar que $\sec^2(x)=1+\tan^2(x)$)

Hallar antiderivadas es mucho mas difícil que hallar derivadas: Las funciones para las que podemos adivinar las antiderivadas son muy especiales y para las demás no hay recetas infalibles. Hay funciones que a primera vista se parecen y tienen antiderivadas muy distintas y es posible que *ninguna* combinación de funciones conocidas sea la antiderivada que buscamos.

Hay algunos métodos que pueden ayudar a hallarlas en caso de que existan, pero no hay garantía de éxito y muchas veces hay que combinar varios métodos y utilizar el ingenio. Los ejemplos anteriores ilustran dos métodos: la integración por sustitución y la integración por partes. Y hay otro método que -al menos en teoría- siempre encuentra las antiderivadas de las funciones racionales, pero en la práctica no es fácil de usar.

Integración por sustitución.

La regla de la cadena dice que la derivada de una composición $f(u(x))$ es el producto $f'(u(x))\, u'(x)$. El método de sustitución sirve para hallar antiderivadas de productos de esta forma.

Ejemplo. Para hallar $\int x \operatorname{sen}(x^2)\,dx$ podemos ver que $x \operatorname{sen}(x^2)$ parece la derivada de una composición.
Si ponemos $u(x)=x^2$ entonces $u'(x)=2x$ que podemos escribir (abusando de la notación) como $u = x^2$ y $du = 2x\,dx$. Entonces

$$\int x \operatorname{sen}(x^2)\,dx = \int {}^1/_2 \operatorname{sen}(u)\,du = {}^{-1}/_2 \cos(u) + c = {}^{-1}/_2 \cos(x^2) + c$$

y podemos comprobar que $\frac{d}{dx}[-1/2 \cos(x^2) + c] = -1/2\cdot 2x\cdot(-\operatorname{sen}(x^2)) = \operatorname{sen}(x^2)$

Ejemplo. Para hallar $\int (x^2+2x)(x^3+3x^2+1)^4\,dx$ podemos sustituir $u=x^3+3x^2+1$ y entonces $du=3x^2+6x\,dx$ así que

$$\int (x^2+2x)(x^3+3x^2+1)^4\,dx = \int 1/3\,(3x^2+6x)(x^3+3x^2+1)^4\,dx = \int 1/3\, u^4\,du = 1/15\, u^5 + c = 1/15(x^3+3x^2+1)^5 + c.$$

Ojo. el método de sustitución sólo sirve en casos especiales, si queremos usarlo para una función parecida a la anterior

$$\int (x^2+2x)(x^3+2x^2+1)^4\,dx$$

ya no funciona porque si $u=x^3+2x^2+1$ entonces $du=3x^2+4x\,dx$ no es múltiplo escalar de $x^2+2x\,dx$ y no podemos hacer la sustitución.

Pregunta: ¿Que se puede hacer en este caso (que es el caso mas común)?

Ejemplo. Podemos calcular $\int \frac{x}{x^2+1}\,dx$ haciendo $u=x^2+1$, $du = 2x\,dx$ entonces

$$\int \frac{x}{x^2+1}\,dx = 1/2 \int \frac{2x}{x^2+1}\,dx = 1/2 \int \frac{du}{u} = 1/2 \ln(u) + c = 1/2 \ln(x^2+1) + c$$

Ejemplo. Para calcular $\int \frac{\ln(x)}{x}\,dx$ podemos poner $u=\ln(x)$, $du = 1/x\,dx$ entonces

$$\int \frac{\ln(x)}{x}\,dx = \int u\,du = 1/2\, u^2 + c = 1/2\, (\ln(x))^2 + c$$

Ejemplo. Podemos hallar $\int \operatorname{sen}(x)\cos(x)$ si hacemos $u=\operatorname{sen}(x)$, entonces $du=\cos(x)\,dx$, así que

$$\int \operatorname{sen}(x)\cos(x)\,dx = \int u\,du = 1/2\, u^2 + c = \operatorname{sen}^2(x) + c$$

Pero también podemos hacer $u=\cos(x)$, entonces $du=-\operatorname{sen}(x)\,dx$, así que

$$\int \operatorname{sen}(x)\cos(x)\,dx = \int -u\,du = -1/2\, u^2 + c = -\cos^2(x) + c$$

que parece una solución distinta, y podemos comprobar que las dos son correctas.
(lo que sucede es que $\operatorname{sen}^2(x)$ y $-\cos^2(x)$ difieren por una constante)

La dificultad con el método de sustitución está en decidir quien debe ser u, unas veces es fácil hallarlo y otras no, y muchas veces ninguna elección sirve.

Ejemplo. Calcular $\int \cot(x)$ por sustitución. Si recordamos que $\cot(x)= \frac{\cos(x)}{\operatorname{sen}(x)}$ y hacemos $u=\operatorname{sen}(x)$, $du=\cos(x)dx$

$$\int \cot(x)\,dx = \int \frac{\cos(x)}{\operatorname{sen}(x)}\,dx = \int \frac{du}{u} = \ln(u) + c = \ln(\operatorname{sen}(x)) + c$$

Integración por partes.

Se basa en la regla del producto de Leibniz, que dice que si u y v son funciones de x entonces

$$(u\cdot v)'(x) = u'(x)\cdot v(x) + u(x)\cdot v'(x)$$

de donde $u'(x)\cdot v(x) = (u\cdot v)'(x) - u(x)\cdot v'(x)$

y por lo tanto $\int u'(x)\cdot v(x)\,dx = (u\cdot v)(x) - \int u(x)\cdot v'(x)\,dx$

Esto permite cambiar el problema de integrar un producto por el de integrar otro producto, que puede ser mas fácil (si elegimos bien y tenemos suerte).

Ejemplo. Para calcular $\int x\,\mathrm{sen}(x)\,dx$ podemos poner $u'=\mathrm{sen}(x)$, $v=x$ entonces $u=-\cos(x)$ y $v'=1$

$\int x\,\mathrm{sen}(x)\,dx = x\cos(x) - \int 1\,\mathrm{sen}(x)\,dx = x\cos(x) – x + c$

Ejercicio. Calcular $\int x\ln(x)\,dx$ R: $x^2 \ln(x) \quad -1/2x^2 + c$

Ejemplo. Para calcular $\int \ln(x)/x^2\,dx$ podemos poner $u'=1/x^2$, $v=\ln(x)$ entonces $u=1/x$ y $v'=-1/x$

así que $\int \ln(x)/x^2\,dx = \ln(x)\,(-1/x) - \int -1/x^2\,dx = -1/x\ln(x) -1/x + c$

Podemos integrar por partes algunas funciones que no se ven como productos haciendo $u'(x)=1$. $v=f(x)$.

Ejemplo. Para calcular $\int \arctan(x)\,dx$ podemos hacer $u'(x)=1$, $v(x)=\arctan(x)$ entonces $u(x)=x$ y $v'(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$

$\int 1\arctan(x)\,dx = x\arctan(x) - \int \dfrac{x}{1+x^2}dx = x\,\mathrm{arcsen}(x) – \ln(1+x^2) + c$

Ejercicio. Calcular $\int \ln(x)\,dx$ R: $x\ln(x) \ -x + c$

Ejemplo. Para calcular $\int e^x\cos(x)\,dx$ podemos poner $u'=e^x$, $v=\cos(x)$ entonces $u=e^x$ y $v'=-\mathrm{sen}(x)$

$\int e^x \cos(x)\,dx = e^x\cos(x) + \int e^x\,\mathrm{sen}(x)\,dx$

y podemos volver a integrar por partes poniendo $u'=e^x$, $v=\mathrm{sen}(x)$ entonces $u=e^x$ y $v'=\cos(x)$

$\int e^x\cos(x)\,dx = e^x\cos(x) + e^x\,\mathrm{sen}(x) - \int e^x\cos(x)\,dx$

aunque llegamos a la misma integral esta tiene signo negativo, por lo que podemos pasarla del otro lado y queda

$2\int e^x\cos(x)\,dx = e^x\cos(x) + e^x\,\mathrm{sen}(x)$ así que

$\int e^x\cos(x)\,dx = {}^1/_2\, e^x\cos(x) + {}^1/_2\, e^x\,\mathrm{sen}(x)$

Ejemplo. Para calcular $\int \cos^2(x)\,dx$ podemos poner $u'=\cos(x)$, $v=\cos(x)$ entonces $u=\mathrm{sen}(x)$ y $v'=-\mathrm{sen}(x)$

$\int \cos(x)\cos(x)\,dx = \mathrm{sen}(x)\cos(x) + \int \mathrm{sen}(x)\mathrm{sen}(x)\,dx$ y si integramos por partes otra vez queda la integral original con el mismo signo, así que no llegamos a nada. Pero si recordamos que $\mathrm{sen}^2(x) =1-\cos^2(x)$ queda

$\int \cos(x)\cos(x)\,dx = \mathrm{sen}(x)\cos(x) + \int 1\,dx – \int \cos(x)\cos(x)\,dx$ así que

$2\int \cos(x)\cos(x)\,dx = \mathrm{sen}(x)\cos(x) + \int 1\,dx$ por lo que $\int \cos^2(x)\,dx = {}^1/_2\,\mathrm{sen}(x)\cos(x) + {}^1/_2\, x + c$

Los últimos ejemplos muestran que para hallar antiderivadas hay que usar ingenio.

Ejemplo. Ya sabemos que $\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \arctan(x) + c$. ¿Quien será $\int \frac{1}{(1+x^2)^2}\,dx$? No se ve como usar sustitución ni integración por partes, a menos que hagamos algo para reducir el problema:

$$\int \frac{1}{(1+x^2)^2}\,dx = \int \frac{1+x^2}{(1+x^2)^2}\,dx - \int \frac{x^2}{(1+x^2)^2}\,dx = \int \frac{1}{1+x^2}\,dx \boxed{-\int \frac{x^2}{(1+x^2)^2}\,dx} = \int \frac{1}{1+x^2}\,dx \boxed{+\frac{1}{2}\frac{x}{1+x^2} - \frac{1}{2}\int \frac{1}{1+x^2}\,dx}$$

$$u=x \quad v'=\frac{x}{(1+x^2)^2} \qquad u'=1 \quad v=-\frac{1}{2}\frac{1}{1+x^2}$$

así que

$$\int \frac{1}{(1+x^2)^2}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{1+x^2}\,dx + \frac{1}{2}\frac{x}{1+x^2} = \frac{1}{2}\arctan(x) + \frac{1}{2}\frac{x}{1+x^2} + c$$

Existen muchas funciones elementales cuyas antiderivadas no son funciones elementales, algunas simples son:

$\sqrt{1-x^4}$ $\quad$ $\mathrm{sen}(x^2)$ $\quad$ $e^{1/x}$ $\quad$ e^{x^2} $\quad$ $\ln(\ln(x))$ $\quad$ $\frac{1}{\ln(x)}$ $\quad$ $\frac{\mathrm{sen}(x)}{x}$ $\quad$ $\frac{e^x}{x}$

Problemas.

4. Calcula *explícitamente* las que se puedan dar sin conocer $f(x)$.

a. $\int f^2(x)\,dx$ $\qquad$ b. $\int f'(x)f(x)\,dx$

c. $\int f'(x)/f(x)\,dx$ $\qquad$ d. $\int f(x)/f'(x)\,dx$

e. $\int xf'(x) + f(x)\,dx$ $\qquad$ f. $\int xf''(x)+2f'(x)\,dx$

g. $\int f'(x)/x - f(x)/x^2\,dx$

5. Calcula directamente o usando sustitución o integración por partes

a. $\int x^2(x^3+1)^4\,dx$ $\qquad$ b. $\int \sqrt{x^4+x^2}\,dx$ $\qquad$ c. $\int \frac{2}{3x+4}\,dx$

d. $\int \frac{\mathrm{sen}(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}\,dx$ $\qquad$ e. $\int \frac{\cos(x)}{\mathrm{sen}^3(x)}\,dx$ $\qquad$ f. $\int \frac{e^x}{e^x+1}\,dx$

g. $\int \frac{1}{x\ln(x)}\,dx$ $\qquad$ h. $\int \frac{e^{\tan(x)}}{\cos^2(x)}\,dx$ $\qquad$ j. $\int x\cos(x^2)\,\mathrm{sen}(x^2)\,dx$

k. $\int \tan^2(x)\sec^2(x)\,dx$ $\qquad$ l. $\int \frac{\ln(x)}{x^2}\,dx$ $\qquad$ m. $\int x\ln^2(x)\,dx$

n. $\int x^2\,\mathrm{sen}(x)\,dx$ $\qquad$ o. $\int \frac{x}{e^x}\,dx$ $\qquad$ p. $\int \mathrm{sen}(x)\,e^x\,dx$

6. a. Calcula la antiderivada de $\mathrm{arcsen}(x)$ y adivina la antiderivada de $\arccos(x)$.

b. Calcula la antiderivada de $\mathrm{arccsc}(x)$ y adivina las antiderivada de $\mathrm{arcsec}(x)$.

Fracciones parciales

Las funciones mas simples después de los polinomios son las funciones racionales, que son los cocientes de polinomios.

Las antiderivadas de polinomios son polinomios, y las antiderivadas de las potencias negativas de x son potencias negativas de x, excepto para $1/x$ cuya antiderivada es $\ln(x)$.

¿Y como serán las antiderivadas de las otras funciones racionales? ¿Serán funciones racionales y logaritmos?

Ejercicio. ¿Pueden calcular las siguientes antiderivadas?

a. $\int \frac{1}{x+1}\,dx$ $\qquad$ $\ln(x+1)$

b. $\int \frac{1}{(x+1)^2}\,dx$ $\qquad$ $-\frac{1}{x+1}$

c. $\int \frac{1}{x^2+1}\,dx$ $\qquad$ $\arctan(x)$

d. $\int \frac{1}{x^2-1}\,dx$ $\qquad$?

Las antiderivadas de $\frac{1}{x+1}$ y $\frac{1}{(x+1)^2}$ se pueden adivinar o hacer por sustitución y $\frac{1}{x^2+1}$ es la derivada de $\arctan(x)$.
La antiderivada de $\frac{1}{x^2-1}$ puede hallarse viendo que es la suma de dos fracciones mas simples: $\frac{1}{x^2-1} = \frac{1/2}{x+1} - \frac{1/2}{x-1}$

así que

$$\int \frac{1}{x^2-1}\,dx = \int \frac{1/2}{x+1}\,dx - \int \frac{1/2}{x-1}\,dx = 1/2 \ln/x+1) - 1/2 \ln(x-1) + c = \ln\sqrt{\frac{x+1}{x-1}} + c$$

Que las antiderivadas de funciones parecidas se vean tan distintas hace pensar en como serán las derivadas de otras funciones racionales.

Ejemplo. Para hallar $\int \frac{x}{x+1}\,dx$ basta escribir la fracción como suma de fracciones mas simples:

$$\int \frac{x}{x+1}\,dx = \int \frac{x+1}{x+1} - \frac{1}{x+1}\,dx = \int 1 - \frac{1}{x+1}\,dx = x - \ln(x+1) + c$$

Ejemplo. Calcular $\int \frac{1}{(x+3)(x-4)}\,dx$

Veamos si la función puede descomponerse como suma de funciones mas simples:

$$\frac{1}{(x+3)(x-4)} = \frac{a}{x+3} + \frac{b}{x-4}$$ para algunos reales a,b.

$$\frac{1}{(x+3)(x-4)} = \frac{a(x-4)+b(x+3)}{(x+3)(x-4)} = \frac{(a+b)(x)-4a+3b}{(x+3)(x-4)} \iff a+b=0,\ -4a+3b=1 \iff a=-1/7,\ b=1/7$$

así que

$$\int \frac{1}{(x+3)(x-4)}\,dx = \int \frac{-1/7}{x+3} + \frac{1/7}{x-4}\,dx = -1/7 \ln(x+3) + 1/7 \ln(x-4) = \ln\sqrt[7]{\frac{x-4}{x+3}} + c$$

Ejercicio. ¿A cuales de las anteriores antiderivadas se parecerán estas?

a. $\int \frac{1}{x^2+x+1}\,dx$

b. $\int \frac{1}{x^2+2x+1}\,dx$

c. $\int \frac{1}{x^2+3x+1}\,dx$

¿Será cierto que las antiderivadas de todas las funciones racionales son funciones elementales?

Ejemplo. ¿Como será $\int \frac{x+1}{(x+2)(x+3)}\,dx$?

Es fácil ver que $\frac{1}{(x+2)(x+3)} = \frac{1}{x+2} + \frac{1}{x+3}$ así que $\frac{x+1}{(x+2)(x+3)} = \frac{x+1}{x+2} + \frac{x+1}{x+3}$

(y ahora podemos dividir para reducir los numeradores) $= \frac{x+2-1}{x+2} + \frac{x+3-2}{x+3} = 2 - \frac{1}{x+2} - \frac{2}{x+3}$

Así que $\int \frac{x+1}{(x+2)(x+3)}\,dx = \int 2\,dx - \int \frac{1}{x+2}\,dx - 2\int \frac{2}{x+3}\,dx = 2x - \ln(x+2) - 2\ln(x+3) + c$

Ejemplo. ¿Como será $\int \frac{1}{x(x+1)(x-1)}\,dx$?

Podemos tratar de escribir la fracción como suma de fracciones del tipo que ya sabemos integrar

Si $\frac{1}{x(x+1)(x-1)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{x-1}$ para algunos números reales a,b,c ? si escribimos la suma como una sola fracción

$$\frac{1}{x(x+1)(x-1)} = \frac{a(x+1)(x-1) + bx(x-1) + cx(x+1)}{x(x+1)(x-1)} = \frac{(a+b+c)x + (-b+c)x - a}{x(x+1)(x-1)}$$

entonces $-a=1$ $\quad -b+c=0$ $\quad a+b+c=0$

$b=c$ $\quad b=c=1/2$ así que

$$\int \frac{1}{x(x+1)(x-1)}\,dx = \int \frac{-1}{x}\,dx + \int \frac{1/2}{x+1}\,dx + \int \frac{1/2}{x-1}\,dx = -\ln(x) + 1/2\ln(x+1) + 1/2\ln(x-1) = \ln\sqrt{\frac{x^2-1}{x}} + c$$

Ejercicio. Calcular $\int \frac{1}{x^2(x+1)}\,dx$

Si tratamos de descomponer $\frac{1}{x^2(x+1)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1}$ (no tiene caso repetir el denominador x) queda

$\frac{1}{x^2(x+1)} = \frac{ax(x+1) + bx^2}{x^2(x+1)}$ así que $a+b=0$, $a=0$ y $1=0$ y no hay solución.

Si intentamos $\frac{1}{x^2(x+1)} = \frac{a}{x^2} + \frac{b}{x+1}$

$\frac{1}{x^2(x+1)} = \frac{a(x+1) + bx^2}{x^2(x+1)}$ queda $b=0$ $a=0$ y $a=1$ así que tampoco hay solución.

¿y que otra opción queda? $\frac{1}{x^2(x+1)} = \frac{a}{x^2} + \frac{b}{x} + \frac{c}{x+1}$

$\frac{1}{x^2(x+1)} = \frac{a(x+1) + bx(x+1) + cx^2}{x^2(x+1)}$ queda $b+c=0$ $a+b=0$ $a=1$ -> $b=-1$ y $c=1$

Así que $\frac{1}{x^2(x+1)} = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} + \frac{1}{x+1}$ así que

$$\int \frac{1}{x^2(x+1)}\,dx = \int \frac{1}{x^2}\,dx - \int \frac{1}{x}\,dx + \int \frac{1}{x+1}\,dx = -1/x - \ln(x) + \ln(x+1) + c$$

Teorema. Las antiderivadas de todas las funciones racionales son funciones elementales.

Idea de la demostración. Basta mostrar que cada función racional $\frac{p(x)}{q(x)}$ se puede escribir como suma de funciones que ya sepamos que tienen antiderivadas elementales. Lo que se muestra es que todas las funciones racionales se pueden escribir como suma de polinomios y funciones de la forma: $\frac{c}{(x+a)^n}$, $\frac{c(2x+a)}{(x^2+ax+b)^n}$ y $\frac{c}{(x^2+ax+b)^n}$.

La demostración es algebráica y requiere saber sobre división de polinomios.

El primer paso es factorizar al denominador $q(x)$ como producto de polinomios irreducibles (es decir, que no se pueden factorizar mas). Los factores pueden estar repetidos, si agrupamos los que son iguales queda $q(x) = q_1^{n_1}(x) \cdot q_2^{n_2}(x) \cdot \ldots \cdot q_k^{n_k}(x)$ donde cada par de $q_i(x)$ son primos relativos (su máximo común divisor es una constante).

Así que si $\overline{q}_i(x) = q(x)/q_i^{n_i}(x)$ entonces el máximo común divisor de todos los $\overline{q}_i(x)$ es una constante, por lo que podemos escribir a 1 como combinación lineal de los $\overline{q}_i(x)$, donde los coeficientes son otros polinomios $s_i(x)$:

$$1 = s_1(x)\cdot\overline{q}_1(x) + s_2(x)\cdot\overline{q}_2(x) + \cdot \ldots + s_k(x)\cdot \overline{q}_k(x)$$

Dividiendo esta igualdad entre $q(x)$ queda

$$\frac{1}{q(x)} = \frac{s_1(x)}{q_1^{n_1}(x)} + \frac{s_2(x)}{q_2^{n_2}(x)} + \ldots + \frac{s_k(x)}{q_k^{n_k}(x)}$$

Así que

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{m_1(x)}{q_1^{n_1}(x)} + \frac{m_2(x)}{q_2^{n_2}(x)} + \ldots + \frac{m_k(x)}{q_k^{n_k}(x)} \qquad \text{donde } m_i(x) = s_i(x)p(x)$$

El siguiente paso es descomponer a cada fracción $\frac{m_i(x)}{q_i^{n_i}(x)}$ como una suma $\frac{m_i(x)}{q_i^{n_i}(x)} = d_i(x) + \frac{r_1(x)}{q_i^{1}(x)} + \frac{r_2(x)}{q_i^{2}(x)} + \ldots + \frac{r_{n_k}(x)}{q_i^{n_i}(x)}$

donde los $r_i(x)$ tienen grado menor que $q_i(x)$. Esto se hace dividiendo repetidamente a $m_i(x)$ entre $q_i(x)$.

Hasta ahora no hemos usado ningún resultado profundo, pero para terminar necesitamos saber como son los polinomios irreducibles en R. Para esto usamos el Teorema Fundamental del Algebra, que dice que todo polinomio real se puede escribir como producto de polinomios de grado a lo mas 2, es decir, que los polinomios irreducibles son de la forma $q_i(x)=x+a_i$ o $q_i(x)=x^2+a_ix+b_i$.

Así que ya sabemos como son los denominadores de las fracciones, y también sabemos como deben ser los numeradores, porque tienen que ser polinomios de grado menor: en el primer caso los $r_i(x)$ son constantes y en el segundo caso son constantes o de grado 1, en este caso podemos completarlos a un múltiplo de la derivada de $q_i(x)$ y lo que resta es una constante. De aqui salen los 4 tipos de funciones en las que se descompone cada función racional: los polinomios $d_i(x)$ y las funciones racionales de la forma $\frac{c}{(x+a)^n}$, $\frac{c(2x+a)}{(x^2+ax+b)^n}$ y $\frac{c}{(x^2+ax+b)^n}$. •

Aplicar el algoritmo anterior requiere hallar la factorización del polinomio $q(x)$, que puede ser muy difícil. Y aun si tenemos la factorización puede ser bastante laborioso, como muestra el siguiente ejemplo.

Ejemplo. Calcular $\int \frac{x+2}{x^5+x^3}\,dx$.

$x^5+x^3 = x^3(x^2+1)$ y podemos se puede checar que $1 = x\cdot x^3 - (x^2-1)\cdot(x^2+1)$ así que

$$\frac{1}{x^3(x^2+1)} = -\frac{x}{x^2+1} + \frac{x^2-1}{x^3}$$ y por lo tanto

$$\frac{x+2}{x^3(x^2+1)} = \frac{(x+2)x}{x^2+1} + \frac{(x+2)(x^2-1)}{x^3} = \frac{x^2+2x}{x^2+1} + \frac{x^3+2x^2-x-2}{x^3} = 1 + \frac{2x}{x^2+1} + 1 + \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x^3}$$

así que

$$\int \frac{x+2}{x^3(x^2+1)}\,dx = \int 2 + \frac{2x}{x^2+1} + \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x^3}\,dx = 2x + \ln(x^2+1) + 2\ln(x) + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}$$

Otras sustituciones

A veces para poder integrar conviene escribir a la variable x como función de otra variable y

Ejemplo. Para calcular $\int \sqrt{1-x^2}\,dx$ podemos poner $x=\mathrm{sen}(y)$, entonces $dx=\cos(y)dy$ y la integral queda

$$\int \sqrt{1-x^2}\,dx = \int \sqrt{1-\mathrm{sen}^2(y)}\,\cos(y)\,dy = \int \cos^2(y)\,dy = 1/2\,\mathrm{sen}(y)\cos(y) + 1/2\,y + c = 1/2\,x\sqrt{1-x^2} + 1/2\,\mathrm{arcsen}(x) + c$$

Problemas

7. Calcular

a. $\int \frac{x}{x-1}\,dx$ b. $\int \frac{x}{(x-1)(x+2)}\,dx$ c. $\int \frac{1}{x^2-3x+2}\,dx$

d. $\int \frac{1}{x^3-x^2}\,dx$ e. $\int \frac{1}{x^4-1}\,dx$ f. $\int \frac{1}{(x^2+1)^2}\,dx$

8. Calcular

a. $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$ b. $\int \sqrt{1+x^2}\,dx$

Mas aplicaciones de las integrales

Desplazamiento y distancia recorrida.

Si una partícula se mueve en línea recta, su *desplazamiento* mide el cambio de posición. Si la posición es $p(t)$, el desplazamiento entre t_0 y t_1 es la diferencia $p(t_1) - p(t_0)$. El desplazamiento no es necesariamente igual a la distancia recorrida, porque la partícula no tiene que moverse siempre en la misma dirección, puede ir y volver.

Ejemplo. La velocidad de un objeto lanzado hacia arriba es $v(t)=30-10t$
¿Cual es su desplazamiento en el intervalo [1,4]? ¿Que distancia recorre en ese intervalo de tiempo?

El desplazamiento es $\int_1^4 v(t)\,dt = \int_1^4 30-10t\,dt = 30t-5t^2\Big|_1^4 = 40 - 25 = 15$

La distancia recorrida es $d(t) = \int_1^4 |v(t)|\,dt$

$$|v(t)| = |30-10t|\,dt = \begin{cases} 30-10t & t\leq 3 \\ 10t-30 & t>3 \end{cases}$$

$$\int_{-1}^4 |v(t)|\,dt = \int_{-1}^3 30-10t\,dt + \int_3^4 10t-30\,dt = 30t-5t^2\Big|_1^3 + 5t^2-30t\Big|_3^4 = 45-25-40+45 = 25$$

Ejercicio. Si un punto se mueve con velocidad $v(t)=t^2-3t+2$ ¿que distancia recorre entre los dos instantes en que su velocidad es 0?

Valor medio (promedio) de una función.

El promedio de una colección finita de números reales $r_1, r_2,\ldots, r_n$ es el número r que se obtiene al sumarlos y dividirlos entre n. ¿pero será posible hallar el promedio de una infinidad de números?
Para hacerlo podemos pensar que el promedio es el número que al sumarse n veces da lo mismo que al sumar los números. Usando esta idea podemos promediar los valores de una función integrable en un intervalo.

El *valor medio* (o promedio) de una función integrable f en un intervalo [a,b] es

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

(el valor medio de f es el valor de la función constante cuya integral es igual a la integral de f)

Ejemplo. ¿Cual es el medio de la función $f(x)=x^2$ entre x=1 y x=3?

$$\frac{1}{3-1}\int_1^3 x^2\,dx = \frac{1}{2}\,\frac{1}{3}\,x^3\Big|_1^3 = \frac{1}{2}\;\; 27/3-1/3 = \frac{13}{3}$$

Ejercicio. ¿Cual es el valor medio de la función $\sqrt{x}$ entre 0 y n?

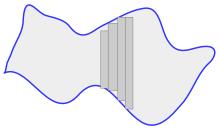
$$\frac{1}{n-0}\int_0^n \sqrt{x}\,dx = \frac{1}{n}\;\; 2/3\,x^{3/2}\Big|_0^n = 2/3\,n^{3/2}$$

Ejemplo. ¿Cual es el valor medio de la función $f(x)=1/x$ entre 1 y r?

$$\frac{1}{r-1}\int_1^r 1/x\,dx = \frac{1}{r-1}\ln(x)\Big|_1^r = \frac{1}{r-1}\ln(r) - \ln(1) = \frac{\ln(r)}{r-1}$$

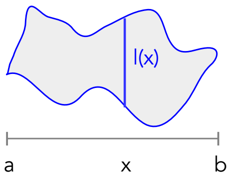
Areas de regiones planas.

Podemos estimar el área de una región del plano aproximándola con rectángulos delgados

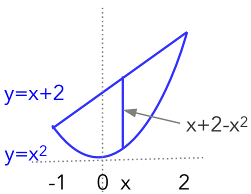


Si pensamos que la figura está formada por intervalos verticales y el intervalo sobre x tiene longitud $l(x)$ entonces la figura tiene área

$$\text{Area} = \int_a^b l(x)\,dx$$



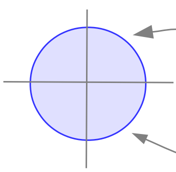
Ejemplo. Calcular el área encerrada por la parábola $y=x^2$ y la recta $y=x+2$.



Las curvas se cruzan cuando $x^2=x+2$ o $x^2-x-2=0$ o $(x+1)(x-2)=0$
es decir cuando $x=-1$ y $x=2$

$$\text{Area} = \int_{-1}^{3} x+2-x^2\,dx = 1/2\,x^2 + 2\,x - 1/3\,x^3 \Big|_{-1}^{3} =$$

Ejemplo. Area del círculo de radio 1.

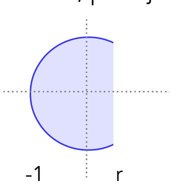


Los puntos del círculo satisfacen $x^2+y^2=1$, así que el círculo está formado por las gráficas de

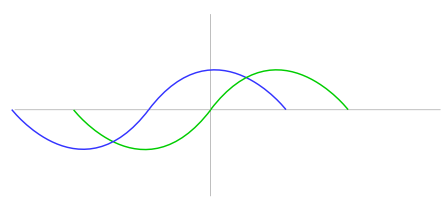
$y=\sqrt{1-x^2}$ y $y=-\sqrt{1-x^2}$ por lo que la longitud del intervalo sobre x es $2\sqrt{1-x^2}$

$$\text{Area círculo} = 2\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\,dx = x\sqrt{1-x^2} + \operatorname{arcsen}(x)\Big|_{-1}^{1} = 0 + \pi/2 - 0 - (-\pi/2) = \pi$$

Sabemos calcular el área del círculo sin usar la integral, pero esta nos permite calcular las áreas de muchas regiones circulares, por ejemplo el área desde $x=-1$ hasta $x=r$ para cualquier r entre -1 y 1.



$$\text{Area} = 2\int_{-1}^{r}\sqrt{1-x^2}\,dx = x\sqrt{1-x^2} + \operatorname{arcsen}(x)\Big|_{-1}^{r} = r\sqrt{1-r^2} + \operatorname{arcsen}(r) + \pi/2$$



Ejemplo. Hallar el área de una de las regiones entre $y=\operatorname{sen}(x)$ y $y=\cos(x)$.

La región mostrada empieza y termina donde las curvas se cruzan, es decir cuando $\operatorname{sen}(x)=\cos(x)$ y esto sucede cuando $x=\pi/4$ y $x=-3\pi/4$

$$\text{Area} = \int_{-3\pi/4}^{\pi/4} \cos(x) - \operatorname{sen}(x)\,dx = \operatorname{sen}(x) + \cos(x)\Big|_{-3\pi/4}^{\pi/4} = 1/\sqrt{2}+1/\sqrt{2}+1/\sqrt{2}+1/\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$$

Trabajo (física)

El trabajo realizado por una fuerza constante f al mover un objeto en línea recta una distancia d es $T=fd$.
Si la fuerza no es constante sino que depende de la posición, el **trabajo** realizado al moverse desde $x=a$ hasta $x=b$ se define como

$$T = \int_a^b f(p)dp \qquad \text{donde } f(p) \text{ es la fuerza ejercida en la posición p.}$$

Esta integral puede verse de otra forma: si $p(t)$ es la posición en el instante t, con $p(t_1)=a$ y $p(t_2)=b$ entonces con un cambio de variable la integral queda

$$T = \int_a^b f(p)dp = \int_{t_1}^{t_2} f(p(t))\frac{dp}{dt}\,dt = \int_{t_1}^{t_2} f(p(t))\,v(t)\,dt$$

donde $f(p(t))$ es la fuerza en el instante t y $v(t)$ es la velocidad en ese instante.

Ejemplo. Trabajo realizado al estirar un resorte.
La fuerza con que un resorte trata de volver a su longitud original es proporcional al estiramiento del resorte: cuando está estirado una longitud ℓ, esta fuerza es $f(\ell)=c\ell$ (donde c es una constante que dependa de la rigidez del resorte).
Así que el trabajo que hay que hacer para estirar un resorte de longitud L al doble es

$$T = \int_0^L c\ell\, d\ell = c/2\ \ell^2 \Big|_0^L = c/2L^2$$ (cuando $\ell=0$ el resorte tiene longitud L y cuando $\ell=L$ tiene longitud $2L$)

Ejemplo. Trabajo realizado por la fuerza gravitacional.
La fuerza con que un objeto atrae a otro es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia r entre sus centros $f(r)=c/r^2$. El trabajo realizado al mover al objeto desde la distancia d_1 hasta la distancia d_2 es

$$T = \int_{d_1}^{d_2} c/r^2\, dr = -c/r \Big|_{d_1}^{d_2} = -c/d_2 + c/d_1 = c(d_1-d_2)$$

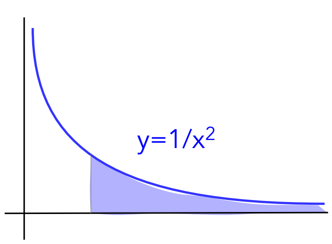
Problemas

9. Calcula las áreas encerradas por las curvas.

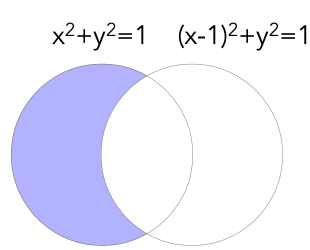
a. $y=x^2$ y $y=x^3$ para $0 \le x \le 1$

b. $y=\text{sen}(2x)$ y $y=2\text{sen}(x)$ para $0 \le x \le \pi$

c.



d.



10. Calcula el área que queda arriba de la curva $y=x^3$ y abajo de la curva $y=5x^2-6x$

11. Calcula el valor medio de las funciones para $0 \le x \le \pi$.

a. $f(x)=\mathrm{sen}(x)$ b. $g(x)=\cos(x)$

12. ¿Cual es el valor promedio de $f(x)=x^n$ para $-r \le x \le r$?

13. Un punto se mueve a lo largo de una recta con velocidad $v(t)=3t-t^2$

Calcula la distancia recorrida y el desplazamiento para cada t entre 0 y 5.

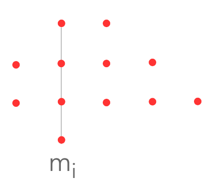
14. Una partícula parte del reposo en $t=0$ y su aceleración es $a(t)=\mathrm{sen}(t)$.

¿Cual es su velocidad en el instante t? ¿Que distancia recorre entre $t=0$ y $t=2\pi$?

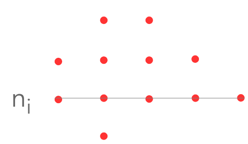
15. Una cadena esta colgada y hay que jalarla hasta arriba. ¿Que trabajo hay que hacer si la cadena tiene longitud L unidades y pesa P unidades y la fuerza que ejerce es el peso de lo que falta por jalar?

Centroide y centro de masa de una figura plana

El **centroide** de una figura plana es el "punto medio" de todos los puntos de la figura. Para una cantidad finita de puntos las coordenadas del centroide son los promedios de las coordenadas de todos los puntos (las sumas de las coordenadas dividida entre el número de puntos).
Si en la colección de puntos hay m_i puntos con primera coordenada x_i y hay n_i puntos con segunda coordenada y_i, entonces las coordenadas del centroide de la colección de puntos son



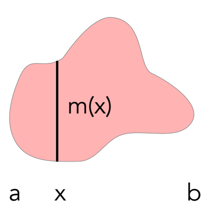
$$C_x = \frac{\sum m_i x_i}{\sum m_i}$$



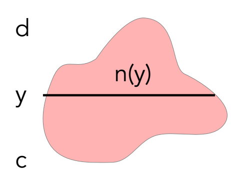
$$C_y = \frac{\sum n_i y_i}{\sum n_i}$$

(ya que $\sum m_i = \sum n_i$ es el total de puntos, $\sum m_i x_i$ es la suma de las primeras coordenadas de todos los puntos y $\sum n_i y_i$ es la suma de las segundas coordenadas de todos los puntos)

En una región R del plano hay una infinidad de puntos, asi que no podemos sumar sus coordenadas y dividir entre el número de puntos, pero sí podemos integrar las coordenadas de los puntos de R y dividirlas entre el área de R, y esto nos da las coordenadas del centroide:

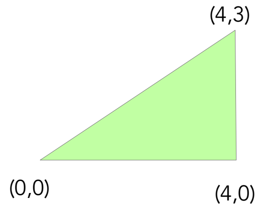


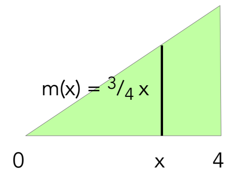
$$C_x = \frac{\int x\, m(x)\, dx}{\int m(x)\, dx}$$

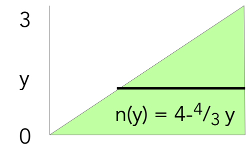


$$C_y = \frac{\int y\, n(y)\, dy}{\int n(y)\, dy}$$

Ejemplo. ¿Donde esta el centroide de este triángulo?

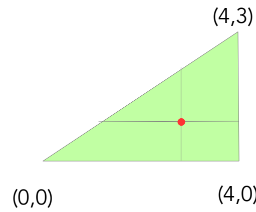




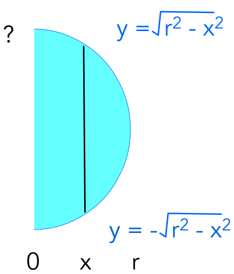


$$C_x = \frac{\int_0^4 x\, m(x)\, dx}{\int_0^4 m(x)\, dx} = \frac{\int_0^4 x\, {}^3/_4\, x\, dx}{\int_0^4 {}^3/_4\, x\, dx} = \frac{{}^1/_4\, x^3 \Big|_0^4}{{}^3/_8\, x^2 \Big|_0^4} = \frac{{}^1/_4\, 4^3}{{}^3/_8\, 4^2} = \frac{16}{6}$$

$$C_y = \frac{\int_0^3 y\, m(y)\, dy}{\int_0^3 m(y)\, dy} = \frac{\int_0^3 y\, (4-{}^4/_3\, y)\, dy}{\int_0^3 4-{}^4/_3\, y\, dy} = \frac{2y^2 - {}^4/_9\, y^3 \Big|_0^3}{4y - {}^2/_3 x^2 \Big|_0^3} = \frac{2\cdot 3^2 - {}^4/_9\, 3^3}{4\cdot 3 - {}^2/_3\, 3^2} = \frac{6}{6} = 1$$



Ejemplo. ¿Donde esta el centroide del semicírculo de radio r $\{ (x,y) \,/\, 0 \le x ,\; x^2+y^2 \le r^2 \}$?



$$C_x = \frac{\int x\, m(x)\, dx}{\int m(x)\, dx} = \frac{\int x\, 2\sqrt{r^2-x^2}\, dx}{\int 2\sqrt{r^2-x^2}\, dx} = \frac{-{}^2/_3 (r^2-x^2)^{3/2}}{\text{Area semicir.}} = \frac{{}^2/_3\, r^3}{\pi\, r^2 / 2} = \frac{4r}{3\pi}$$

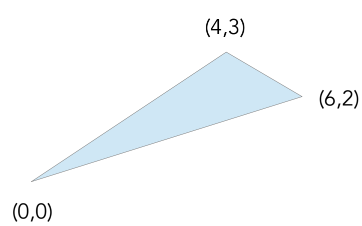
C_y puede calcularse de manera similar, pero no es necesario hacerlo porque la simetría de la figura respecto al eje x nos dice que $C_y = 0$

Si fabricamos la figura de un material homogéneo entonces su centroide es el *centro de masa* o *punto de equilibrio* de la figura. Este punto tiene varias propiedades físicas importantes:

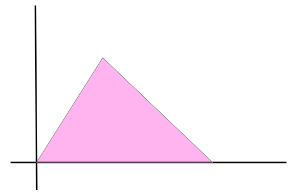
1. En presencia de gravedad, es el único punto sobre el que puede apoyarse la figura sin caerse.
2. En ausencia de gravedad, es el punto alrededor del cual giraría la figura si la pusiéramos a dar vueltas sin sostenerla.
3. Es el único punto donde podemos aplicarle una fuerza lineal a la figura sin que rote.

Problemas.

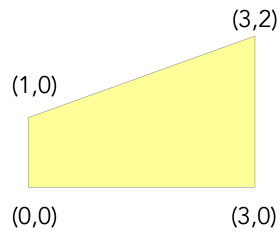
16. Encuentra el centroide de este triángulo.



17. Muestra que el centroide de cualquier triángulo es el centroide de sus vértices.
(para facilitar los cálculos puedes asumir que los vértices tienen coordenadas (0,0), (a,0) y (c,d)

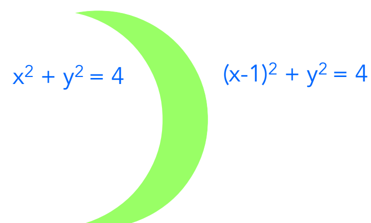


18. Muestra que el centroide de este cuadrilátero no es el centroide de sus vértices (localiza ambos)



19. Localiza el centroide de esta luna

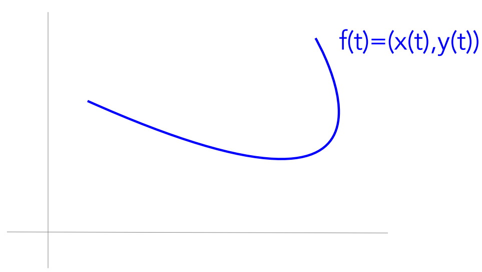
(la coordenada y es inmediata)



Curvas parametrizadas.

Si pensamos en un punto moviéndose continuamente en el plano, entonces el punto dibuja una *curva* en el plano. Distintos puntos moviendose a diferentes velocidades pueden trazar la misma curva.

Una **curva plana** es la *imagen* de una función continua de un intervalo al plano, $\mathbf{f} : I \to R^2$.
La función **f** esta determinada por dos funciones del intervalo a la recta (sus funciones coordenadas).



La función **f** da una *parametrización* de la curva. Una curva puede tener muchas parametrizaciones distintas, que dependen de como recorremos la curva.

Ejemplo. La función $f(t) = (3t,2t)$ para $t \in R$ dibuja la linea recta $3y=2x$. La función $g(t) = (6t,4t)$ también traza esa recta, pero mas rápido. Y la función $f(t) = (-3t,-2t)$ recorre la misma recta, pero en sentido opuesto.

Ejemplo. La función $c(t) = (\cos(t), \text{sen}(t))$ para $t \in [0,2\pi]$ parametriza al circulo unitario. Otra parametrización del círculo (empezando en otro punto y en dirección opuesta) esta dada por $d(t) = (\text{sen}(t), \cos(t))$ para $t \in [-\pi,\pi]$.
Pero la función $e(t) = (\text{sen}(t), \text{sen}(t))$ para $t \in [-\pi,\pi]$ traza un segmento de recta (de ida y vuelta).

Ejemplo. El segmento de recta entre los puntos (1,0) y (2,3) puede parametrizarse de muchas maneras, por ejemplo

$p(t) = (1+t,2t)$ para $0 \leq t \leq 1$
$q(s) = (t,2t-2)$ para $1 \leq t \leq 2$
$r(s) = (1+t^2,2t^2)$ para $0 \leq t \leq 1$

Ejemplo. El segmento de parábola $y=x^2$, $x \geq 0$ puede parametrizarse de distintas maneras, como

$c(t)=(t, t^2)$ para $t \in [0,\infty]$
$d(s)=(\sqrt{s}, s)$ para $t \in [0,\infty]$
$e(t)=(1/t, 1/t^2)$ para $t \in [0,\infty]$

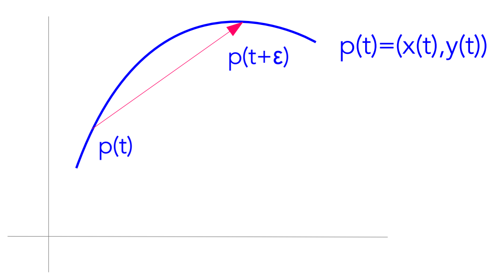
Desplazamiento, velocidad y rapidez.

Si identificamos a cada punto p del plano con el vector $\overline{p}$ que va del origen al punto entonces podemos sumar y restar puntos del plano del mismo modo que podemos sumar y restar puntos de la recta identificándolos con números reales: el desplazamiento del punto $\overline{p}$ al punto $\overline{q}$ es $\overline{q} - \overline{p}$.

Si un punto se mueve en el plano siempre con la misma rapidez y en la misma dirección entonces podemos definir su velocidad como

$$\text{velocidad} = \frac{\text{desplazamiento}}{\text{tiempo}}$$

pero si la rapidez y/o la dirección cambian esto ya no funciona.
Si el punto se mueve en el plano y su posición en el instante t es $p(t)=(x(t),y(t))$, podemos preguntarnos como averiguar que tan rápido y en que dirección se está moviendo en cada instante.



Para esto, podemos fijarnos en la posición en un instante t y en un instante posterior $t+\varepsilon$ y considerar la velocidad promedio en ese intervalo

$$\text{vel. prom.} = \frac{\text{desplazamiento}}{\text{tiempo}} = \frac{p(t+\varepsilon) - p(t)}{\varepsilon}$$

Si tomamos intervalos de tiempo cada vez mas cortos la velocidad promedio debe aproximarse cada vez mas a la velocidad del punto en el instante t.

Definimos la **velocidad instantánea** en t como $\lim_{\varepsilon \to 0} \text{vel. prom.} = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{p(t+\varepsilon) - p(t)}{\varepsilon} = p'(t)$

si es que el limite existe. Ojo: al igual que la posición $p(t)$ la velocidad $p'(t)$ es un *vector*.

Así la posición del punto es $p(t) = (x(t),y(t))$ entonces la velocidad del punto es $v(t) = p'(t) = (x'(t),y'(t))$.
La **rapidez** de la partícula es la norma de su velocidad $|v(t)| = (x'(t),y'(t))$.

Ejemplo. Si la posición de una partícula en el instante t es $p(t) = (1+2t,-t^2)$

¿Cual es su velocidad en el instante t? $p'(t) = (2,-2t)$

¿Cual es su rapidez en el instante t? $|p'(t)| = |(2,-2t)| = \sqrt{4+4t^2} = 2\sqrt{1+t^2}$

Ejercicio. Si la posición de una partícula en el instante t es $p(t) = (1+2sen(t),3-2cos(t))$.

¿Cual es su velocidad en el instante t? $v(t) = p'(t) = (2cos(t),2sen(t))$

¿Cual es su rapidez en el instante t? $|v(t)| = 2$

Ejercicio. La velocidad de una partícula en el instante t es $v(t) = (4t+1, 3t^2)$. ¿Cual es su posición en el instante t?
La posición es una antiderivada de la velocidad, así que $p(t) = (t^2+t+c,t^3+d)$ para algunas constantes c y d, pero no podemos decir quienes son sin tener mas datos.

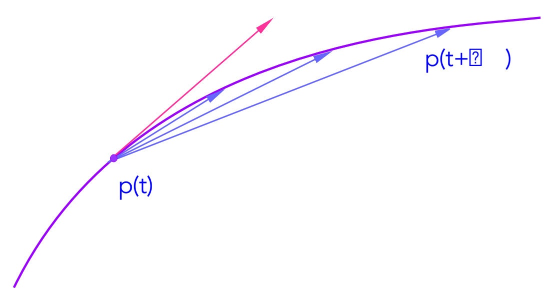
¿Cual es la posición de la partícula en el instante t, si en $t=1$ está en el punto $(2,4)$?
Como $p(1) = (1^2+1+c,1^3+d) = (2,4)$ entonces $c=0$ y $d=3$ así que $p(t) = (t^2+t,t^3+3)$.

Dada una curva plana, podemos preguntarnos como hallar la recta tangente a la curva en un punto.
Para esto basta calcular un vector tangente a la curva en cada punto.

Si tenemos una parametrización de la curva $p(t)=(x(t),y(t))$ y tomamos dos puntos cercanos $p(t)$ y $p(t+\varepsilon)$ entonces cuando $\varepsilon\to 0$ la dirección del vector $p(t+\varepsilon)-p(t)$ se aproxima a la dirección del vector tangente en $p(t)$, pero el tamaño del vector se aproxima a 0, pera evitarlo podemos dividirlo entre ε y considerar

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{p(t+\varepsilon) - p(t)}{\varepsilon}$$

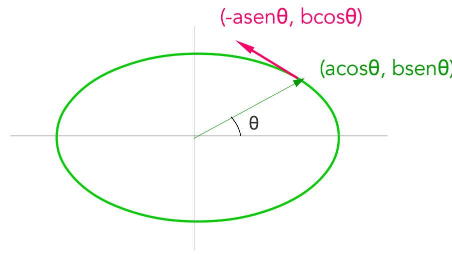
que es el mismo límite que usamos para calcular la velocidad de un punto que se mueve en la trayectoria $p(t)$.



Ejemplo. Un vector tangente a la curva $p(t) = (1+3t,t^2)$ en cada punto es $p'(t) = (3,2t)$

Ejemplo. La elipse $x^2/a^2+y^2/b^2 = 1$ se puede parametrizar como $p(t) = (a\cos\theta, b\,sen\theta)$

y un vector tangente en cada punto es $p'(t) = (-a\,sen\theta, b\cos\theta)$



Distancia recorrida por un punto.

Si un punto se mueve a lo largo de una curva y su posición en el instante t es $p(t)=(x(t),y(t))$ entonces la distancia que recorre entre los instantes $t=a$ y $t=b$ debe ser la integral de la rapidez con que se mueve:

$$\int_a^b |v(t)|\,dt = \int_a^b |p'(t)|\,dt$$

Ejercicio. Una partícula se mueve en la trayectoria $p(t) = (1+t^2,2t^2)$ ¿que distancia recorre entre $t=1$ y $t=3$?

$v(t) = (2t,4t)$ así que $|v(t)| = \sqrt{4t^2+16t^2} = 2\sqrt{5}\,|t|$

y la distancia es $\int_1^3 |v(t)|\,dt = \int_1^3 2\sqrt{5}\,t = \sqrt{5}\,t^2\Big|_1^3 = 8\sqrt{5}$

Ejercicio. Una partícula se mueve en la trayectoria $p(t) = (t,t^2)$ ¿que distancia recorre entre $t=0$ y $t=1$?

$p'(t) = (1,2t)$ así que $|p'(t)| = \sqrt{1+4t^2}$ y la distancia recorrida es la integral

$$\int_0^1 |p'(t)|\,dt = \int_0^1 |(1,2t)|\,dt = \int_0^1 \sqrt{1+4t^2}\,dt$$

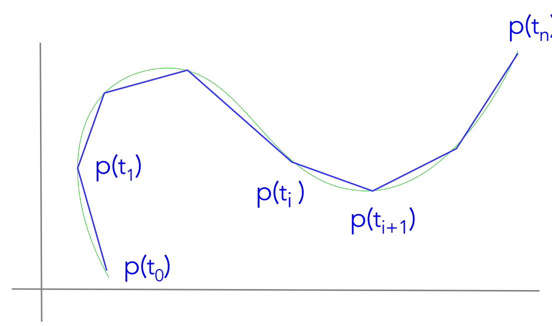
¿pueden calcular esta antiderivada? Uno de sus compañeros la calculó:

$$\int \sqrt{1+4t^2}\,dt = \tfrac{1}{2}\,t\sqrt{1+4t^2} + \tfrac{1}{4}\ln\left[2t+\sqrt{1+4t^2}\,\right] + c$$

así que la distancia recorrida es $\tfrac{1}{2}\sqrt{5} + \tfrac{1}{4}\ln[2+\sqrt{5}]$

Longitud de una curva.

La longitud de una curva suave puede aproximarse usando poligonales que unan puntos cercanos.
Si una curva esta parametrizada por la función $p(t)=(x(t),y(t))$ para $a\le t\le b$



El segmento de recta entre los puntos $p(t_i)$ y $p(t_{i+1})$ es $\sqrt{[x(t_{i+1})-x(t_i)]^2+[y(t_{i+1})-y(t_i)]^2}$

así que si $a=t_0<t_1< \dots <t_n=b$ la longitud de la poligonal es

$$\sum_{i=1}^{i=n} \sqrt{[x(t_{i+1})-x(t_i)]^2+[y(t_{i+1})-y(t_i)]^2}$$

Si la curva es suave las funciones $x(t)$ y $y(t)$ son derivables y por el teorema del valor medio para cada i existen t_i' y t_i'' tales que

$$x(t_{i+1})-x(t_i) = x'(t_i')\,(t_{i+1}-t_i) \quad \text{y} \quad y(t_{i+1})-y(t_i) = y'(t_i'')\,(t_{i+1}-t_i)$$

así que la suma se puede escribir

$$\sum_{i=1}^{i=n} \sqrt{[x'(t_i')]^2+[y(t_i'')]^2}\;(t_{i+1}-t_i)$$

y la longitud de la curva debe ser el límite cuando el tamaño de los segmentos tiende a 0, que es la integral

$$\int_a^b \sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}\,dt \quad \text{o sea} \quad \int_a^b |p'(t)|\,dt$$

Ejemplo. El semicírculo de radio r, puede parametrizarse como $p(t)=(r\cos(t),r\mathrm{sen}(t))$ para $0\leq t\leq 2\pi$.

$p(t)=(-r\mathrm{sen}(t),a\cos(t))$ y $|p'(t)| = \sqrt{r^2\mathrm{sen}^2(t)+r^2\cos^2(t)} = r$

así que la longitud del semicírculo es la integral $\int_0^\pi |p'(t)|\,dt = \int_0^\pi r\,dt = rt\Big|_0^\pi = \pi r$

También podríamos parametrizar al semicírculo como $p(t) = (t,\sqrt{r^2-t^2})$ para $-r\leq t\leq r$.

$p'(t) = (1,-\frac{r^2}{\sqrt{r^2-t^2}})$ y $|p'(t)| = \sqrt{1+\frac{t^2}{r^2-t^2}} = \frac{r^2}{\sqrt{r^2-t^2}}$ y la longitud del semicírculo es

$$\int_{-r}^{r} |p'(t)|\,dt = \int_{-r}^{r} \frac{r^2}{\sqrt{r^2-t^2}}\,dt = \int_{-r}^{r} \frac{1}{\sqrt{1-(t/r)^2}}\,dt = r\,\mathrm{arcsen}(t/r)\Big|_{-r}^{r} = r\,[\pi/2-(-\pi/2)] = \pi\, r$$

Ejercicio. ¿Cual es la longitud del arco de la curva $y=\ln(x)$ entre $x=1$ y $x=2$?

Si la parametrizamos como $p(t) = (1,1/t)$ entonces $v(t) = p'(t) = (1,1/t)$ así que $|p'(t)| = \sqrt{1+1/t^2}$ y la distancia que recorre es

$\int_1^2 |p'(t)|\,dt = \int_1^2 \sqrt{1+1/t^2}\,dt = ?$ *y el problema es hallar una antiderivada de esta función! (es difícil, pueden verla en* https://wims.univ-cotedazur.fr/wims/wims.cgi *)*

Ejemplo. ¿Cual es el perímetro de la elipse $x^2+{}^1/_4\,y^2 =1$? Podemos parametrizar a la elipse como $p(t)=(\cos(t),2\mathrm{sen}(t))$ para $0\leq t\leq 2\pi$, así que $p'(t)=(-\mathrm{sen}(t),2\cos(t))$ y el perímetro es

$$\int_0^{2\pi} |p'(t)|\,dt = \int_0^{2\pi} |(\mathrm{sen}(t),2\cos(t))|\,dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{\mathrm{sen}^2(t)+4\cos^2(t)}\,dt = ?$$

Resulta que la función $\sqrt{\mathrm{sen}^2(t)+4\cos^2(t)}$ no tiene una antiderivada elemental, así que ninguna combinación de las funciones conocidas sirve.

Y aunque podemos reescribir la función de muchas maneras, por ejemplo como $\sqrt{1+3\cos^2(t)}$ o como $\sqrt{4-3\mathrm{sen}^2(t)}$ esto no ayuda a hallar la antiderivada. Esta clase de integrales se llaman *elípticas*.

Problemas

20. Una partícula que se mueve en el plano con velocidad $v(t)=(\mathrm{sen}(3t),\cos(3t))$.
   a. ¿Cual es su aceleración en el instante t?
   b. ¿Cual es su posición en el instante t si en el instante 0 pasa por el punto (1,2)?
   c. ¿Que distancia recorre entre $t=0$ y $t=\pi$?

21. La posición de una partícula que se mueve en el plano está dada por $p(t)=(t^2-4t,2t-3)$.
   a. Calcula su velocidad y su rapidez en el instante t.
   b. ¿En que momentos se mueve en dirección vertical? ¿Y en dirección horizontal?
   c. ¿En que momento se mueve mas lentamente?
   d. ¿Que distancia recorre entre t=1 y t=3?

22. Calcula las longitudes de estas curvas

a. $y=x^{3/2}$ para $0 \leq x \leq 3$ b. $y=x^2$ para $0 \leq x \leq 5$

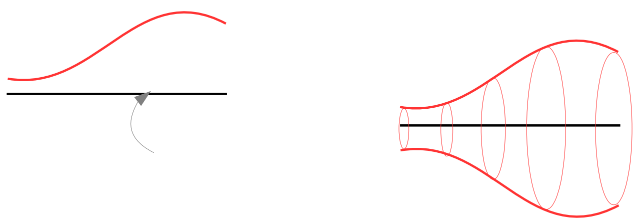
23. Esboza la espiral $p(t)=(t\cos(t), t\,\text{sen}(t))$ para $0 \leq t \leq 2\pi$
Calcula la longitud de ese pedazo de la espiral.

24. ¿Que integrales habría que calcular para obtener las longitudes de estas curvas?

a. $y=1/x$ para $1 \leq x \leq 10$ b. $x=\text{sen}(y)$ para $-\pi \leq y \leq \pi$ c. $y^3=x^2$ para $1 \leq x \leq 2$

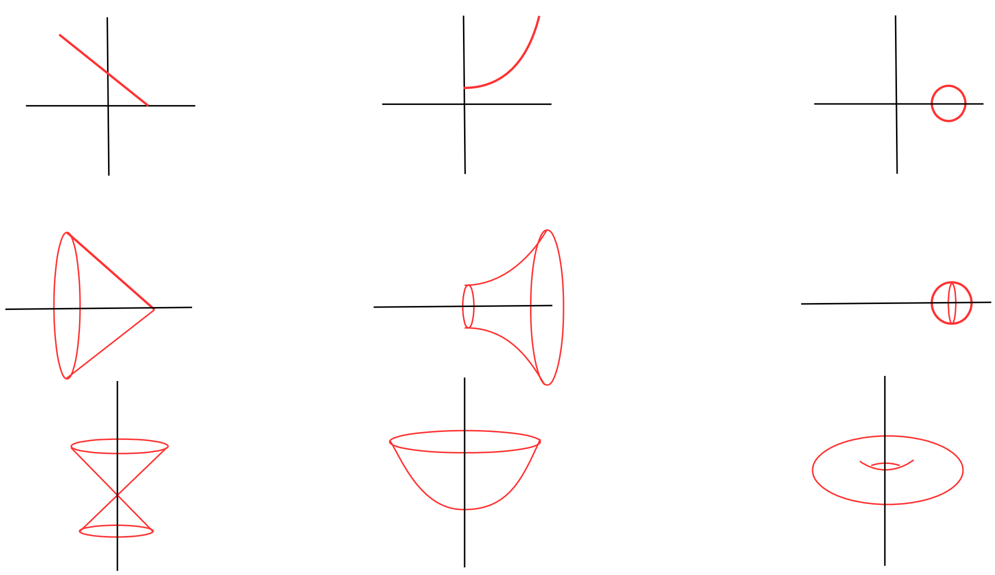
Areas y volúmenes de las superficies y sólidos de revolución.

Si tomamos una curva C en un plano y lo rotamos alrededor de una recta, la curva C barre una superficie en el espacio:



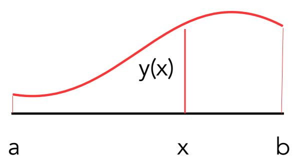
A las superficies que se obtienen de este estas se les conoce como **superficies de revolución**, y las regiones del espacio encerradas por ellas son llamadas **sólidos de revolución**.

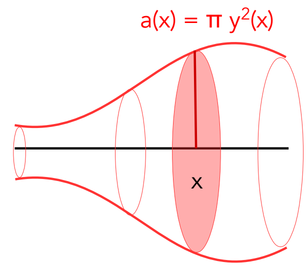
Ejercicio. ¿Como se ven las superficies de revolución obtenidas al rotar estas curvas alrededor del eje x? ¿Y al rotarlas alrededor del eje y?



Queremos calcular las áreas de las superficies de revolución y los volúmenes de los sólidos de revolución alrededor del eje x y vamos a suponer que la curva que los genera no toca al eje x. Empecemos por los volúmenes:

Si podemos escribir la coordenada y de los puntos de la curva como función $y(x)$ de su coordenada x, entonces para cada valor de x tenemos un disco de radio $y(x)$ y el volumen del sólido es la integral de las áreas de los discos:





$$\text{Volumen} = \int_a^b \text{área disco}(x)\, dx = \int_a^b \pi\, y^2(x)\, dx$$

Ejemplo. La esfera de radio r se obtiene rotando la semicircunferencia $y = \sqrt{r^2-x^2}$ alrededor del eje x

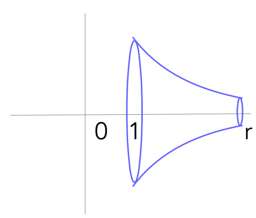
Así que el volumen de la esfera es

$$\int_{-r}^{r} \pi[r^2-x^2]\, dx = \pi[r^2x - 1/3x^3]\Big|_{-r}^{r} = \pi[r^2r - 1/3r^3] = 4/3\pi r^3$$

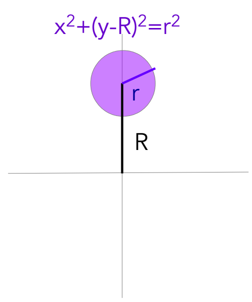
Ejemplo. Al rotar rotar la curva $y=1/x$ alrededor del eje x se obtiene una superficie con forma de campana. ¿Cual es el volumen del sólido encerrado por la campana entre x=1 y x=r ?

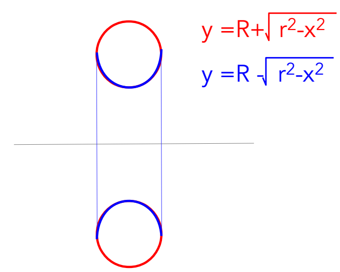
El volumen es

$$\int_1^r \pi(1/x^2)\, dx = -\pi\, 1/x \Big|_1^r = \pi\,(1-1/r)$$



Ejemplo. Calcular el volumen de la dona obtenida al rotar el círculo de radio r con centro en (0,R) alrededor del eje x.





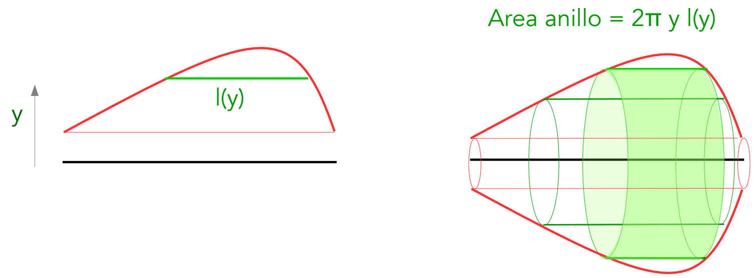
Podemos ver a la dona como un pan relleno (rojo) al que le hacemos un hoyo (azul).
El volumen de la dona es la diferencia entre el volumen rojo y el volumen azul.
Los puntos tienen coordenada x entre -r y r
Los discos rojos tienen radio $r+\sqrt{r^2-x^2}$
y los discos azules tienen radio $r-\sqrt{r^2-x^2}$

Así que el volumen de la dona es

$$\int_{-r}^{r} \pi\,[R+\sqrt{r^2-x^2}\,]^2\, dx - \int_{-r}^{r} \pi\,[R-\sqrt{r^2-x^2}\,]^2\, dx = 4\pi R \int_{-r}^{r} \sqrt{r^2-x^2}\, dx = 2\pi R\,[\,x\sqrt{r^2-x^2} + r^2 \arctan(\frac{x}{\sqrt{r^2-x^2}})\,]\Big|_{-r}^{r} = 2\pi R\,[r^2\,{}^{\pi}/_{2} - r^2(-{}^{\pi}/_{2})] =$$

$$= 2\pi^2 R\, r^2$$

También podemos pensar que un sólido de evolución alrededor del eje x está formado por anillos concéntricos (correspondientes a los distintos valores de y).



Si para cada valor de y los puntos del sólido tienen su coordenada x entre $x_1(y)$ y $x_2(y)$ entonces el ancho de cada anillo es $x_2(y)-x_1(y)$ y el área del anillo es $2\pi\, y\, [x_2(y)-x_1(y)]$ y por lo tanto el volumen del sólido es .

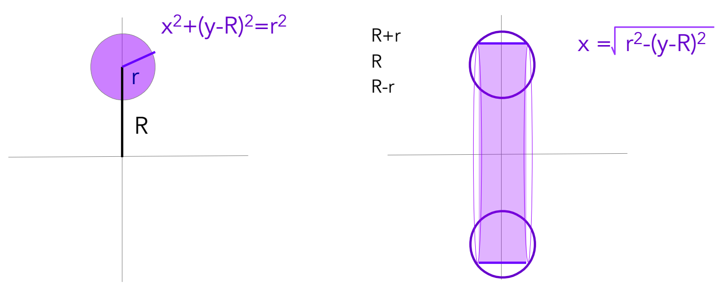
$$\text{Volumen} = \int 2\pi\, y\, [x_2(y)-x_1(y)]\, dy$$

Ejemplo. Calcular el volumen de la esfera de radio r usando anillos. La semicircunferencia $y = \sqrt{r^2-x^2}$ con $-r \le x \le r$ tiene dos valores de x para cada y: $x_1 = -\sqrt{r^2-y^2}$ y $x_2 = \sqrt{r^2-y^2}$ para $0 \le y \le r$.

Así que el volumen de la esfera es

$$\int_0^r 2\pi\, y\, [2\sqrt{r^2-y^2}\,]\, dy = 4\pi \int_0^r y\sqrt{r^2-y^2}\, dy = 4\pi(-1/3)(r^2-y^2)^{3/2}\Big|_0^r = 4/3\pi r^3$$ (lo mismo que obtuvimos usando discos)

Ejemplo. Calcular el volumen de la dona obtenida al rotar el círculo de radio r con centro en (0,R) alrededor del eje x.



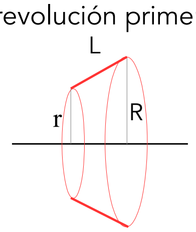
Hay un anillo por cada valor de y entre R-r y R+r. El anillo de radio y tiene ancho $2\sqrt{r^2-(y-R)^2}$

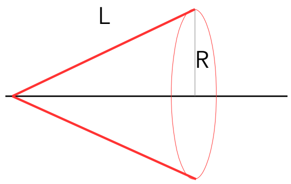
Así que el volumen de la dona es

$$\int_{R-r}^{R+r} 2\pi\, y\, 2\sqrt{r^2-(y-R)^2}\, dy = ?$$

Area de una superficie de revolución.

Para obtener el área de una superficie de revolución primero necesitamos conocer el área de los sectores cónicos.



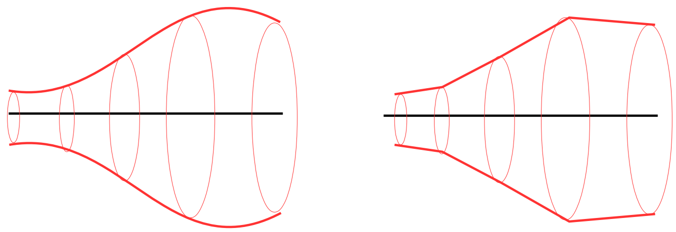


Area del cono = πLR

Area del sector cónico = π L(R+r) = $2\pi(\frac{R+r}{2})L$

que es el área de un anillo de ancho L *y cuyo radio es el promedio entre* R *y* r.

Si la curva es $y=f(x)$ para $a\leq x\leq b$ y rotamos alrededor del eje x, el área superficial es aproximada por la suma de las áreas de sectores cónicos delgados



Si dividimos al intervalo [a,b] en subintervalos $[x_0,x_1]$, $[x_1,x_2]$, ..., $[x_i,x_{i+1}]$,...,$[x_{n-1},x_n]$ y $y_i=y(x_i)$ entonces el área del i-esimo cilindro es

$$\pi(R+r)L = \pi(y_{i+1}+y_i)\sqrt{(x_{i+1}-x_i)^2+(y_{i+1}+y_i)^2}$$

y el área de la unión de los cilindros es

$$\sum_1^n \pi(y_{i+1}+y_i)\sqrt{(x_{i+1}-x_i)^2+(y_{i+1}-y_i)^2} =$$

$$= \sum_1^n 2\pi\ \frac{y_{i+1}+y_i}{2}\sqrt{\frac{(x_{i+1}-x_i)^2+(y_{i+1}-y_i)^2}{(x_{i+1}-x_i)^2}}\ (x_{i+1}-x_i) =$$

$$= \sum_1^n 2\pi\ \frac{y_{i+1}+y_i}{2}\sqrt{1+\frac{(y_{i+1}-y_i)^2}{(x_{i+1}-x_i)^2}}\ (x_{i+1}-x_i)$$

El área de la superficie de revolución es el límite de estas sumas cuando el tamaño de los subintervalos va a 0.

Si la función $y(x)$ es continua entonces $\frac{y_{i+1}+y_i}{2} = y_i'$ para algún y_i' entre y_i y y_{i+1}

y si la función $y(x)$ es derivable entonces $\frac{y_{i+1}-y_i}{x_{i+1}-x_i} = y'(x_i')$ para algún x_i' entre x_i y x_{i+1}

así que podemos escribir la suma como

$$\sum_1^n 2\pi\ y_i'\sqrt{1+[y'(x_i')]^2}\ \ (x_{i+1}-x_i)$$

El límite de esta suma es la integral

$$\text{Area} = \int_a^b 2\pi\ |y(x)|\sqrt{1+y'^2(x)}\,dx$$

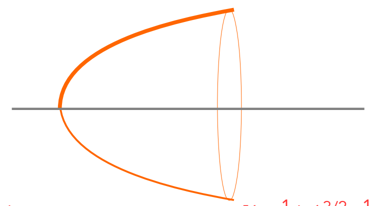
Ejemplo. Para la esfera de radio r, que podemos construir rotando la semicircunferencia $y=\sqrt{r^2-x^2}$ para $-r\leq x\leq r$

se tiene $y'(x) = \frac{-x}{\sqrt{r^2-x^2}}$

y el área superficial es

$$\int_{-r}^{r} 2\pi\sqrt{r^2-x^2}\sqrt{1+\frac{x^2}{r^2-x^2}}\,dx = \int_{-r}^{r} 2\pi\sqrt{r^2-x^2}\sqrt{\frac{r^2}{r^2-x^2}}\,dx = \int_{-r}^{r} 2\pi\, r\,dx = 2\pi r x\Big|_{-r}^{r} = 4\pi r^2$$

Ejercicio. Para el paraboloide de revolución obtenido de girar la rama de parábola $y=\sqrt{x}$ alrededor del eje x, $0\le x\le r$.

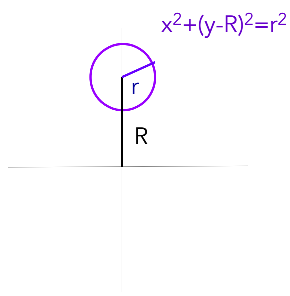


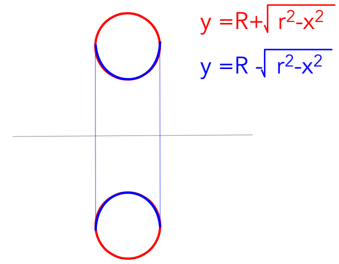
$y'(x) = {}^{-1}/_{2\sqrt{x}}$

El área es

$$\int_0^r 2\pi\sqrt{x}\sqrt{1+({}^1/_{2\sqrt{x}})^2}\,dx = \int_0^r 2\pi\sqrt{x+{}^1/_4}\,dx = {}^4/_3\pi\,(x+{}^1/_4)^{3/2}\Big|_0^r = {}^4/_3\pi\,[(r+{}^1/_4)^{3/2}-{}^1/_8]$$

Ejemplo. Area de la dona obtenida al girar el circulo de radio r y centro en (0,R) alrededor del eje x.





El área superficial de la dona es la suma de las áreas de la superficie exterior (roja) y la superficie interior (azul)

para $y=R+\sqrt{r^2-x^2}$ se tiene $y' = \frac{-x}{\sqrt{r^2-x^2}}$ así que $1+y'^2 = 1+\frac{x^2}{r^2-x^2} = \frac{r^2}{r^2-x^2}$

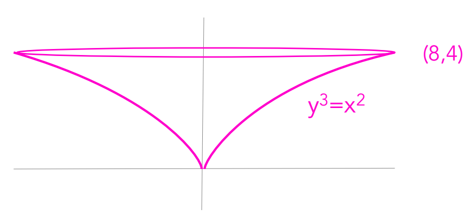
y para $y=R-\sqrt{r^2-x^2}$ se tiene $y' = \frac{x}{\sqrt{r^2-x^2}}$ así que $1+y'^2 = 1+\frac{x^2}{r^2-x^2} = \frac{r^2}{r^2-x^2}$

$$\int_{-r}^{r} 2\pi\,[R+\sqrt{r^2-x^2}\,]\sqrt{\frac{r^2}{r^2-x^2}}\,dx + \int_{-r}^{r} 2\pi\,[R-\sqrt{r^2-x^2}\,]\sqrt{\frac{r^2}{r^2-x^2}}\,dx = 4\pi R\int_{-r}^{r}\sqrt{\frac{r^2}{r^2-x^2}}\,dx = 4\pi R r\int_{-r}^{r}\frac{1}{\sqrt{r^2-x^2}}\,dx = 4\pi R r \arcsen(x/r)\Big|_{-r}^{r}$$

$$= 4\pi R r\,[\pi/2+\pi/2] = 4\pi^2 R r$$

Problemas.

25. Calcula el volumen del sólido que se obtiene al rotar la curva $y^3=x^2$ entre los puntos (0,0) y (8,4) alrededor del eje y.

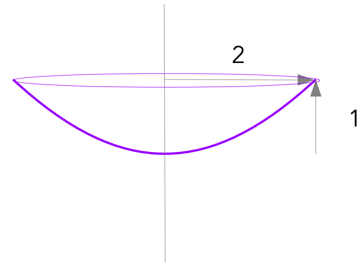


   a. usando discos

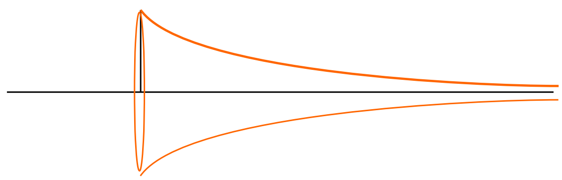
   b. usando anillos

26. Calcula el volumen del sólido que se obtiene al rotar la figura anterior alrededor del eje x. usando anillos de dos formas distintas.
27. Calcula el volumen del elipsoide que se obtiene al rotar la curva $x^2+4y^2=16$ alrededor del eje x
    Calcula el área superficial del elipsoide.

28. ¿Cual es el área de una antena parabólica así?
(Hint: encuentra la ecuación de la parábola)



29. Al girar la curva y=1/x para $1 \le x < \infty$ alrededor del eje x se obtiene una corneta infinita.



a. Muestra que el volumen encerrado por la corneta (para $1 \le x < \infty$) es finito (calcúlalo)

b. Muestra que el área superficial de la corneta es infinita (no hace falta hallar la antiderivada)

Integración numérica

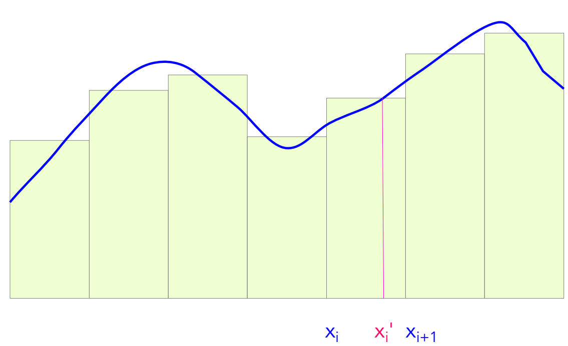
Calcular integrales es fácil si podamos hallar las antiderivadas de las funciones. El problema es que hallar antiederivadas puede ser muy difícil, y en muchos casos no es posible escribirlas en términos de funciones conocidas, porque no son funciones elementales. Para estos casos es importante saber como aproximar los valores de las integrales con la precisión que necesitemos.

Para calcular una integral a partir de la definición primero necesitamos partir el intervalo de integración en subintervalos pequeños, hallar los máximos y mínimos de la función en esos subintervalos y calcular la suma superior y las suma inferior. Estas sumas acotan los valores posibles de la integral y su diferencia acota el error que podemos cometer al usarlas par aproximarla. Pero calcular los máximos y mínimos de la función en los subintervalos no es, en general, ni fácil ni práctico.

Es mucho mas fácil tomar el valor de la función en cualquier punto de cada subintervalo (por ejemplo en el primer punto, o en el ultimo, o en el punto medio) y calcular una suma con estos valores.

Riemann definió la integral de esta manera. Si $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ es una función y P es una subdivisión del intervalo en subintervalos $[x_0,x_1], [x_1,x_2], \ldots, [x_{n-1},x_n]$ que pueden ser de distintas longitudes, definimos la **norma de la partición** como $|P| = \max \{ |x_{i+1}-x_i| \ / \ 0 \le i \le n-1 \}$.

Si p_i' es *cualquier* punto del intervalo $[x_i,x_{i+1}]$ podemos tomar la suma $\sum_{i=0}^{i=n-1} f(x_i')(x_{i+1}-x_i)$ a la que llamamos una **suma de Riemann**, que depende de la partición y de la elección de los puntos en cada subintervalo.



Definimos la **integral de Riemann** de la función f como

$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{|P|\to 0} \sum_{i=0}^{i=n-1} f(x_i')(x_{i+1}-x_i)$ en caso que este límite exista.

Si la función f es continua y los subintervalos son cortos, los valores de la función no deben variar mucho al variar el punto del subintervalo, y los valores máximo y mínimo de f en el subintervalo deben ser cercanos.

Ejemplo. Podemos estimar el valor de $\ln(5) = \int_1^5 1/x\,dx$ dividiendo el intervalo [1,5] en 4 intervalos de longitud 1.

Si tomamos los valores máximos de 1/x en cada intervalo queda

$\ln(5) = \int_1^5 1/x\,dx \le \sum_{i=1}^{i=4} {}^1/_i\,(1) = 1+1/2+1/3+1/4 \approx 2.08333...$

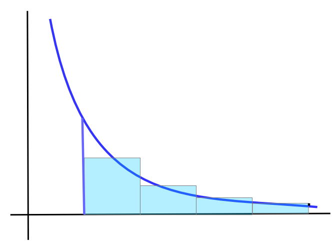
Si tomamos los valores mínimos de 1/x queda

$\ln(5) = \int_1^5 1/x\,dx \ge \sum_{i=1}^{i=4} {}^1/_{i+1}\,(1) = 1/2+1/3+1/4+1/5 \approx 1.28333...$

Así que 1.28333... < ln(5) < 2.08333... que es una aproximación muy mala...

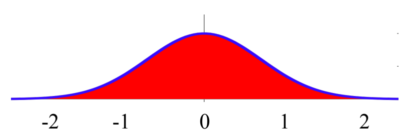
Y si tomamos el punto medio de cada intervalo queda

$\ln(5) = \int_1^5 1/x\,dx \approx \sum_{i=1}^{i=4} {}^2/_{2i+1}\,(1) = 2/3+2/5+2/7+2/9 \approx 1.57460...$



Ejercicio. Estimar el valor de $\int_{-2}^{2} 1/e^{x^2}\,dx$ usando los puntos medios de rectángulos de base 1.

$\int_{-2}^{2} 1/e^{x^2}\,dx \approx 1/e^{-1.5^2}+1/e^{-0.5^2}+1/e^{0.5^2}+1/e^{1.5^2} \approx$



¿Que tan grande puede ser el error si aproximamos la integral $\int_a^b f(x)\,dx$ con una suma $\sum f(p_i')(p_i-p_{i-1})$ para alguna partición de [a,b] ?
El error depende de que tanto varíe la función f en cada subintervalo. Si la función f es continua en el intervalo [a,b] entonces f es uniformemente continua en [a,b] y por lo tanto para cada ε>0 existe una δ>0 tal que en cada subintervalo de longitud a lo mas δ la función f varía menos que ε.
Por lo tanto el error en el cálculo de la integral en cada intervalo de longitud d<δ es a lo mas dε y el error en el cálculo de la integral en el intervalo [a,b] es a lo mas (b-a)ε.
Así que el error al calcular la integral usando sumas de Riemann se aproxima a 0 cuando la norma de la partición se aproxima a 0. Hallar la δ correspondiente a cada ε puede ser muy engorroso, pero es mas fácil de hacer si f es derivable.

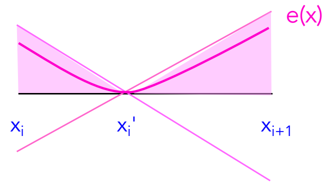
Estimar la integral $\int_a^b f(x)dx$ usando sumas de Riemann corresponde a aproximar la función f(x) por una función *escalonada* a(x) que es constante en cada subintervalo. y aproximar $\int f(x)\,dx$ con $\int a(x)\,dx$.

El error al aproximar la integral de $f(x)$ con la integral de $a(x)$ es la integral del error $e(x)=f(x)-a(x)$

Si $f(x)$ es derivable entonces $e(x)$ es derivable en cada subintervalo, y si elegimos a $e(x)$ como el valor de $f(x)$ en algún punto x_i' del subintervalo entonces $e(x_i')=0$.

¿Bajo estas condiciones, que tan grande puede ser $\int_{x_i}^{x_{i+1}} e(x)\,dx$? Como $e(x_i')=0$ esto depende de que tan grande sea la derivada de $e(x)$, que es igual a la derivada de $f(x)$ porque $a(x)$ es constante en el subintervalo.

Lema. Si $e(x)$ es una función derivable en el intervalo $[x_i,x_{i+1}]$, y sabemos que $e(x_i')=0$ para algún punto y $|e'(x)|\leq M$ para todo punto del intervalo entonces $\left|\int_{x_i}^{x_{i+1}} e(x)\,dx\right| \leq {}^{M}/_{2}\,(x_{i+1}-x_i)^2$.



e(x) está entre las rectas, asi que su integral está acotada por la suma de las áreas de los triángulos

Demostración. $e(x) = e(x_i') + \int_{x_i}^{x} e'(x)\,dx = \int_{x_i}^{x} e'(x)\,dx$ así que

$|e(x)| = \left|\int_{x_i}^{x} e'(x)\,dx\right| \leq \int_{x_i}^{x} |e'(x)|\,dx \leq \int_{x_i}^{x} M\,dx = M\,(x-x_i)$

$\int_{x_i}^{x_{i+1}} |e(x)|\,dx \leq \left|\int_{x_i}^{x_{i+1}} M(x-x_i)\,dx\right| = M\,{}^{1}/_{2}\,(x-x_i)^2\Big|_{x_i}^{x_{i+1}} = {}^{M}/_{2}\,(x_{i+1}-x_i)^2$ •

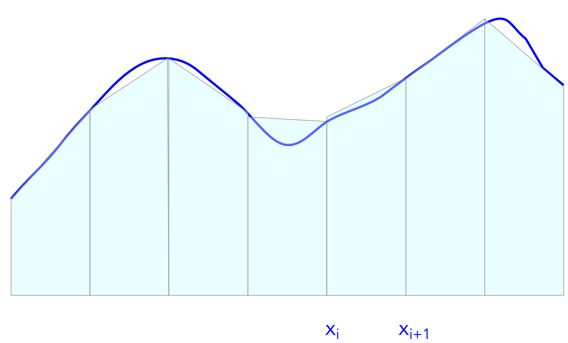
Corolario. Si la función $f(x)$ es derivable en el intervalo $[a,b]$ y $|f'(x)|\leq M$ en todo $[a,b]$ entonces el error al calcular $\int_a^b f(x)\,dx$ usando la suma de Riemann $\sum_{i=0}^{i=n-1} f(x_i')(x_{i+1}-x_i)$ para una partición de $[a,b]$ en intervalos de longitud a lo mas δ es a lo mas ${}^{M}/_{2}|b-a|\delta$.

Demostración.
$\left|\int_a^b e(x)\,dx\right| \leq \int |e(x)|\,dx \leq \sum_{i=0}^{i=n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} |e(x)|\,dx \leq \sum_{i=0}^{i=n-1} {}^{M}/_{2}\,(x_{i+1}-x_i)^2 \leq \sum_{i=0}^{i=n-1} {}^{M}/_{2}\,\delta\,(x_{i+1}-x_i) = {}^{M}/_{2}\,\delta\,(b-a).$ •

Ejemplo. ¿Cual es el error máximo al aproximar $\int_3^7 1/x\,dx$ con la suma $\sum_{1}^{4} 1/x_i$ con x_i en el i-esimo intervalo?
La derivada de $f(x)=1/x$ es $f'(x)=-1/x^2$ así que para $x\geq 3$, $|f'(x)|\leq 1/9$. Y usamos intervalos de longitud ⍰=1
Así que el error es a lo mas ${}^{1/9}/_{2}\,(7-3)\,1 = {}^{2}/_{9}$

Si queremos calcular $\int_3^7 1/x\,dx$ con error menor que ${}^{1}/_{100}$ basta que ${}^{1/9}/_{2}\,(5-1)\,\delta < {}^{1}/_{100}$ o sea $\delta < {}^{9}/_{200} \approx 0.045$

Una mejor manera de aproximar la integral con sumas es usando áreas de trapecios en lugar de rectángulos. Esto corresponde a aproximar la integral de la función $f(x)$ con la integral de una función $l(x)$ que es *lineal por pedazos* (lineal en cada subintervalo).

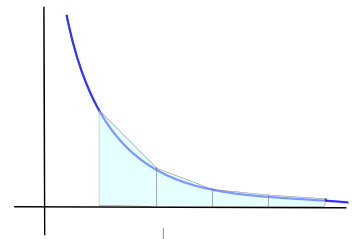


$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \sum_{i=0}^{i=n-1} \frac{f(x_i)+f(x_{i+1})}{2}\,(x_{i+1}-x_i)$$

Si los intervalos son de la misma longitud, $(x_{i+1}-x_i)=(b-a)/n$ y la suma se puede escribir como

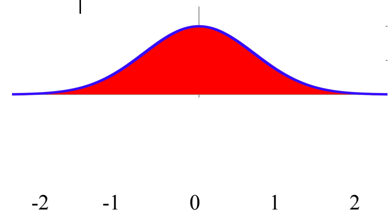
$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{2n}\,[f(x_0)+2f(x_1)+2f(x_2)+\ldots+2f(x_{n-1})+f(x_n)]$$

Ejemplo. Podemos estimar el valor de $\ln(5) = \int 1/x\, dx$ dividiendo el intervalo $[1,5]$ en 4 subintervalos iguales y tomando un trapecio sobre cada intervalo.



$$\int_1^5 1/x\, dx \approx \sum_{i=1}^{i=4} \frac{1/i + 1/i+1}{2}(1) = \sum_{i=1}^{i=4} \frac{2i+1}{2i(i+1)}(1) = 3/4+5/12+7/24 \approx 1.57460..$$

Ejercicio. Estimar el valor de $\int_{-2}^{2} 1/e^{x^2}\, dx$ usando trapecios de base 1.

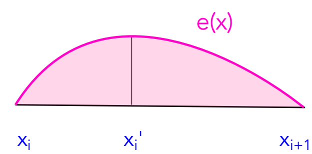


$$\int_{-2}^{2} 1/e^{x^2}\, dx \approx 4/2\,[1/e^{-2^2}+2/e^{-1^2}+2e^{0^2}+2/e^{1^2}+2/e^{2^2}\,] \approx$$

El error al aproximar la integral de $f(x)$ con la integral de $l(x)$ es la integral de la diferencia $e(x)=f(x)-l(x)$. Observar que $e(x_{i+1})=e(x_i)=0$ y que $e''(x) = f''(x)$ ya que como $l(x)$ es lineal $l''(x)=0$.

Lema. Si $e(x)$ es una función dos veces derivable en el intervalo $[x_i,x_{i+1}]$ con $e(x_i)=e(x_{i+1})=0$ y $|e''(x)|\leq M$ para todo punto del intervalo entonces

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} e(x)\, dx \leq {}^{M}/_{6}\, (x_{i+1}-x_i)^3.$$



Demostración. Como $e(x)$ es derivable y $e(x_i)=e(x_{i+1})=0$ entonces por el teorema del valor medio existe un punto x_i' del intervalo tal que $e'(x_i')=0$. Por lo tanto $e'(x) \leq M\,|x-x_i'|$

entonces $e(x) = e(x_i) + \int_{x_i}^{x} e'(x)\, dx \leq 0 + \int_{x_i}^{x} M\,|x-x_i'|\, dx \leq {}^{M}/_{2}\,(x-x_i)^2$

así que $\int_{x_i}^{x_{i+1}} e(x)\, dx \leq \int_{x_i}^{x_{i+1}} {}^{M}/_{2}\,(x-x_i)^2\, dx = {}^{M}/_{2} \cdot {}^{1}/_{3}\,(x_{i+1}-x_i)^3$ •

Corolario. Si la función $f(x)$ es dos veces derivable en el intervalo $[a,b]$ y $|f''(x)|\leq M$ en todo $[a,b]$ entonces entonces el error al calcular $\int_a^b f(x)\, dx$ usando la suma de las áreas de los trapecios $\sum^{n} \frac{f(x_{i+1})+f(x_i)}{2}\,(x_{l+1}-x_l)$ para una partición de $[a,b]$ en intervalos de longitud a lo mas δ es a lo mas ${}^{M}/_{6}\,|b-a|\,\delta^2$.

Demostración. El valor absoluto del error es a lo mas

$$\int_a^b |e(x)|\, dx \leq \sum_{i=1}^{l=n} \int_{x_i}^{x_{i+1}} |e(x)|\, dx \leq \sum_{i=1}^{l=n} {}^{M}/_{6}\,(x_{i+1}-x_i)^3 \leq \sum_{i=1}^{l=n} {}^{M}/_{2}\,\delta^2\,(x_{i+1}-x_i) = {}^{M}/_{6}\,\delta^2\,(b-a).$$ •

Ejemplo. ¿Cual es el error máximo al aproximar $\ln({}^{7}/_{3}) = \int_3^7 1/x\, dx$ como $\frac{7-3}{2}[1/3+2\cdot1/4+2\cdot1/5+2\cdot1/6+1/7]$?

Como usamos intervalos de longitud $\delta=1$ y la derivada de $f(x)=1/x$ es $f'(x)=-1/x^2$ de modo que para $x\geq3$, $|f'(x)|\leq1/9$.

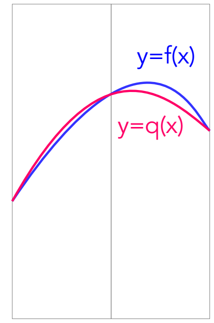
el error es a lo mas ${}^{1/9}/_{6}\,(7-3)\,1 = {}^{2}/_{27}$

Si queremos calcular $\ln({}^{7}/_{3})$ con error menor que ${}^{1}/_{100}$ basta que ${}^{1/9}/_{6}\,(5-1)\,\delta^2 < {}^{1}/_{100}$ o sea $\delta < \sqrt{{}^{27}/_{200}} \approx 0.367$

y basta usar intervalos de longitud $1/3$.

Ejercicio. ¿De que ancho hay que elegir los trapecios para estimar el valor de $\int_{-3}^{3} 1/e^{x^2}\, dx$ con un error menor que ${}^{1}/_{100}$?

La regla de Simpson



Hay una manera mucho mejor de estimar el valor de la integral de una función $f(x)$, aproximándola en cada intervalo con una función cuadrática $q(x)$.

Para esto tenemos que ver que por 3 puntos no alineados del plano pasa una parábola con eje vertical y ver como calcular el área debajo de a parábola en términos de los 3 puntos.

Lo haremos para 3 puntos a la misma distancia horizontal, que es caso el mas sencillo y mas útil.

La parábola vertical tiene ecuación $y=Ax^2+Bx+C$ Si los puntos son $(-1,a)$, $(0,b)$ y $(1,c)$ entonces se debe cumplir

$a=A(-1)^2+B(-1)+C$	$a=A-B+C$	$2A=a+c-2b$	$A=a/2+c/2-b$
$b=A(0)^2+B(0)+C$	$b=C$	$C=b$	
$c=A(1)^2+B(1)+C$	$c=A+B+C$	$2B=c-a$	$B=c/2-a/2$

así que si hay una única función cuadrática cuya gráfica (que es una parábola) pasa por los 3 puntos

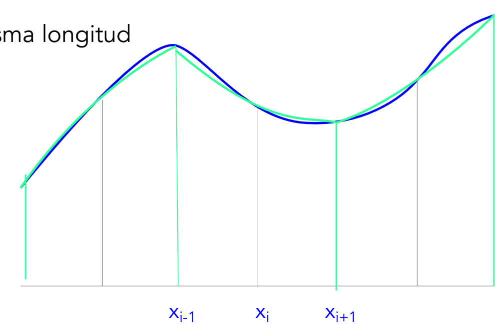
Y el área debajo del arco de parábola es

$$\int_{-1}^{1} Ax^2+Bx+C\,dx = 1/3Ax^3+1/2Bx^2+Cx\,\Big|_{-1}^{1} = 2/3A+2C = a/3+c/3 -2/3b+2b = a/3+4/3b+c/3 = 1/3\,[a+4b+c]$$

así que podemos calcular el área usando las alturas de los puntos.

Cuando los puntos no son $(-1,a)$, $(0,b)$ y $(1,c)$ sino 3 puntos a distancia horizontal d la parábola se obtiene estirando y trasladando esta, así que su área es $d/3[a+4b+c]$

Así que si si dividimos al intervalo [a,b] en parejas de intervalos de la misma longitud

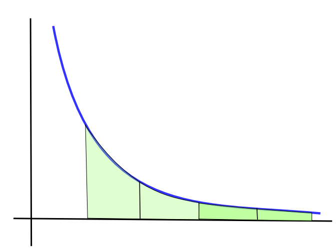


$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \sum_{\text{I impar}} \frac{f(x_{i-1})+4f(x_i)+f(x_{i+1})}{3}\,(x_{i+1}-x_{i-1})$$

y si los intervalos son de longitud $b-a/n$, se puede escribir

$$\int f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{3n}\,[f(x_0)+4f(x_1)+2f(x_2)+4f(x_3)+2f(x_2)+\ldots+4f(x_{n-1})+f(x_n)]$$

Ejemplo. Podemos estimar el valor de $\ln(5) = \int_1^5 1/x\,dx$ dividiendo el intervalo $[1,5]$ en 4 subintervalos iguales y tomando una parábola para cada par de intervalos.



$$\int_1^5 1/x\,dx = \frac{5-1}{3\cdot 4}[1/1+4\cdot 1/2+2\cdot 1/3+4\cdot 1/4+1/5] = \frac{1}{3}\,(73/15) \approx 1.6222\ldots$$

Ejercicio. Estimar el valor de $\int_{-2}^{2} 1/e^{x^2}\,dx$ usando 3 parábolas.

Problemas.

30. Estima numéricamente el valor de las integrales dividiendo en intervalos de longitud 1/2, usando trapecios y usando parábolas y compáralos con su valor exacto.

a. $\int_{-1}^{1} e^{-x}\,dx$

b. $\int_{0}^{3} \sqrt{x+1}\,dx$

31. Estima numéricamente el valor de $\int_{0}^{1} \frac{1}{x^3+1}\,dx$ usando 4 trapecios con la misma base y di que tan grande puede ser el error.

32. Estima numéricamente el valor de $\int_{0}^{2} \operatorname{sen}(x^2)\,dx$ usando 2 parábolas.

33. Si $f(x)$ es una función derivable con $f(1)=0$ y $-2<f'(x)<3$

a. ¿Cual es el menor y el mayor valor posible para $f(x)$?

b. ¿Cual es el menor y el mayor valor posible para $\int_{-1}^{2} f(x)\,dx$?

34. Explica si puede existir o no una función derivable $f:(0,1) \to \mathbf{R}$ tal que ...

a. f esta acotada pero f' no esté acotada.

b. f no esta acotada pero f' si esté acotada.

c. f y f' están acotadas pero f'' no esta acotada.

Integrales impropias

La definición de integral usando sumas superiores e inferiores sirve para intervalos cerrados y suponiendo que la función está acotada para que los supremos e ínfimos existan. La integral de Riemann no requiere que la función esté acotada, pero si que el intervalo de integración lo sea, para que las sumas sean finitas.
Pero a veces necesitamos calcular integrales de funciones no acotadas o sobre intervalos que no lo son.
Estas **integrales impropias** pueden definirse como límites de integrales de funciones acotadas sobre intervalos cerrados, por ejemplo para una función $f(x)$ definida para $x \geq a$ definimos

.

$\int_{a}^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{r\to\infty} \int_{a}^{r} f(x)\,dx$ si el límite existe, y si no diremos que la integral no existe (o que no converge).

Y si la función $f(x)$ está definida para $a<x\leq b$ definimos

$\int_{a}^{b} f(x)\,dx = \lim_{r\to a^+} \int_{r}^{b} f(x)\,dx$ en caso de que el límite exista.

Ejemplo. $\int_{1}^{\infty} 1/x^{-2}\,dx = \lim_{r\to\infty} \int_{1}^{r} 1/x^2\,dx = \lim_{r\to\infty} -1/x \Big|_{1}^{r} = \lim_{r\to\infty} -1/r + 1/1 = 1$

Ejemplo. $\int_{0}^{1} 1/\sqrt{x}\,dx = \lim_{r\to 0^+} \int_{r}^{1} 1/\sqrt{x}\,dx = \lim_{r\to 0^+} 2\sqrt{x} \Big|_{r}^{1} = \lim_{r\to 0^+} 2\sqrt{1} - 2\sqrt{r} = 2$

Ejercicio. Calcular $\int_1^\infty \ln(x)\,dx$

$$\int_1^\infty \ln(x)\,dx = \lim_{r\to\infty} \int_1^r \ln(x)dx = \lim_{r\to\infty} x\cdot\ln(x)-x \Big|_1^r = \lim_{r\to\infty} r\cdot\ln(r)-r-(1\cdot 0-0) = \lim_{r\to\infty} r\cdot(\ln(r)-1) = \infty$$

Ejemplo. ¿Cuanto vale $\int_0^\infty \cos(x)\,dx$?

$$\int_0^\infty \cos(x)\,dx = \lim_{r\to\infty} \int_0^r \cos(x)\,dx = \lim_{r\to\infty} \operatorname{sen}(x) \Big|_0^r = \lim_{r\to\infty} \operatorname{sen}(r) - \operatorname{sen}(0)$$

pero $\lim_{r\to\infty} \operatorname{sen}(r)$ no existe (porque $\operatorname{sen}(r)$ oscila entre -1 y 1) así que la integral impropia no existe.

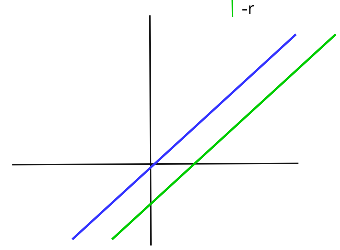
Al integrar en intervalos abiertos por los dos lados hay que tener mas cuidado. Puede parecer natural definir $\int_{-\infty}^\infty f(x)\,dx = \lim_{r\to\infty} \int_{-r}^r f(x)\,dx$ pero esta definición produce resultados raros

Ejemplo. ¿Cuanto vale $\int_{-\infty}^\infty x\,dx$? ¿y $\int_{-\infty}^\infty x-1\,dx$?

$$\lim_{r\to\infty} \int_{-r}^r x\,dx = \lim_{r\to\infty} x^2 \Big|_{-r}^r = r^2 - r^2 = 0$$ mientras que $$\lim_{r\to\infty} \int_{-r}^r x-1\,dx = \lim_{r\to\infty} x^2 - x \Big|_{-r}^r = r^2 - r - (r^2 + r) = -\infty$$

Pero $\int_{-\infty}^\infty x\,dx$ y $\int_{-\infty}^\infty x-1\,dx$ *deberian* ser iguales,

porque solo difieren por un cambio de variable.



Este problema se resuelve definiendo la integral impropia

$$\int_{-\infty}^\infty f(x)\,dx = \lim_{r,s\to\infty} \int_{-r}^s f(x)\,dx$$ si el límite existe. Si no diremos que la integral no existe (o que no converge)

Ejemplo. ¿La integral $\int_{-\infty}^\infty 2x/1+x^2\,dx$ converge?

$$\lim_{r,s\to\infty} \int_{-r}^s 2x/1+x^2\,dx = \lim_{r,s\to\infty} \ln(1+x^2) \Big|_{-r}^s = \lim_{r,s\to\infty} \ln(1+s^2) - \ln(1+r^2)$$

y este límite no existe (aunque si hacemos $r=s$ la resta es 0)

Ejercicio. ¿La integral $\int_{-1}^1 1/1+x^2\,dx$ converge?

$$\lim_{r,s\to\infty} \int_{-\infty}^\infty 1/1+x^2\,dx = \lim_{r,s\to\infty} \arctan(x) \Big|_{-r}^s = \lim_{s\to\infty} \arctan(s) - \lim_{r\to\infty} \arctan(-r) = \pi/2-(-\pi/2) = \pi$$

Ejercico. ¿La integral $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \tan(x)\,dx$ converge?

$$\lim_{r\to-\pi/2,\, s\to\pi/2} \int_r^s \tan(x)\,dx = \lim_{r\to-\pi/2,\, s\to\pi/2} \ln(\cos(x)) \Big|_r^s = \lim_{s\to\pi/2, r\to-\pi/2} \ln(\cos(s)) - \ln(\cos((r))$$

y este límite no existe (queda ∞-∞).

Problemas.

35. Calcular las siguientes integrales impropias, si es que existen (cuidado con los limites!)

a. $\int_0^1 \ln(x)\, dx$ b. $\int_{-\infty}^{\infty} x e^{-x^2}\, dx$ c. $\int_{-1}^{1} \frac{1}{x^2-1}\, dx$ d. $\int_{-1}^{1} \frac{x}{x^2-1}\, dx$

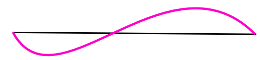
36. ¿Cuales de estas integrales impropias crees que convergen? (no traten de evaluarlas, hagan dibujos)

a. $\int_0^{\infty} \mathrm{sen}(x^2)\, dx$ b. $\int_0^{\infty} \mathrm{sen}(1/x)\, dx$ c. $\int_0^{\infty} \frac{\mathrm{sen}(x)}{x}\, dx$

37. Muestra que $\int_1^{\infty} 1/x^p\, dx < \infty$ para todo real $p>1$ y $\int_1^{\infty} 1/x^p\, dx = \infty$ para todo real $p\leq 1$.

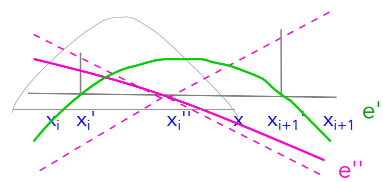
38. Estima numéricamente $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\, dx$ usando la simetría y dos parábolas bien elegidas.

Lema. Si $e(x)$ es una función tres veces derivable en el intervalo $[x_i,x_{i+2}]$ con $e(x_i)=e(x_{i+1})=e(x_{i+2})=0$ y $|d'''(x)|\le M$ para todo punto del intervalo entonces $\int_{x_i}^{x_{i+1}} e(x)\,dx \le {}^M/_{24}\, |x_{i+1}-x_i|^3$.



Demostración. Como $e(x_i)=e(x_{i+1})=e(x_{i+2})=0$ y $d(x)$ es derivable en $[x_i,x_{i+2}]$ entonces por el TVM existen dos puntos del intervalo donde $e'(x_i')=e'(x_{i+1}')=0$. Y como $e'(x)$ es derivable entonces por el TVM existe un punto x_i'' donde $e''(x_i'')=0$.
Como $e'''(x) \le M$ entonces
$e''(x) \le M\,(x-x_i'')$
así que
$e'(x) = e'(x_i') + \int_{x_i'}^{x} e''(x)\,dx \le 0 + \int_{x_i'}^{x} M\,(x-x_i'')\,dx = {}^M/_2\,(x-x_i'')^2 - (x_i'-x_i'')^2.=$

$e''(x) = e''(x_i'') + \int_{x_i''}^{x} e'''(x)\,dx \le 0 + {}^M/_2\,|x-x_i''|^2.$



Ahora $\int_{x_i}^{x} e'(x)\,dx \le \int_{x_i'}^{x} {}^M/_2\,|x-x_i''|^2\,dx = {}^M/_6\,|x-x_i''|^3 \Big|_{x_i'}^{x} =$

$e(x) = e(x_i') + \int e'(x)\,dx \le 0 + {}^M/_6\,|x-x_i''|^3$

$\int_{x_i}^{x_{i+1}} e(x)\,dx \le \int {}^M/_6\,|x-x_i''|^3\,dx = {}^M/_{24}\,|x-x_i''|^4 \Big|_{x_i}^{x_{i+1}} = {}^M/_{24}\,|x-x_i''|^4$

Como $d''(x)$ es derivable y $d(x_i)=d(x_{i+1})=0$ entonces por el teorema del valor medio existe un punto x_I' del intervalo tal que $d'(x_I')=0$.

Problemas

Lema. Una función $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ es integrable con la definición con sumas superiores e inferiores si y solo si es integrable con la definición de Riemann.

Demostración.

Para cada $\varepsilon>0$ existe una partición P de [a,b] tal que $\sum M_i(p_i-p_{i-1}) - \sum M_i(p_i-p_{i-1}) = \sum (M_i-m_i)(p_i-p_{i-1})$