Tarea I

Análisis Matemático I

1. **CONJUNTOS**

   a) Sean $\{A_1, A_2, \ldots A_n\}$ conjuntos cualesquiera y E un conjunto. Demuestre que

   $$E \cap \bigcup_{j=1}^{n} Aj = \textstyle\bigcup_{j=1}^{n}(E \cap A_j) \qquad E \cup \bigcup_{j=1}^{n} Aj = \textstyle\bigcup_{j=1}^{n}(E \cup A_j)$$

   $$E \cap \bigcap_{j=1}^{n} Aj = \textstyle\bigcap_{j=1}^{n}(E \cap A_j) \qquad E \cup \bigcap_{j=1}^{n} Aj = \textstyle\bigcap_{j=1}^{n}(E \cup A_j)$$

1. **FUNCIONES**

   a) Demuestre que si $f\colon A \to B$ y $E, F \subset A$, entonces $f(E \cup F) = f(E) \cup f(F)$ y $f(E \cap F) \subset f(E) \cap f(F)$.

   b) Demuestre que si $f\colon A \to B$ es inyectiva, entonces $f^{-1}(f(E)) = E$. Construir un ejemplo en donde la desigualdad no se cumple si f no es inyectiva.

2. **INDUCCION**

   a) Demuestre que $5^{2n} - 1$ es divisible entre 6 para toda $n \in \mathbb{N}$

   b) Demuestre que $2^n < n!$ para toda $n \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq 4$

3. **NUMEROS REALES**

   a) Si $0 \leq a < b$, demostrar que $a^2 \leq ab < b^2$. Probar asimismo por medio de un ejemplo que no se deduce que $a^2 < ab < b^2$.

   b) Encontrar todas las $x \in \mathbb{R}$ que satisfacen

      1) $|4x - 5| \leq 13$

      2) $|x| + |x + 1| < 2$

4. **SUPREMO**

   a) Sea $S = \{1/n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Encontrar $\text{ínf}\, S$ y $\sup S$.

   b) Sea $S \subset \mathbb{R}$ acotado y sea $S_0 \subset S$ no vacío. Desmuestre que

   $$\text{ínf}\, S \leq \text{ínf}\, S_0 \leq \sup S_0 \leq \sup S.$$

   c) Sean $f, g\colon X \to X$ y suponga que ambas tienen codominios acotados. Desmuestre que

   $$\sup\{f(x) + g(x) \mid x \in X\} \leq \sup\{f(x) \mid x \in X\} + \sup\{g(x) \mid x \in X\}$$

   y que

   $$\text{ínf}\{f(x) \mid x \in X\} + \text{ínf}\{g(x) \mid x \in X\} \leq \text{ínf}\{f(x) + g(x) \mid x \in X\}.$$