# Análisis Matemático I

## Tarea III

1. Demostrar a partir de la definición que las siguientes son sucesiones de Cauchy:
$$(i)\ \left(\tfrac{n+1}{n}\right) \qquad (ii)\ \left(1+\tfrac{1}{2!}+\ldots+\tfrac{1}{n!}\right)$$

2. Demostrar a partir de la definición que las siguientes no son sucesiones de Cauchy:
$$(i)\ ((-1)^n) \qquad (ii)\ \left(n+\tfrac{(-1)^n}{n}\right)$$

3. Demuestre que si $(x_n)$ y $(y_n)$ son sucesiones de Cauchy, entonces $(x_n + y_n)$ y $(x_n y_n)$ son sucesiones de Cauchy.

4. Si $x_1 > 0$ y $x_{n+1} := (2 + x_n)^{-1}$ para $n \geq 1$, entonces demostrar que $(x_n)$ es una sucesión contractiva. Encontrar el límite.

5. Siu $0 < r < 1$ y $|x_{n+1} - x_n| < r^n$ para toda $n \in \mathbb{N}$, entonces demostrar que $(x_n)$ es una sucesión de Cauchy.

6. Suponga que $(x_n)$ es propiamiente divergente y sea $(y_n)$ tal que $(x_n y_n)$ es convergente. Demostrar que $\lim_{n\to\infty} y_n = 0$.

7. Calcula el $\lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{n^2+n} - n\right)$.

8. Si $s_1 = \sqrt{2}$ y $s_{n+1} = \sqrt{2+\sqrt{s_n}}$ $(n = 1, 2, \ldots)$, entonces demuestra que $(s_n)$ es convergente y que $s_n < 2$ para toda $n = 1, 2, \ldots$.

9. Dada una sucesión $(s_n)$, definimos la *media aritmética* como
$$t_n = \frac{s_1 + \ldots + s_n}{n}.$$
Demuestre que $s_n \to s$ implica que $t_n \to s$. Muestre un ejemplo en el que $s_n$ diverge y sin embargo $t_n$ converge.

10. Encuentre el ínfimo y el supremo de $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, donde $s_1 = 0$, $s_{2m} = \frac{s_{2m-1}}{2}$ y $s_{2m+1} = \frac{1}{2} + s_{2m}$.