Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Ciencias

ANALISIS MATEMATICO I

1. Demostrar que la convergencia de $\{x_n\}$ implica la de $\{|x_n|\}$? ¿Es verdad la inversa?

2. Una sucesión se dice recurrente si el término n-ésimo $\{X_n\}$ de la misma se define mediante una expresión que permite obtenerlo a partir de los anteriores $\{X_1\}, \{X_2\}, ..., \{X_{n-1}\}$. Demuestra la convergencia o divergencia de la sucesión de Fibonacci:

$$X_1 = 1 \quad X_2 = 1$$

   y

$$X_n = X_{n-2} + X_{n-1}$$

   para $n \geq 3$.

3. Demuestra que una condición necesaria y suficiente para que la sucesión compleja $(Z_n) = (A_n + B_n i)$ sea convergente es que lo sean las sucesiones (A_n) y (B_n).

4. Sea $X = (x_n)$ un sucesión en $\mathbb{R}^n$ que converge a x. Demostrar que $\lim_{n\to\infty}(\|x_n\|) = \|x\|$.

5. Para cada dos sucesiones reales $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, demuestra que

$$\limsup_{n\to\infty}(a_n + b_n) \leq \limsup_{n\to\infty}(a_n) + \limsup_{n\to\infty}(b_n)$$

   siempre que la suma de la derecha no sea de la forma $\infty - \infty$.

6. (a) ¿La cerradura de un conjunto conexo es conexa ?

   (b) ¿El interior de un conjunto conexo es conexo?

7. Se dice que una colección $\{V_\alpha\}_{\alpha\in I}$ de subconjuntos abiertos de X es una base si se cumple que:

- Para todo $x \in X$ y cada conjunto abierto $G \subset X$ tal que $x \in G$, tenemos que $x \in V_\alpha \subset G$ para algún α (n otras palabras, todo conjunto abierto en X, es la unión de una subcolección de $\{V_\alpha\}$).

Demostrar que todo espacio métrico separable tiene una base numerable.
Sugerencia: Tomar todas las vecindades con radio racional y centro en algún subconjunto denso numerable de X.

8. Se dice que un espacio métrico es separable si contiene un subconjunto denso numerable. Demostrar que $\mathbb{R}^n$ es separable.
Sugerencia: Considerar el conjunto de los puntos que tienen coordenadas racionales.

9. Sabemos que existe una biyección de $\mathbb{N} \to \mathbb{Q}$. Podemos considerar a dicha biyección como una sucesión $\{x_n\}$. Demuestre que para cada $r \in \mathbb{R}$, existe una subsucesión de $\{x_n\}$ que converge a r.

10. Sea $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión anidada de intervalos cerrados en $\mathbb{R}$ (es decir que $E_{n+1} \subset E_n$). Demuestre que $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} E_n$ es no vacía.