Aproximación de funciones con polinomios.

Los polinomios son algunas de las funciones reales mas simples y pueden usarse para aproximar funciones mas complicadas.

Lema. El valor de un polinomio y de sus derivadas en cualquier punto fijo a determinan al polinomio.

Demostración. Basta ver que los coeficientes pueden obtenerse de los valores del polinomio y sus derivadas en $a=0$.

Si $p(x)=c_0+c_1x+c_2x^2+c_3x^3+c_4x^4+\ldots+c_nx^n$ entonces

$p'(x)= c_1+2c_2x+3c_3x^2+4c_4x^3+\ldots+nc_nx^{n-1}$

$p''(x)= 2\cdot c_2+2\cdot 3\cdot c_3x+3\cdot 4\cdot c_4x^2 +\ldots+(n-1)\cdot n\cdot c_nx^{n-2}$

$p'''(x)= 2\cdot 3\cdot c_3+2\cdot 3\cdot 4\cdot c_4x+\ldots+(n-2)\cdot(n-1)\cdot n\cdot a_nx^{n-3}$

$p^{(k)}(x)= 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot k\ c_k+3\cdot 4\cdot\ldots\cdot(k+1)\cdot c_{k+1}x+\ldots+(n-k+1)\cdot\ldots\cdot(n-1)\cdot n\cdot a_nx^{n-k}$

por lo que $p(0)=c_0$ $p'(0)=c_1$ $p''(0)=2\cdot c_2$ $p'''(0)=2\cdot 3\cdot c_3$ $p^{(4)}(0)=2\cdot 3\cdot 4\cdot c_4$ . . . $p^{(k)}(0)=2\cdot 3\cdot 4\cdot\ldots\cdot k\cdot c_k$

así que $c_k=p^{(k)}(0)/k!$

Para $a\neq 0$, podemos escribir a $p(x)$ como suma de potencias de $x-a$ en vez de suma de potencias de x:

$p(x)=d_0+d_1(x-a)+d_2(x-a)^2+d_3(x-a)^3+d_4(x-a)^4+\ldots+d_n(x-a)^n$

y el mismo argumento muestra que $p(a)=d_0$, $p'(a)=d_1$, $p''(a)=2d_2$, $p'''(a)=2\cdot 3d_3$, ..., $p^{(k)}(a)=2\cdot 3\cdot 4\cdot\ldots\cdot k\cdot d_k$

así que $d_k=p^{(k)}(a)/k!$ •

Ejemplo. Si $p(x) = 3+5x +2x^2 +4x^3 -3x^4$ entonces

	$p(0) = 3$
$p'(x) = 5 +4x +12x^2 -12x^3$	$p'(0) = 5$
$p''(x) = 4 +24x -36x^2$	$p''(0) = 4 = 2\cdot(2)$
$p^{(3)}(x) = 24 -72x$	$p^{(3)}(0) = 24 = 2\cdot 3\cdot(4)$
$p^{(4)}(x) = -72$	$p^{(4)}(0) = 72 = 2\cdot 3\cdot 4\cdot(-3)$
$p^{(5)}(x) = 0$	$p^{(5)}(0) = 0 = 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot(0)$

Ejemplo. ¿Existe un polinomio $p(x)$ tal que $p(0)=2$, $p'(0)=-1$, $p''(0)=-3$, $p'''(0)=0$, $p^{(4)}(0)=4$?

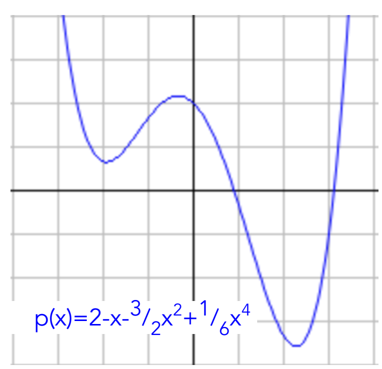
Como la cuarta derivada de $p(x)$ no es 0, el polinomio tiene grado al menos 4.

$p(x)=c_0+c_1x+c_2x^2+c_3x^3+c_4x^4$

$c_0=p(0)=2$ $c_1=p'(0)= -1$ $c_2=p''(0)/2! = -{}^3/_2$ $c_3=p'''(0)/3!=0$ $c_4=p^{(4)}(0)/4!={}^4/_{24}$

así que $p(x)=2-x-{}^3/_2x^2+{}^1/_6x^4$

y este es el único polinomio de grado 4 que cumple las condiciones dadas en 0.



Dada una función derivable $f(x)$ queremos hallar polinomios $f_n(x)$ de grado n que se parezcan lo mas posible a $f_n(x)$ cerca de un punto a. Para eso buscamos polinomios tales que sus valores y los de sus primeras n derivadas coincidan con las de f en el punto a.

Lema. Si $f(x)$ es una función que es n veces derivable en $x=0$, entonces existe exactamente un polinomio $f_n(x)$ de grado a lo mas n tal que $f_n(0)=f(0)$ y $f_n^{(k)}(0)=f^{(k)}(0)$ para $1 \leq k \leq n$

El polinomio es $f_n(x) = \sum \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$.

Los polinomios $f_n(x)$ aproximan a $f(x)$ cerca de $x=0$.

Ejemplo. Si $f(x)=e^x$ entonces $f(x)=e^x$, $f'(x)=e^x$, $f''(x)=e^x$, ... $f^{(k)}(x)=e^x$ por lo que $f(0)=f'(0)=f''(0)=...= f^{(k)}(0)=1$.

Hay una función constante que tiene el mismo valor que e^x en 0:

$f_0(x)=1$

Hay un polinomio de grado 1 que tiene el mismo valor y la misma derivada que e^x en 0:

$f_1(x)=1+x$

Hay un polinomio de grado 2 que tiene el mismo valor y la misma primera y segunda derivadas que e^x en 0:

$f_2(x)=1+x+{}^1/_2x^2$

Hay un polinomio de grado 3 que tiene el mismo valor y la mismas 3 primeras derivadas que e^x en 0:

$f_3(x)=1+x+{}^1/_2x^2+{}^1/_6x^3$

Ejercicio. ¿Habrá un polinomio de grado n que tenga el mismo valor y las mismas n primeras derivadas que e^x

$f_n(x)=1+x+{}^1/_2x^2+{}^1/_{3!}x^3+{}^1/_{4!}x^4+...+{}^1/_{n!}x^n$

Ejemplo. Si f(x)=sen(x) entonces

$f(0)=sen(0)=0$ $f'(0)=cos(0)=1$ $f''(0)=-sen(0)=0$ $f^{(3)}(0)=-cos(0)=-1$ $f^{(4)}(0)=sen(0)=0$ $f^{(5)}(0)=cos(0)=1$

$f^{(6)}(0)=-sen(0)=0$ $f^{(7)}(0)=-cos(0)=-1$ $f^{(8)}(0)=sen(0)=0$ $f^{(9)}(0)=cos(0)=1$ $f^{(10)}(0)=-sen(0)=0$ $f^{(11)}(0)=-cos(0)=-1$

así que

$f_1(x) = x$

$f_2(x) = x$

$f_3(x) = x - {}^1/_{3!}x^3$

$f_4(x) = x - {}^1/_{3!}x^3$

$f_5(x) = x - {}^1/_{3!}x^3 + {}^1/_{5!}x^5$

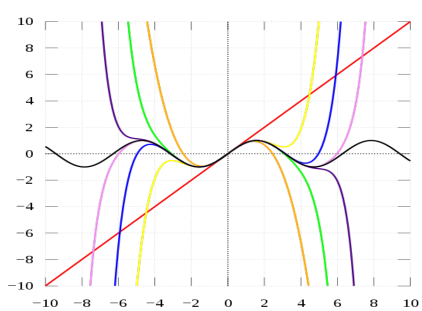
$f_6(x) = x - {}^1/_{3!}x^3 + {}^1/_{5!}x^5$

$f_7(x) = x - {}^1/_{3!}x^3 + {}^1/_{5!}x^5 - {}^1/_{7!}x^7$

$f_8(x) = x - {}^1/_{3!}x^3 + {}^1/_{5!}x^5 - {}^1/_{7!}x^7$

$f_9(x) = x - {}^1/_{3!}x^3 + {}^1/_{5!}x^5 - {}^1/_{7!}x^7 + {}^1/_{9!}x^9$

$f_{11}(x) = x - {}^1/_{3!}x^3 + {}^1/_{5!}x^5 - {}^1/_{7!}x^7 + {}^1/_{9!}x^9 + {}^1/_{11!}x^{11}$



Fuente: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Sintay_SVG.svg

Los polinomios de Taylor de sen(x) se aproximan cada vez mas a la función.

Ejercicio. Para $f(x)=\cos(x)$ calcular $f_0(x), f_2(x), f_4(x), f_6(x), f_8(x), f_{10}(x)$ en 0.

$f_0(x) = 1$

$f_2(x) = 1-\frac{1}{2!}x^2 = 1-\frac{1}{2}x^2$

$f_4(x) = 1-\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{4!}x^4$

$f_6(x) = 1-\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6$

$f_8(x) = 1-\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \frac{1}{8!}x^8$

$f_{10}(x) = 1-\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \frac{1}{8!}x^8 - \frac{1}{10!}x^{10}$

Ejercicio. Si $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$ calcular el quinto polinomio de Taylor de f alrededor de $x=0$

$f_{5,0}(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5$

Si $f(x)$ es una función que es derivable varias veces en un punto a, podemos aproximar a $f(x)$ cerca de a con polinomios escritos como suma de potencias de $x-a$:

$$f_{n,a}(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

donde $f^{(k)}(a)$ es la k-esima derivada de $f(x)$ en a.

Estos son los **polinomios de Taylor** para la función $f(x)$ alrededor de $x=a$.

Ejemplo. Si $f(x) = 1/x$ calcular $f_4(x)$ alrededor de 1.

$$f_{4,1}(x) = f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{f^{(2)}(1)}{2!}(x-1)^2 + \frac{f^{(3)}(1)}{3!}(x-1)^3 + \frac{f^{(4)}(1)}{4!}(x-1)^4 = 1 +(-1)(x-1) + 2/2!(x-1)^2 + (-6)/3!(x-1)^3 + 24/4!(x-1)^4$$

$$= 1 - (x-1) + (x-1)^2 - (x-1)^3 + (x-1)^4$$

Ejercicio. Si $f(x) =1/x$ calcular $f_4(x)$ alrededor de $x=2$

$f_{4,2}(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}(x-2) + \frac{1}{8}(x-2)^2 - \frac{1}{16}(x-2)^3 + \frac{1}{32}(x-2)^4$

El cálculo de polinomios de Taylor puede ser muy laborioso, pero se facilita si entendemos sus propiedades.

Lema. Si las funciones $f(x)$ y $g(x)$ son n veces derivables en $x=a$ entonces $(f+g)_{n,a}(x) = f_{n,a}(x)+g_{n,a}(x)$

Demostración. Basta ver que los coeficientes de los polinomios en los dos lados son iguales.

El coeficiente del k-esimo término del polinomio de Taylor es el valor de la derivada k-esima en $x=a$ dividido entre k!

Y ya sabemos que las derivadas k-esimas cumplen $(f+g)^{(k)} = f^{(k)}+g^{(k)}$. •

Ejemplo. Si $f(x)=\text{sen}(x)+\cos(x)$ entonces $f_6(x) = (x -\frac{1}{3!}x^3 +\frac{1}{5!}x^5) + (1-\frac{1}{2!}x^2 +\frac{1}{4!}x^4 -\frac{1}{6!}x^6) =$

$$= 1 + x -\frac{1}{2!}x^2 - \frac{1}{3!}x^3 +\frac{1}{4!}x^4+\frac{1}{5!}X^5 -\frac{1}{6!}x^6$$

¿Y como serán los polinomios de Taylor del producto de 2 funciones? ¿Será cierto que $(f\cdot g)_n(x) = f_n(x)\cdot g_n(x)$?

Esto suena falso porque estos polinomios ni siquiera tienen el mismo grado. Para saber como son los polinomios de Taylor de $(f\cdot g)(x)$ necesitamos calcular las derivadas del producto de dos funciones.

Lema. La k-esima derivada del producto de f y g es

$$(f\cdot g)^{(k)} = f^{(k)}\cdot g^{(0)} + k\, f^{(k-1)}\cdot g^{(1)} + \frac{k(k-1)}{2} f^{(k-2)}\cdot g^{(2)} + \frac{k(k-1)(k-2)}{2\cdot 3} f^{(k-3)}\cdot g^{(3)} + \ldots + \frac{k(k-1)}{2} f^{(2)}\cdot g^{(k-2)} + k\, f^{(1)}\cdot g^{(k-1)} + f^{(0)}\cdot g^{(k)}$$

$$= \sum_{i=1}^{k} \frac{k!}{k\text{-}i!\; i!} f^{(k-i)}\cdot g^{(i)}$$

donde las k-esimas derivadas tienen indice$^{(k)}$ y a la función sin derivar tiene indice$^{(0)}$.

Demostración. Calculamos las primeras derivadas de $f\cdot g$ usando la Regla de Leibnitz:

$(f\cdot g)^{(1)} = f^{(1)}\cdot g^{(0)} + f^{(1)}\cdot g^{(1)}$

$(f\cdot g)^{(2)} = f^{(2)}\cdot g^{(0)} + f^{(1)}\cdot g^{(1)} + f^{(1)}\cdot g^{(1)} + f^{(0)}\cdot g^{(2)} = f^{(2)}\cdot g^{(0)} + 2\, f^{(1)}\cdot g^{(1)} + f^{(0)}\cdot g^{(2)}$

$(f\cdot g)^{(3)} = f^{(3)}\cdot g^{(0)} + f^{(2)}\cdot g^{(1)} + f^{(2)}\cdot g^{(1)} + f^{(1)}\cdot g^{(2)} + f^{(2)}\cdot g^{(1)} + f^{(1)}\cdot g^{(2)} + f^{(1)}\cdot g^{(2)} + f^{0)}\cdot g^{(3)} = f^{(3)}\cdot g^{(0)} + 3f^{(2)}\cdot g^{(1)} + 3f^{(1)}\cdot g^{(2)} + f^{0)}\cdot g^{(3)}$

Que se ven "iguales" a las fórmulas para las potencias de $f+g$ donde $f^0 = g^0 = 1$

$(f+g)^1 = f^1 \cdot g^0 + f^0\cdot g^1$

$(f+g)^2 = f^2\cdot g^0 + f^1\cdot g^1 + f^1\cdot g^1 + f^0\cdot g^2 = f^2\cdot g^0 + 2f^1\cdot g^1 + f^0\cdot g^2$

$(f+g)^3 = f^3\cdot g + f^2\cdot g^1 + f^2\cdot g^1 + f^1\cdot g^2 + f^2\cdot g^1 + f^1\cdot g^2 + f^1\cdot g^2 + f\cdot g^3 = f^3\cdot g^0 + 3f^2\cdot g^1 + 3f^1\cdot g^2 + f^0\cdot g^3$

Vamos a demostrar que esto es cierto por inducción (ya lo hicimos para n=1,2 y 3). Para esto supongamos que las fórmulas para $(f\cdot g)^{(n)}$ y $(f\cdot g)^n$ son "iguales" y veamos que las fórmulas para $(f\cdot g)^{(n+1)}$ y $(f\cdot g)^{n+1}$ también son "iguales".

$(f+g)^{(n+1)}$ se obtiene derivando los términos de $(f+g)^{(n)}$. Estos son de la forma $f^{(r)} g^{(s)}$ y su derivada es $f^{(r+1)} g^{(s)} + f^{(r)} g^{(s+1)}$

Y la potencia $(f+g)^{n+1} = (f+g)(f+g)^n$ se obtiene multiplicando los términos de $(f+g)^n$ por $f+g$. Los términos son de la forma $f^r g^s$ y al multiplicarlos por $f+g$ se convierten en $f^{r+1}g^s + f^r g^{s+1}$

Así que las fórmulas siguen siendo "iguales" para $n+1$. Y como el binomio de Newton da la fórmula para las potencias, también da la fórmula para las derivadas. •

Ejemplo. La tercera derivada de $f(x) = \ln(x)\cos(x)$ es $f^{(3)}(x) = (2x^{-3})\cos(x) + 3(-x^{-2})(-\mathrm{sen}(x)) + 3x^{-1}(-\cos(x)) + \ln(x)\mathrm{sen}(x)$

Teorema. Si las funciones $f(x)$ y $g(x)$ son n veces derivables en $x=a$ entonces $(f\cdot g)_n(x)$ se obtiene multiplicando $f_n(x)$ por $g_n(x)$ y descartando los términos de grado mayor que n.

Demostración.

$$(f\cdot g)_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(f\cdot g)^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k$$

mientras que si hacemos el producto y agrupamos los términos del mismo orden queda

$$f_n(x)\cdot g_n(x) = \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{f^{(i)}(a)}{i!} (x-a)^i \right)\left(\sum_{j=1}^{n} \frac{g^{(j)}(a)}{j!} (x-a)^j \right) = \sum_{k=1}^{2n} \left(\sum_{i+j=k} \frac{f^{(i)}(a)}{i!} \frac{g^{(j)}(a)}{j!} \right) (x-a)^k$$

Ahora basta ver que los coeficientes de los términos del mismo grado k son iguales para $k\leq n$, es decir que

$$\frac{(f\cdot g)^{(i)}(a)}{k!} = \sum_{i+j=k} \frac{f^{(i)}(a)}{i!} \frac{g^{(j)}(a)}{j!}$$

y estos son iguales ya que por el lema anterior $(f\cdot g)^{(k)}(a) = \sum_{i+j=k} \frac{k!}{i!\; k\text{-}i!} f^{(k-i)}\cdot g^{(i)}$ •

Ejemplo. Para $f(x) = \operatorname{sen}(x)$ tenemos $f_{6,0}(x) = x - {}^{1}/_{3!}x^3 + {}^{1}/_{5!}x^5$

Para $g(x) = \cos(x)$ tenemos $g_{6,0}(x) = 1 - {}^{1}/_{2!}x^2 + {}^{1}/_{4!}x^4 - {}^{1}/_{6!}x^6$

Entonces para $(f\cdot g)(x) = \operatorname{sen}(x)\cos(x)$ tenemos

$(f\cdot g)_{6,0}(x) =$ *los términos de grado a lo mas 6 de* $(x - {}^{1}/_{3!}x^3 + {}^{1}/_{5!}x^5)(1 - {}^{1}/_{2!}x^2 + {}^{1}/_{4!}x^4 - {}^{1}/_{6!}x^6)$

$= x\cdot 1 + x\cdot(-{}^{1}/_{2!}x^2) + (-{}^{1}/_{3!}x^3)\cdot 1 + x\cdot({}^{1}/_{4!}x^4) + (-{}^{1}/_{3!}x^3)\cdot(-{}^{1}/_{2!}x^2) + ({}^{1}/_{5!}x^5)\cdot 1 +$ términos de grado al menos 7

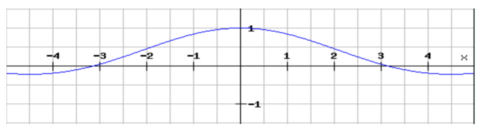
$= x - {}^{4}/_{6}x^3 - {}^{49}/_{120}x^5$

Ejercicio. Calcular el sexto polinomio de Taylor para $h(x)=x\cdot\cos(x)$ en 0

$h_{6,0}(x) = x - {}^{1}/_{2}x^3 + {}^{1}/_{4!}x^5$

Ejercicio. ¿Cual será el sexto polinomio de Taylor para $j(x)=\operatorname{sen}(x)/x$ en 0 ?

$\operatorname{sen}(x)/x$ se extiende a 0 como una función derivable:



$h_{6,0}(x) = 1 - {}^{1}/_{3!}x^2 + {}^{1}/_{5!}x^4 - {}^{1}/_{7!}x^6$

¿Habrá alguna relación entre los polinomios de Taylor de una función f y los de su derivada f' ?

Ejemplo. Para $f(x) = \operatorname{sen}(x)$ tenemos $f_7(x) = x - {}^{1}/_{3}x^3 + {}^{1}/_{5}x^5 - {}^{1}/_{7!}x^7$

Para $g(x) = \cos(x)$ tenemos $g_6(x) = 1 - {}^{1}/_{2}x^2 + {}^{1}/_{4!}x^4 - {}^{1}/_{6!}x^6$

La derivada de $f_7(x)$ es $g_6(x)$ ¿Será casualidad?

Lema. Si la función $f(x)$ es n veces derivable en a entonces los polinomios de Taylor de f en a cumplen

1. $(f_n)'(x) = f'_{n-1}(x)$
2. Si $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ entonces $F_{n+1}(x) = \int_a^x f_n(t)\,dt$

Demostración. Observar que los dos incisos hablan de igualdades entre polinomios

1. $f_n(x) = \sum \frac{f^{(k)}(0)}{k!}(x-a)^k$ así que $(f_n)'(x) = \sum \frac{f^{(k)}(0)}{k-1!}(x-a)^{k-1} = \sum \frac{f^{(k+1)}(0)}{k!}(x-a)^k = f'_n(x)$

2. Como $F(a)=0$ entonces $F_{n+1}(x) = c_1(x-a)+c_2(x-a)^2+c_3(x-a)^3+\ldots+c_{n+1}(x-a)^{n+1}$ para algunas constantes c_1,

así que por el inciso 1, $f_n(x) = c_1+2c_2(x-a)+3c_3(x-a)^2+\ldots+(n+1)c_{n+1}(x-a)^n$

e integrando este polinomio desde a hasta x da $F_{n+1}(x)$. •

Ejemplo.

Una pregunta natural es que tan buenas aproximaciones de una función $f(x)$ dan sus polinomios de Taylor cerca del punto donde se desarrollan los polinomios.

Lema. Si la función $f(x)$ es n veces derivable en $x=a$ entonces la diferencia entre $f(x)$ y $f_n(x)$ se aproxima a cero más rápido que $(x-a)^n$

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f_n(x)}{(x-a)^n} = 0$$

Así que al aproximar a $f(x)$ con $f_n(x)$ para valores de x cada vez mas cercanos a a el error se vuelve tan chico que aún dividido entre $(x-a)^n$ tiende a 0 (el error es del orden de $(x-a)^{n+1}$).

Demostración. El valor de $f_n(x)$ y de sus derivadas en $x=a$ coinciden con el valor de $f(x)$ y sus n primeras derivadas en $x=a$. Así que el valor de $f(x)-f_n(x)$ y de sus n primeras derivadas en $x=a$ en es 0.

Aplicando la regla de L´Hospital n veces obtenemos

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f_n(x)}{(x-a)^n} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)-f'_n(x)}{n(x-a)^{n-1}} = \lim_{x\to a} \frac{f''(x)-f''_n(x)}{n(n-1)(x-a)^{n-2}} = \lim_{x\to a} \frac{f'''(x)-f'''_n(x)}{n(n-1)(n2)(x-a)^{n-3}} = \lim_{x\to a} \frac{f'''(x)-f'''_n(x)}{n(n-1)(n2)(x-a)^{n-3}} = \ldots$$

$$= \lim_{x\to a} \frac{f^{(n)}(x)-f^{(n)}_n(x)}{n!\,(x-a)^{n-n}} = \lim_{x\to a} \frac{0}{n!\,(1)} = 0 \qquad \bullet$$

El lema anterior dice que *en el límite* la aproximación de $f(x)$ dada por $f_n(x)$ es muy buena, pero no dice como es el error (o residuo) $e_n(x) = f(x) - f_n(x)$ en puntos específicos, y esto es crucial para las aplicaciones.

Observar que si la una función $e(x)$ es derivable dos veces y $e(a)=0$ entonces

$e(x) = e(a) + e(x)-e(a) = 0 + \int e'(x)\,dx$ así que $e(x)$ se obtiene integrando $e'(x)$ desde a hasta x.

Ahora recordemos que por construcción $e_n(x) = f(x) - f_n(x)$ y sus primeras n derivadas valen 0 en $x=a$.

Lema. Si una función $e(x)$ es derivable $n+1$ veces y $e(a)=e'(a)=e''(a)= \ldots = e^{(n)}(a)=0$ entonces

1. $e(x)$ se obtiene integrando $n+1$ veces seguidas la función $e^{(n+1)}(x)$ desde a hasta x. .
2. El valor de la integral es $\frac{e^{(n+1)}(x')}{n+1!}(x-a)^{n+1}$ para algún x' entre a y x.

Demostración.

1. Por inducción sobre n. Ya lo probamos para $n=1$, ahora supongamos que es cierto para algún n y veamos que debe ser cierto para $n+1$.

Como $e(x)$ es n veces derivable entonces por hipótesis de inducción $e(x)$ se obtiene integrando $n-1$ veces seguidas la función $e^{(n)}(x)$ desde a hasta x, y (por el caso $n=1$) $e^{(n)}(x) = \int e^{(n+1)}(x)\,dx$.

2. Por el teorema del valor medio $\int e^{(n+1)}(x)\,dx = (x-a)\,e^{(n+1)}(x')$ para algún x\` fijo entre a y x.

Así que integrar $n+1$ veces $e^{(n+1)}(x)$ desde a hasta x es lo mismo que integrar n veces $(x-a)\,e^{(n+1)}(x')$ desde a hasta x, y esto da $\frac{(x-a)^{n+1}}{n+1!}\,e^{(n+1)}(x)$. •

Teorema. (Forma de Lagrange del residuo) Si la función $f(x)$ es derivable $n+1$ veces en el intervalo entre a y x entonces el residuo $f(x)-f_n(x)$ cumple

$$f(x) - f_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(x')}{n+1!}(x-a)^{n+1} \quad \text{para algún } x' \text{ entre } a \text{ y } x.$$

Demostración. El error $e_n(x)=f(x)-f_n(x)$ y sus primeras n derivadas valen 0 en $x=a$ y además (como $f_n(x)$ es de grado n), la $n+1$-ésima derivada de $e_n(x)$ es la $n+1$-esima derivada de $f(x)$, así que el teorema se sigue del lema anterior. •

Ejemplo. Para $f(x) = \text{sen}(x)$ en $x=0$, el residuo $f(x)-f_n(x)$ es $\dfrac{f^{(n+1)}(x')}{n+1!}x^{n+1}$ para algún x' entre 0 y x .

Como todas las derivadas del seno son senos y cosenos, cuyos valores están entre -1 y 1, el residuo es a lo mas $\dfrac{1}{n+1!}x^{n+1}$

Así que el error al aproximar $\text{sen}(1/2)$ con $f_3(1/2)$ es a lo mas $\dfrac{1}{4!}(1/2)^4 \approx 0.002747$

y el error al aproximar $\text{sen}(1/2)$ con $f_5(1/2)$ es a lo mas $\dfrac{1}{6!}(1/2)^6 \approx 0.0000217$

mientras que el error al aproximar $\text{sen}(1)$ con $f_5(1)$ es a lo mas $\dfrac{1}{6!}(1)^6 \approx 0.0013889$

Problemas

1. Encuentra 3 polinomios *distintos* que cumplan $p(0)=1$, $p'(0)=2$, $p''(0)=3$ y grafícalos juntos.

2. Calcula los polinomios de Taylor.

a. $f(x) = e^{-x}$ $\qquad f_{7,1}(x) =$

b. $g(x) = 1/x^2$ $\qquad g_{9,2}(x) =$

c. $h(x) = \tan(x)$ $\qquad h_{5,0}(x) =$

d. $l(x) = \ln(x+1)$ $\qquad l_{8,0}(x) =$

3. Calcula el séptimo polinomio de Taylor alrededor de 0 usando las propiedades o lo que se les ocurra ¡no trabajen de mas!

a. $f(x) = \sqrt{x+2}$

b. $g(x) = \dfrac{x-1}{x+1}$

c. $h(x) = \text{sen}(x^2)$

d. $j(x) = \cos^2(x)$

4. Suponiendo que $f(x)$ es derivable n+1 veces en $x=a$ calcula $\lim_{x\to a}\dfrac{f(x)-f_n(x)}{(x-a)^{n+1}}$

5. Aproxima el valor de $\sqrt{10}$ usando los primeros 4 polinomios de Taylor para la función $f(x) = \sqrt{9+x}$ en 0.

6. a. Calcula el error que se puede cometer al aproximar $\ln(x)$ con el n-esimo polinomio de Taylor en $x=1$.
   b. ¿Que polinomio hay que usar para calcular $\ln(2)$ con un error menor que 1/1000?
   c. ¿Y para calcular $\ln(3)$ con un error menor que 1/1000?

Series de Taylor

Si una función $f(x)$ es infinitamente derivable en $x=a$ podemos calcular todos sus polinomios de Taylor de f estos polinomios son las sumas parciales de una serie infinita:

$$f_T(x) = \sum \frac{f^{(k)}(0)}{k!}(x-a)^k \; .$$

llamada la **Serie de Taylor de** $f(x)$ en a (o alrededor de a , o centrada en a)

No sabemos que $f_T(x)$ defina una función porque no sabemos para cuales valores de x la serie converge.

Ejemplo. La serie de Taylor de e^x en 0 es $1+x+{}^1/_{2!}x^2+{}^1/_{3!}x^3+{}^1/_{4!}x^4 - \ldots + {}^1/_{n!}x^n + \ldots$

Ejercicio: Calcular la serie de Taylor de $\dfrac{1}{x+1}$ en 0

Ejercicio: Calcular la serie de Taylor de $\sqrt{x}$ en 1

Las series de Taylor tienen propiedades muy buenas que ayudan a calcularlas con mas facilidad.

Teorema. Si $f(x)$ y $g(x)$ son funciones infinitamente derivables en x=a entonces sus series de taylor satisfacen

1. $(f+g)_T(x) = f_T(x)+g_T(x)$
2. $(f\cdot g)_T(x) = f_T(x)\cdot g_T(x)$
3. $f'_T(x) = (f_T)'(x)$

Demostración. La serie de Taylor de una función f contiene a todos los polinomios de Taylor de f como segmentos iniciales, y estos segmentos finitos determinan a la serie.

1. La primera igualdad vale para todos los polinomios de Taylor de grado n, así que vale para cualquier cualquier segmento inicial de la serie y por lo tanto vale para la serie.
2. Sabemos que el n-esimo polinomio de Taylor del producto se obtiene del producto de los n-esimos polinomios de Taylor de los factores descartando los términos de grado mayor a n. Así que los segmentos iniciales de las series son iguales y por lo tanto las series son iguales.
3. El n-esimo polinomio de Taylor de $f'(x)$ es la derivada del n+1-esimo polinomio de Taylor de $f(x)$ así que todos los segmentos iniciales de las dos series son iguales.

Ejemplo: La serie de Taylor de e^x es $1+x+{}^1/_{2!}x^2+{}^1/_{3!}x^3+{}^1/_{4!}x^4 - \ldots + {}^1/_{n!}x^n + \ldots$

por lo tanto la serie de Taylor de xe^x es $x+x^2+{}^1/_{2!}x^3+{}^1/_{3!}x^4+{}^1/_{4!}x^5 - \ldots + {}^1/_{n!}x^{n+1} + \ldots$

Ejemplo: Considerar la función $f(x) = \frac{1}{x+1}$ cuya derivada es $f'(x) = \frac{-1}{(x+1)^2}$ y su integral desde 0 es $\int f(x) = \ln(x+1)$

La serie de Taylor de $\frac{1}{x+1}$ en 0 es $1-x+x^2-x^3+x^4-x^5+\ldots+(-1)^n x^n+\ldots$

La serie de Taylor de $\frac{-1}{(x+1)^2}$ en 0 es $-1+2x-3x^2+4x^3-5x^4+\ldots+(-1)^{n+1}(n+1)x^n+\ldots$

Y la serie de Taylor de $\ln(x+1)$ en 0 es $x-{}^1/_2x^2+{}^1/_3x^3-{}^1/_4x^4+{}^1/_5x^5+\ldots+(-1)^n{}^1/_n\,x^{n+1}+\ldots$

Ejercicio: Calcular la serie de Taylor de $(x+1)e^x$ en 0.

Las series de Taylor pueden usarse para hallar funciones con propiedades especiales o hallar soluciones de ecuaciones diferenciales.
Para esto podemos pensar en las series formales (sin preocuparnos de antemano si convergen o) y derivarlas término a termino.

Ejemplo: Hallar la serie de Taylor de una función que sea igual a su derivada.
La serie en 0 debe ser de la forma

$$a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_3x^4+a_5x^5+\ldots+a_nx^n+\ldots$$

la serie de su derivada debe ser la derivada de la serie

$$a_1+2a_2x+3a_3x^2+4a_4x^3+5a_5x^4+\ldots+na_nx^{n-1}+\ldots$$

Si la función es igual a su derivada las dos series deben se iguales, así que los coeficientes deben ser iguales:

$$a_0=a_1 \quad a_1=2a_2 \quad a_2=3a_3 \quad a_3=4a_4 \quad \ldots \quad a_{n-1}=na_n$$

o sea que $a_1=a_0 \quad a_2={}^1/_2\,a_1 \quad a_3={}^1/_3\,a_a \quad a_4={}^1/_4\,a_3 \quad \ldots \quad a_n={}^1/_n\,a_{n-1}$

si elegimos $a_0=1$ entonces $a_1=1 \quad a_2={}^1/_2 \quad a_3={}^1/_{2\cdot3} \quad a_4={}^1/_{2\cdot3\cdot4} \quad a_5={}^1/_{2\cdot3\cdot4\cdot5} \quad a_n={}^1/_{n!}$

y la serie es $1+x+{}^1/_2\,x^2+{}^1/_{3!}\,X^3+{}^1/_{4!}\,x^4+{}^1/_{5!}\,x^5+\ldots+{}^1/_{n!}\,x^n+\ldots$

Ejercicio: Hallar la serie de Taylor de una función $f(x)$ tal que $f'(x)=xf(x)$

Problemas

7. Encuentra las series de Taylor

a. $\cos(-x)$ en $x=0$ b. e^x en $x=2$ c. $\frac{x}{x+1}$ en $x=0$

d. $\sqrt{x}$ en $x=3$ e. $\ln(x-2)$ en $x=0$ f. $\arctan(x)$ en $x=0$

8. Calcula las series de Taylor en x=0 usando las propiedades y pensando en lugar de hacer cuentotas.

a. e^{x^3} b. $(x^2-x)\mathrm{sen}(x)$ c. $\frac{1}{x^2-1}$

9. ¿Puedes adivinar a que funciones corresponden las siguientes series de Taylor?

a. $1-x+x^2-x^3+x^4-x^5+x^6-x^7+ \dots$

b. $1+2x+3x^2+4x^3+5x^4+6x^5+7x^6+8x^7+ \dots +(n+1)x^n+ \dots$

c. $1+x^2+x^4+x^6+ \dots + x^{2n}+ \dots$

d. $x+x^3+x^5+x^7+ \dots + x^{2n+1}+ \dots$

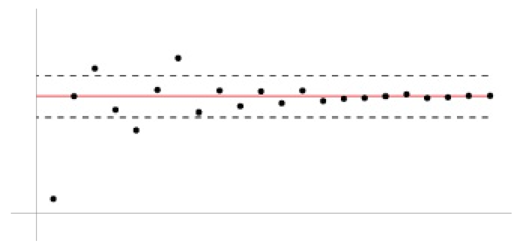
10. Encuentra la serie de Taylor de una función *no exponencial* que sea igual a su tercera derivada.

Series

Para entender para que valores de x las series de Taylor tienen un valor bien definido necesitamos a aprender algunas cosas sobre sucesiones y series mas generales.

Recordemos que una **sucesión** es una lista infinita de números $a_1,a_2,a_3,\dots$ o sea una función de **N** a **R**.

La sucesión **converge** si existe un número a al que los a_n se acercan cada vez mas, en el sentido que para cada $\varepsilon>0$, existe una n_ε tal que $|a_n-a|<\varepsilon$ para toda $n>n_\varepsilon$. En este caso escribimos $\lim_{n\to\infty} a_n = a$



Si los números a_n crecen sin parar en el sentido que para cada N existe una n_ε tal que $a_n>N$ para toda $n>n_\varepsilon$. entonces escribimos $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$.
Muchas sucesiones no tienen ningún límite, sino que oscilan sin enfocarse en ningún valor. En este caso decimos que la sucesión **diverge**. Saber si una sucesión converge o no converge puede ser difícil.

Ejemplos. La sucesión $a_n = n\cdot\text{sen}(n)$ diverge. La sucesión $b_n = n\cdot\text{sen}(1/n)$ converge a 1.

La sucesión $c_n = \cos(n)/n$ converge a 0. La sucesión $d_n = n\cdot\cos(1/n)$ diverge.

Ejemplo. ¿Cual es el límite de la sucesión $a_n= \sqrt[n]{n}$? $a_n= n^{1/n} = e^{\ln(n)/n}$

Veamos primero cual es el limite del exponente. Por L´Hopital, $\lim_{n\to\infty} {}^{\ln(n)}/_{n} = \lim_{n\to\infty} {}^{1/n}/_{1/n^2} = \lim_{n\to\infty} {}^{1}/_{n} = 0$

y como la exponencial es una función continua $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} e^{\ln(n)/n} = e^0 =1$

Para que una sucesión converja es necesario que para cada $\varepsilon>0$, exista una n_ε tal que $|a_n-a_m|<\varepsilon$ para $m,n>n_\varepsilon$ (ya que a partir de algún momento a_m y a_n deben estar a distancia menor que $\varepsilon/2$ del límite a).
A las sucesiones que cumplen esta propiedad se les llama **sucesiones de Cauchy**.

Teorema. Una sucesión converge si y solamente si es una sucesión de Cauchy.

Este teorema permite ver si una sucesión converge sin saber a que converge.

Pueden ver la demostración y mas cosas sobre sucesiones en https://www.matem.unam.mx/~max/calculo1/limites.pdf

Una **serie** es una suma infinita de números $a_1,a_2,a_3,\dots,a_n,\dots$ y se le denota por $a_1+a_2+a_3+\dots+a_n+\dots$ o por $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$

La suma infinita puede tener sentido o no dependiendo de como sean los números $a_1,a_2,a_3, \dots$

Lo que siempre tiene sentido son las sumas finitas $s_n=\sum_{i=1}^{i=n} a_i$. Estas son las **sumas parciales**.de la serie.

Si la sucesión de sumas parciales converge a s, decimos que la serie **converge** y escribimos $\sum_{i=1}^{i=n} a_i = s$.

Si $\lim_{n\to\infty} s_n = \infty$ escribimos $\sum_{i=1}^{\infty} a_i = \infty$.

Y si la sucesión de sumas parciales no converge decimos que la serie **diverge**.

Ejemplo. La serie de potencias de 1/2: $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} = 1/2+1/4+1/8+1/16+1/32+1/64+\dots$

Las primeras sumas parciales son $s_1 = 1/2$ $s_2 = 3/4$ $s_3 = 7/8$ $s_4 = 15/16$ $s_5 = 31/32$ $s_6= 63/64$ . . .

y se puede ver que la n-esima suma parcial es $s_n = \frac{2^n-1}{2^n}$ y como $\lim_{n\to\infty} \frac{2^n-1}{2^n}=1$ la serie converge a 1.

El que una serie converja o diverja no depende de los primeros términos de la serie: podemos cambiar cualquier cantidad finita de términos y eso cambia a las sumas parciales grandes por una constante.

Lema. Si $\lim_{n\to\infty} a_n$ no existe o es distinto de 0 entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge.

Demostración. Si los a_i no se aproximan a 0 entonces las sumas parciales no forman una sucesión de Cauchy y la sucesión no puede converger. •

Al revés no es cierto: que $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ no basta para que la serie converja.

Ejemplo. La *serie armónica* es la suma de los inversos de los números naturales $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1+1/2+1/3+1/4+1/5+1/6+\dots$

Las primeras sumas parciales son $s_1 = 1$ $s_2 = 1.5$ $s_3 = 1.833\dots$ $s_4 = 2.083\dots$ $s_5 = 2.2833\dots$ $s_6= 2.45$

Pero aunque los números $1/n$ se aproximan a 0 la serie armónica diverge:

$$\begin{array}{cccccccccccccccccccccccc}
1/1+ & 1/2+ & 1/3+ & 1/4+ & 1/5+ & 1/6+ & 1/7+ & 1/8+ & 1/9+ & 1/10+ & 1/11+ & 1/12+ & 1/13+ & 1/14+ & 1/15+ & 1/16 & +1/17+ & 1/18+ & 1/19+ & 1/20+ & 1/21+ & 1/22+ & 1/23+ & 1/24+\dots \\
\| & \| & \vee & \| & \vee & \vee & \vee & \| & \vee & \vee & \vee & \vee & \vee & \vee & \vee & \| & \vee & \vee & \vee & \vee & \vee & \vee & \vee & \vee \\
1/1+ & 1/2+ & 1/4+ & 1/4+ & 1/8+ & 1/8+ & 1/8+ & 1/8+ & 1/16+ & 1/16+ & 1/16+ & 1/16+ & 1/16+ & 1/16+ & 1/16+ & 1/16 & +1/32+ & 1/32+ & 1/32+ & 1/32+ & 1/32+ & 1/32+ & 1/32+ & 1/32+\dots
\end{array}$$

$$1 + 1/2 + \underbrace{1/4+1/4}_{1/2} + \underbrace{1/8+1/8+1/8+1/8}_{1/2} + \underbrace{1/16+\dots+1/16}_{1/2} + \underbrace{1/32+\dots+1/32+\dots}_{1/2}$$

$$1 + 1/2 + 1/2 + 1/2 + 1/2 + 1/2$$

así que las sumas parciales eventualmente rebasan a cualquier número natural, por lo que la sucesión diverge a ∞.

Averiguar si una serie converge o no puede ser difícil (y saber a cuanto converge mucho mas).

Ejemplo. ¿La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathrm{sen}(n)}{n}$ converge o diverge?

Vamos a ver algunos criterios que pueden servir para ver si una serie converge o no, empezando por los casos mas simples.

Las series mas simples son las **series geométricas**, formadas por las potencias de un número fijo x:

$$\sum_{i=0}^{\infty} x^i = 1+x+x^2+x^3+x^4+\dots+x^n+\dots$$

Para las series geométricas es fácil calcular todas las sumas parciales $\sum_{i=0}^{n} x^i = 1+x+x^2+x^3+\dots+x^n$

Si multiplicamos esta suma por $x-1$ queda $(1+x+x^2+x^3+\dots+x^n)(x-1) = x^{n+1}-1$

así que $1+x+x^2+x^3+\dots+x^n = \dfrac{x^{n+1}-1}{x-1}$

Ejemplo: $1+2/3+4/9+8/27+\dots+2^6/3^6 = \dfrac{2^7/3^7-1}{2/3-1} = 3-2^7/3^6$

Lema. La serie geométrica $\sum_{i=0}^{\infty} x^i$ converge a $\dfrac{1}{1-x}$ si $-1<x<1$ y diverge en todos los otros casos.

Demostración. Para $-1<x<1$, $\sum_{i=0}^{\infty} x^i = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n} x^i = \lim_{n\to\infty} \dfrac{x^{n+1}-1}{x-1} = \dfrac{1}{1-x}$

Para $x\geq 1$ los términos x^i son mayores que 1 y la sumas parciales van a ∞.

Para $x\leq -1$ los términos x^i tienen valor absoluto mayor que 1 y van cambiando de signo, así que las sumas parciales no forman una sucesión de Cauchy y el límite no existe. •

Ejemplo: $1+2/3+4/9+8/27+\dots+2^6/3^6+\dots = \dfrac{1}{1-{}^2/_3} = 3$

Ejercicio: Calcular $8/9+8^2/9^2+8^3/9^3+\dots+8^6/9^6+\dots$

Veamos ahora algunos criterios de convergencia para series mas generales de números positivos.

Criterio de comparación. Sean $\sum a_n$ y $\sum b_n$ dos series de números positivos con $a_n\leq b_n$.

Si $\sum b_n$ converge entonces $\sum a_n$ converge.

Si $\sum a_n$ diverge entonces $\sum b_n$ diverge.

Demostración. Como los números que estamos sumando no negativos la sucesión de sumas parciales es no decreciente, y el límite de las sumas parciales es el supremo, si las sumas parciales están acotadas, o ∞ si no están acotadas. •

Ejemplo. ¿La serie $1/\sqrt{1}+1/\sqrt{2}+1/\sqrt{3}+1/\sqrt{4}+\dots+1/\sqrt{n}+\dots$ converge? Los términos de esta serie son mayores a los de la serie armónica $1/1+1/2+1/3+1/4+\dots+1/n+\dots \sum 1/n$ que diverge a ∞, por lo tanto la serie $\sum 1/\sqrt{n}$ diverge a ∞.

¿La serie $1/1^2+1/2^2+1/3^2+1/4^2+\dots+1/n^2+\dots$ converge? Podemos compararla con otra serie

$$\begin{array}{ccccccccccccccccccccc}
\frac{1}{1^2} & \frac{1}{2^2} & \frac{1}{3^2} & \frac{1}{4^2} & \frac{1}{5^2} & \frac{1}{6^2} & \frac{1}{7^2} & \frac{1}{8^2} & \frac{1}{9^2} & \frac{1}{10^2} & \frac{1}{11^2} & \frac{1}{12^2} & \frac{1}{13^2} & \frac{1}{14^2} & \frac{1}{15^2} & \frac{1}{16^2} & \frac{1}{17^2} & \frac{1}{18^2} & \frac{1}{19^2} & \frac{1}{20^2} & \dots \\
\Vert & \Vert & \wedge & \Vert & \wedge & \wedge & \wedge & \Vert & \wedge & \wedge & \wedge & \wedge & \wedge & \wedge & \wedge & \Vert & \wedge & \wedge & \wedge & \wedge & \\
\frac{1}{1^2} & \frac{1}{2^2} & \frac{1}{2^2} & \frac{1}{4^2} & \frac{1}{4^2} & \frac{1}{4^2} & \frac{1}{4^2} & \frac{1}{8^2} & \frac{1}{8^2} & \frac{1}{8^2} & \frac{1}{8^2} & \frac{1}{8^2} & \frac{1}{8^2} & \frac{1}{8^2} & \frac{1}{8^2} & \frac{1}{16^2} & \frac{1}{16^2} & \frac{1}{16^2} & \frac{1}{16^2} & \frac{1}{16^2} & \dots
\end{array}$$

$$1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{16} \qquad \text{Y}$$

como la serie geométrica $\sum 1/2^n$ converge, la serie $\sum 1/n^2$ converge.

El criterio de comparación se puede generalizar usando límites.

Criterio del limite. Si $\sum a_n$ y $\sum b_n$ son dos series de números positivos y $\lim_{n\to\infty} a_n/b_n$ es un número real r distinto de 0 entonces $\sum a_n$ converge si y solo si $\sum b_n$ converge.

Demostración. Si $\lim a_n/b_n=r>0$ entonces a partir de algún momento $r/2< a_n/b_n<3r/2$ y como $b_n>0$ entonces $r/2\, b_n< a_n < 3r/2\, b_n$. Así que $r/2 \sum a_n < \sum b_n < 3r/2 \sum a_n$ para todas las sumas parciales.

Esto muestra que las sumas parciales de una serie están acotadas si y solo si las sumas parciales de la otra serie están acotadas.

Ejemplo. ¿La serie $\sum \frac{2}{3n+4}$ converge o diverge?

Podemos comparar sus términos con lo de la serie armónica $\sum \frac{1}{n}$

$\lim_{n\to\infty} \frac{2/3n+4}{1/n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n}{3n+4} = 2/3 \neq 0$ así que como la serie armónica diverge esta serie también diverge.

Criterio de la razón. Si $\sum a_i$ es una serie de números positivos y $\lim_{n\to\infty} a_{n+1}/a_n = r$ entonces

1. Si $r<1$ la serie converge
2. Si $r>1$ la serie diverge a ∞ .

Cuando $r=1$ el test falla.

Demostración.

1. Si $r<1$ entonces existe un momento a partir del cual $a_{n+1}/a_n \leq c$ para algún $c<1$

así que $a_{n+1} \leq c\, a_n$

$a_{n+2} \leq c\, a_{n+1} \leq c^2 a_n$

$a_{n+3} \leq c\, a_{n+2} \leq c^2 a_{n+1} \leq c^3 a_n$

$a_{n+k} \leq c\, a_{n+k'1} \leq c^2 a_{n-k+2} \leq c^3 a_{n-k+3} \leq \ldots \leq c^k a_n$

Así que a partir de ese momento los términos de la serie son menores o iguales a los términos de la serie $a_n \sum c^k$ que es una serie geométrica con $c<1$ por lo que esta converge, y por el criterio de comparación la serie $\sum a_i$ converge. •

Ejemplo. ¿La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$ converge o diverge?

$\lim_{n\to\infty} a_{n+1}/a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1/2^{n+1}}{n/2^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)\cdot 2^n}{n\cdot 2^{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n\cdot 2} = \frac{1}{2} < 1$ así que la serie converge.

Ejemplo. ¿La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n}{n!}$ converge o diverge?

$\lim_{n\to\infty} a_{n+1}/a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{e^{n+1}/n+1!}{e^n/n!} = \lim_{n\to\infty} \frac{e}{n+1} = 0$ así que la serie converge.

Para ver que el criterio de la razón falla cuando $\lim_{n\to\infty} a_{n+1}/a_n = 1$ basta hallar una serie convergente y otra divergente con este limite.

Ejemplo. Para la serie $\sum {}^{1}/_{n}$ obtenemos $\lim_{n\to\infty} a_{n+1}/a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1/n+1}{1/n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1$

Para la serie $\sum {}^{1}/_{n^2}$ obtenemos $\lim_{n\to\infty} a_{n+1}/a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1/(n+1)^2}{1/n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{(n+1)^2} = 1$

Criterio de la raíz. Si $\sum a_i$ es una serie de números positivos y $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = r$ entonces

1. Si $r<1$ la serie converge.
2. Si $r>1$ la serie diverge a ∞.

Cuando $r=1$ el test falla.

Demostración.

1. $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} < 1$ entonces existe un momento a partir del cual $\sqrt[n]{a_n} \leq c$ para algún $c<1$ y por lo tanto $a_n \leq c^n$ y a partir de ese momento los términos de la serie $\sum a_i$ son menores o iguales a los términos de la serie $\sum c^k$ que es una serie geométrica con $c<1$ por lo que converge, y por el criterio de comparación $\sum a_i$ converge. •

Ejemplo. La serie $\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot e^{-n}$ converge o diverge?

$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n \cdot e^{-n}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} \cdot e^{-1} = 1 \cdot e^{-1} < 1$ así que la serie converge.

Ejemplo. La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^2}$ converge o diverge?

$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2^n/n^2} = \lim_{n\to\infty} 2/n^{2/n} = 2/1 > 1$ así que la serie diverge.

Ejercicio. ¿La serie $\sum_{n=1}^{\infty} ({}^{n+1}/_{2n})^n$ converge o diverge?

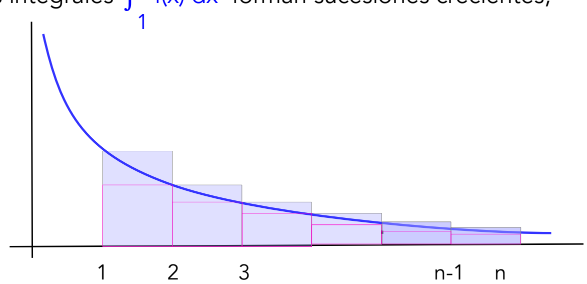
Muchas sucesiones vienen de funciones definidas en los reales positivos, $a_n=f(n)$.

Para estas sucesiones hay un criterio muy útil para saber si la serie converge o diverge.

Criterio de la integral. Sea $f: \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}^+$ una función integrable y decreciente.

Entonces $\sum_{i=1}^{\infty} f(i)$ converge si y solo si $\int_1^{\infty} f(x)\,dx$ converge.

Demostración. Como la función es positiva, las sumas $\sum_{i=1}^{n} f(i)$ y las integrales $\int_1^{n} f(x)\,dx$ forman sucesiones crecientes, y este tipo de sucesiones convergen si y solo están acotadas.



Como la función f es decreciente

$$\sum_{i=2}^{n} f(i) \leq \int_1^{n} f(x)\,dx \leq \sum_{i=1}^{n-1} f(i)$$

Así que si las sumas $\sum_{i=1}^{n-1} f(i)$ están acotadas entonces las integrales $\int_1^n f(x)\,dx$ están acotadas

Y si las integrales $\int_1^n f(x)\,dx$ están acotadas entonces las sumas $\sum_{i=2}^{n} f(i)$ están acotadas, y a estas sumas solo les falta añadirles $f(1)$ para obtener $\sum_{i=1}^{n-1} f(i)$, así que estas sumas están acotadas. •

Ejemplo. Podemos ver que la serie armónica $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i}$ diverge a ∞ comparándola con la integral $\int_1^{\infty} \frac{1}{x}\,dx$

Como $\int_2^{n+1} \frac{1}{x}\,dx < \sum_{i=2}^{n} \frac{1}{i} < \int_1^{n} \frac{1}{x}\,dx = \ln(n)$

entonces $\ln(n+1)-\ln(2) < 1/2+1/3+1/4+1/5+\ldots+1/n < \ln(n)$

así que $\ln(n)-\ln(2)+1 < 1+1/2+1/3+1/4+1/5+\ldots+1/n < \ln(n)+1$

Así que las sumas parciales crecen a la velocidad de $\ln(n)$, que va a infinito (pero muy lentamente).

Por ejemplo, para que $1+1/2+1/3+1/4+1/5+\ldots+1/n > 10$ es necesario que $\ln(n) > 9$ o sea $n > e^9 \approx 8103$
para que $1+1/2+1/3+1/4+1/5+\ldots+1/n > 100$ es necesario que $\ln(n) > 99$ o sea $n > e^{99} \approx 10^{43}$

Ejercicio. Mostrar que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ converge si $p>1$ y diverge si $p\leq 1$ (el caso $p=1$ corresponde a la serie armónica)

Por el criterio de la integral $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ converge si la integral $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p}\,dx$ converge.

Si $p\neq 1$ entonces $\int_1^n \frac{1}{x^p}\,dx = \int_1^n x^{-p}\,dx = x^{-p+1}/_{-p+1} \Big|_1^n = n^{-p+1}-1/_{-p+1}$

$$y \int_1^{\infty} \frac{1}{x^p}\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_1^n \frac{1}{x^p}\,dx = \lim_{n\to\infty} n^{-p+1}-1/_{-p+1} = \begin{cases} 1/_{1-p} & \text{si } p>1 \\ \infty & \text{si } p<1 \end{cases}$$

Consideremos ahora series de números positivos y negativos.

Cada serie de números reales se puede convertir en una serie de reales positivos tomando sus valores absolutos, y cada serie de números positivos puede convertirse en una serie de números reales asignándole un signo + o - a cada uno de ellos (esto puede hacerse de una infinidad de maneras).

Decimos que una serie $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ **converge absolutamente** si la serie de valores absolutos $\sum_{i=1}^{\infty} |a_i|$ converge.

Ejemplo. La serie $1/_{1^2} - 1/_{2^2} + 1/_{3^2} - 1/_{4^2} + \ldots - 1/_{n^2} + \ldots$ converge absolutamente porque $1/_{1^2} + 1/_{2^2} + 1/_{3^2} + 1/_{4^2} + \ldots + 1/_{n^2} + \ldots$ converge.

Hay series que convergen pero no convergen absolutamente.

Ejemplo.
La serie armónica alternante $1 - 1/2 + 1/3 - 1/4 + 1/5 - 1/6 + 1/7 - 1/8 + \dots + (-1)^{n-1}\, 1/n + \dots$ es convergente, porque restando términos consecutivos queda $1/_{1\cdot 2} + 1/_{3\cdot 4} + 1/_{5\cdot 6} + 1/_{7\cdot 8} + \dots + 1/_{(2n-1)\cdot 2n} + \dots$ y esta serie es convergente porque es menor que la serie $1/_{1\cdot 1} + 1/_{3\cdot 3} + 1/_{5\cdot 5} + 1/_{7\cdot 7} + \dots + 1/_{(2n-1)^2} + \dots$
que es menor que la serie de los inversos de los cuadrados de los número naturales, que es convergente.

Pero la serie de valore absolutos es $1+1/2+1/3+1/4+1/5+ \dots +1/n + \dots$ que ya vimos que es divergente.

Lema. (Convergencia absoluta) Si la serie $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ converge absolutamente entonces converge.

Demostración. Una serie converge si y solo si su sucesión de sumas parciales converge, y esto pasa si la sucesión de sumas parciales es una sucesión de Cauchy.

La sucesión de sumas parciales de $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ es de Cauchy si y solo si $\left|\sum_{i=m}^{i=n} a_i\right| < \varepsilon$ para todas m,n suficientemente grandes.

La desigualdad del triángulo $|x+y| \le |x|+|y|$ implica que $\left|\sum_{i=m}^{i=n} a_i\right| \le \sum_{i=m}^{i=n} |a_i|$ así que si $\sum_{i=m}^{i=n} |a_i| < \varepsilon$ entonces $\left|\sum_{i=1}^{\infty} a_i\right| < \varepsilon$

por lo tanto si la sucesión de sumas parciales de $\sum_{i=1}^{\infty} |a_i|$ es de Cauchy entonces la sucesión de sumas parciales de $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ es de Cauchy y por lo tanto converge. •

Ejemplo. Si una serie de números positivos $\sum a_i$ converge, entonces todas las series $\sum \pm a_i$ que se obtienen poniendo signos positivos y negativos (como sea) son convergentes.

Hay que tener mucho cuidado al tratar series que son convergentes pero no son absolutamente convergentes, porque si cambiamos el orden de la suma el resultado puede cambiar!

Ejemplo. Si se valiera cambiar el orden en que se suma podriamos escribir

$$\begin{aligned}
r &= 1 - 1/2 + 1/3 - 1/4 + 1/5 - 1/6 + 1/7 - 1/8 + 1/9 - 1/10 + 1/11 - 1/12 + 1/13 - 1/14 + 1/15 - 1/16 + \dots = \\
&= (1 - 1/2) - 1/4 + (1/3 - 1/6) + 1/8 + (1/5 - 1/10) - 1/12 + (1/7 - 1/14) - 1/16 + (1/9 - 1/18) - 1/20 + (1/11 - 1/22) - \dots = \\
&= 1/2 \quad - 1/4 \quad + 1/6 \quad - 1/8 \quad + 1/10 \quad - 1/12 \quad + \quad 1/14 \quad - 1/16 \quad + 1/18 \quad - 1/20 \quad + 1/22 \quad \dots \\
&= 1/2\,(1 - 1/2 + 1/3 - 1/4 + 1/5 - 1/6 + 1/7 - 1/8 + 1/9 - 1/10 + 1/11 - \dots) = r/2
\end{aligned}$$

lo que diría que r=r/2, así que r=0, pero la primera serie se puede escribir como suma de números positivos (sumando por pares) así que r>0. Esta contradicción muestra que la suma depende del orden.

Lema. Si la serie $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ converge absolutamente entonces el cualquier reordenamiento de la serie da el mismo resultado.

Demostración.
Sea $\sum a_{i'}$ una reordenación de la serie. Veamos primero que $\sum a_{i'}$ es absolutamente convergente, para lo que basta ver que las sumas parciales de $\sum |a_{i'}|$ están acotadas. esto es así porque la suma parcial $\sum_{i'\le n} |a_{i'}|$ es menor que la suma parcial $\sum_{i\le m} |a_i|$ que incluye a todos los $a_{i'}$ con $i'\le n$ y estas sumas están acotadas porque $\sum a_i$ es absolutamente convergente. •

Como $\sum a_{i'}$ es absolutamente convergente, dado $\varepsilon>0$, existe una M tal que $\sum_{i'=n}^{i'=m} |a_{i'}| < \varepsilon$ para todo $m,n\geq M$.

Sea $n\geq M$ y sea $m\geq n$ tal que la suma $\sum_{i=1}^{i=m} a_i$ incluye a todos los términos de la suma $\sum_{i'=1}^{i'=n} a_{i'}$

entonces $\sum_{i=1}^{i=m} a_i - \varepsilon < \sum_{i'=1}^{i'=n} a_{i'} < \sum_{i=1}^{i=m} a_i + \varepsilon$ ya que la suma $\sum_{i=1}^{i=m} a_i$ se obtiene de $\sum_{i'=1}^{i'=n} a_{i'}$

sumándole términos con indices $i'>n$ y la suma de estos términos está entre $-\varepsilon$ y ε ya que la suma de sus valores absolutos es menor o igual a $\sum_{i'=n+1}^{\infty} |a_{i'}|$ que es menor que ε .

Así que la distancia entre las sumas parciales de $\sum a_{i'}$ y las sumas parciales de $\sum a_i$ es eventualmente menor ε.,
lo que dice que en el límite las dos son iguales. •

Ejercicio. Mostrar que si la sucesión $a_1,a_2,a_3,...$ converge a 0 pero la serie $\sum a_i$ diverge, entonces podemos cambiar el orden de los a_i de modo que la serie resultante converja a cualquier número real que elijamos.

Problemas

11. Calcula los límites

a. $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}$ b. $\lim_{n\to\infty} \frac{\ln^n(n)}{n}$ c. $\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n}$

12. Calcula el valor exacto de las series (cuidado con los indices porque cambian)

a. $\sum_{n=1}^{\infty} (-{}^1/{}_2)^n$ b. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{7^{n+1}}{2^{3n}}$ c. $\sum_{n=0}^{\infty} \pi^{-n}$ d. $\sum_{i=n}^{\infty} x^i$

e. $\sum_{n=0}^{\infty} x^{2n} = 1+x^2+x^4+x^6+x^8+...$ f. $\sum_{n=0}^{\infty} x^{2n+1} = x+x^3+x^5+x^7+x^9+...$

13. ¿Cuales de estas series convergen y cuales divergen?

a. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{100n}$ b. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n+n^3}{3^n+n^2}$ c. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{8^n-7^n}{8^n}$

d. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln(n)}$ e. $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} n!$ f. $\sum_{n=1}^{\infty} 0.9^n n$

g. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{5+4n}{4+5n}\right)^n$ h. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\cdot\ln(n)}$ i.* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$

14. ¿Convergen? ¿Convergen absolutamente?

a. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ b. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln(n)}$

Una **serie de potencias** es una serie de la forma $\sum c_i(x-x_0)^i$ para alguna sucesión de números $c_1, c_2, c_3, \ldots, c_n, \ldots$
Una serie de potencias es como un polinomio de grado infinito, y sus coeficientes pueden ser números reales arbitrarios, Pero a diferencia de un polinomio, que puede evaluarse para cualquier valor real de x, una serie de de potencias no siempre puede evaluarse, porque puede converger o diverger dependiendo de x.

Ejemplo: Cuando $x_0=0$ y todos los coeficientes son 1 la serie es

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^n = 1+x+x^2+x^3+x^4+x^5+\ldots +x^n+\ldots$$

y sabemos que esta serie converge si $-1<x<1$ y diverge si $x\geq 1$ o $x\leq -1$

Las series de Taylor son series de potencias. Si queremos usar estas series para aproximar a la función, lo primero que tenemos que saber es para cuales valores de x convergen y para cuales divergen.

Ejemplo: ¿Para que valores de x converge la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n = 1+x+{}^1/_2\, x^2+{}^1/_{3!}\, x^3+{}^1/_{4!}\, x^4+{}^1/_{5!}\, x^5+\ldots +{}^1/_{n!}\, x^n+\ldots$$

Podemos tratar de usar los criterios de covergencia para series (recordando que los términos de la serie incluyen a las potencias de x, no solo los coeficientes). Si usamos el criterio de la razón

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x^{n+1}/n+1!}{x^n/n!} = \lim_{n\to\infty} \frac{x}{n+1} = 0$$

así que la serie converge para todos los valores de x.

Ejercicio: ¿Para que valores de x converge la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} nx^n = x+2x^2+3x^3+4x^4+5x^5+\ldots +nx^n+\ldots$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)x^{n+1}}{nx^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)x}{n} = x$$

así que la serie converge para $-1<x<1$.

¿Como serán los conjuntos de números para los que una serie de potencias converge?

Ejercicio: ¿Existirá una serie de potencias que no converja para ningún valor de x distinto de 0?

Si, por ejemplo $\sum_{n=1}^{\infty} nx^n = 1!x+2!x^2+3!x^3+4!x^4+5!x^5+\ldots +n!x^n+\ldots$

Pregunta. ¿Habrán series de potencias que converjan para los números negativos pero no para los positivos?

Para aplicar el criterio de la razón a la serie $\sum_{n=1}^{\infty} c_i x^i$ hay que evaluar el límite

$$\lim_{n\to\infty} \frac{c_{n+1}x^{n+1}}{c_n x^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{c_{n+1}}{c_n}\, x = x \lim_{n\to\infty} \frac{c_{n+1}}{c_n}$$

Si $\lim_{n\to\infty} \frac{c_{n+1}}{c_n} = 0$ entonces la serie de potencias converge para todo valor de x .

Si $\lim_{n\to\infty} \frac{c_{n+1}}{c_n} = c\neq 0$ entonces la serie de potencias converge para $|x|<1/c$ y diverge para $|x|>1/c$

Ejemplo: ¿Para que valores de x converge la serie de Taylor de sen(x) en 0?

$\sum_{n=0}^{\infty} {}^{(-1)^{n+1}}/_{2n+1!}x^{2n+1} = x - {}^1/_{3!}x^3 + {}^1/_{5!}x^5 - \ldots$ converge para todo x real

Ejercicio: ¿Para que valores de x converge la serie de Taylor de ln(x+1) en 0?

$\sum_{n=1}^{\infty} {}^{(-1)^{n-1}}/_n\, x^n = x - {}^1/_2x^2 + {}^1/_3x^3 - {}^1/_4x^4 + {}^1/_5x^5 + \ldots + (-1)^{n}\,{}^1/_n\, x^{n+1} + \ldots$

El razonamiento anterior dice en donde converge una serie de potencias $\sum c_i x^i$ suponiendo que $\lim_{n\to\infty} \frac{c_{n+1}}{c_n}$. exista, pero muchas veces este límite no existe. El siguiente criterio es muy útil.

Lema. Si la serie $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x_o^{\,n}$ converge para algún x_o entonces

1. $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ converge absolutamente para $|x|<|x_0|$

2. $\sum_{n=1}^{\infty} n\cdot c_n x^n$ converge absolutamente para $|x|<|x_o|$

Demostración.

1. Como la serie $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x_o^{\,n}$ converge entonces sus términos están acotados, es decir, $|c_n x_o^{\,n}| \le M$ y c

Así que $|c_n x^n| = |c_n x_o^{\,n} (x/x_o)^n| \le M|x/x_o|^n$

por lo tanto la serie $\sum |c_n x^n|$ está acotada por la serie geométrica $\sum M\, |x/x_o|^n$ que converge porque $|x/x_o|<1$.

2. Como $|n\cdot c_n x^n| = |n\cdot c_n x_o^{\,n-1} (x/x_o)^{n-1}| \le M\cdot n|x/x_o|^n$ la serie $\sum |n\cdot c_n x^n|$ está acotada por la serie $\sum M\cdot n\, |x/x_o|^n$

y esta serie converge por el criterio de la razón ya que $\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)\, |x/x_o|^{n+1}}{n \quad |x/x_o|^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} |x/x_o| = |x/x_o| < 1$ •

El lema anterior dice que si una serie de potencias $\sum c_n(x-x_o)^n$ converge en un punto a distancia r de x_o entonces converge para todos los puntos a distancia menor que r de x_o. Al supremos de estos r se le llama el **radio de convergencia** de la serie.

Ejemplo: ¿Cual es el radio de convergencia de la serie $\sum 1/n\ x^n$?
Sabemos que la serie diverge para x=1 (es la serie armónica) y converge para x=-1 (es la serie armónica alternante) así que el radio de convergencia es menor o igual a 1 y es mayor o igual a 1, por lo que debe ser 1.

Ejemplo: ¿Cual es el radio de convergencia de la serie $\sum n\ x^n$?
Aunque la serie diverge para x=1 y para x=-1 el criterio de la razón muestra que converge para |x|<1 asi que el radio de convergencia es 1.

Las funciones analíticas son las funciones definidas por series de potencias alrededor de cada punto.
Una función $f(x)$ es **analítica** en (una vecindad de) 0 si es de la forma $f(x)=\sum c_n x^n$ para alguna serie que converge en una vecindad de 0. Mas generalmente, decimos que $f(x)$ es analítica en (una vecindad de) un punto x_o si $f(x)=\sum d_n(x-x_o)^n$ para una serie que converge en una vecindad de x_o.

Ejemplos:

- La función exponencial es analítica en 0: $e^x = \sum {}^1/_{n!}\, x^n$ para todo x en **R**.
- Las funciones trigonométricas $\mathrm{sen}(x)$ y $\cos(x)$ son analíticas en 0: $\mathrm{sen}(x)= \sum {}^{(-1)^n}/_{2n+1!}\, X^{2n+1}$ para todo x en **R**.
- La función $1/x$ es analítica en 1: $1/x = \sum_{n=0} (-1)^n(x-1)^n = 1-(x-1)+(x-1)^2-(x-1)^3+(x-1)^4-\ldots$ para 0<x<2.

Lema. Si la serie $\sum c_n x^n$ converge para $|x|<r$ entonces la función $f(x)=\sum c_n x^n$ es derivable para $|x|<r$ y $f'(x)=\sum n c_n x^{n-1}$

Demostración. •

Corolario. Las funciones analíticas son infinitamente derivables en los intervalos abiertos donde están definidas.

Demostración. Por el lema anterior si la función $f(x)$ está definida por una serie de potencias alrededor de x_o que converge en una vecindad de x_o entonces la función es derivable y $f'(x)$ está dada por una serie que converge en esa misma vecindad de x_o. Podemos repetir el argumento con $f'(x)$ para ver que es derivable y su derivada $f''(x)$ está dada por una serie que converge en esa misma vecindad, y lo mismo con todas las derivadas de $f(x)$. •

Problemas

15. Encuentra los radios de convergencia de estas series.

a. $\sum 3^{-n} x^{2n}$ b. $\sum 2^n/n!\ x^n$ c. $\sum \mathrm{sen}(n) x^n$ d. $\sum n^4 x^n$

16. Encuentra las series de potencias alrededor de 0 de
 a. Todas las funciones cuya tercera derivada es $\ln(x)$
 b. Las antiderivadas de la función $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$

17. a. Muestra que las sumas de funciones analíticas son funciones analíticas.
 b. Muestra que los productos de funciones analítica y polinomios son funciones analíticas.
 c. ¿Como son los radios de convergencia de esas sumas y productos?

18. Prueba que si los valores de dos series de potencias $\sum c_n x^n$ y $\sum d_n x^n$ coinciden en una vecindad de 0 entonces las series son idénticas, es decir, $c_n=d_n$ para toda n. Hint: si dos funciones derivables son iguales en una vecindad de 0 entonces sus derivadas en 0 son iguales.

19. Muestra que la función $f(x)=\begin{cases} \dfrac{\mathrm{sen}(x)}{x} & x\neq 0 \\ 1 & x=0 \end{cases}$ es analítica en 0.