Análisis Matemático I

Tarea 4

Tema: Compacidad

Facultad de Ciencias,UNAM, Abril de 2007.

1. Asociar a cada sucesión $a = \{\alpha_n\}$ donde α_n toma los valores 0 ó 2 el número real
$$x(a) = \frac{\alpha_n}{3^n}$$
Probar que el conjunto de todas las $x(a)$ es el conjunto de Cantor y describir las propiedades topológicas de dicho conjunto.

2. Demostrar que si una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a x_0, se cumple que $\{x_n : n \in \mathbb{N}\} \bigcup \{x_0\}$ es un subconjunto compacto de $\mathbb{R}$. Dar un ejemplo.

3. Demuestra que
   (a) Toda intersección de subconjuntos compactos de la recta real es un subconjunto compacto.
   (b) La unión de dos subconjuntos compactos de la recta real es un subconjunto compacto.

   Encuentra una familia $\{c_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ de subconjuntos compactos de $\mathbb{R}$ tal que $\bigcup\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ no sea compacto.

4. ¿Cuáles de los siguientes conjuntos son compactos? Justifica tu respuesta? En caso de que el conjunto no sea compacto, ¿será posible agregarle un punto de forma que el conjunto resultante sea compacto? De ser el caso, indica dicho punto.
   (a) $(0, 1]$
   (b) $\mathbb{Z}$
   (c) $\mathbb{Q}$
   (d) $\mathbb{R}^+$
   (e) $\mathbb{R}^+ \bigcup \{0\}$
   (f) $\mathbb{Q}^+$
   (g) $\mathbb{Q}^+ \bigcup \{0\}$
   (h) $\left\{\frac{n+1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\right\}$
   (i) $\left\{\frac{n+1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\right\} \bigcup \{0\}$
   (j) $\left\{\frac{n+1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\right\} \bigcup \{1\}$

5. Encuentra el menor subconjunto compacto de la recta real que contiene a cada uno de los siguientes subconjuntos

   (a) $(1,3) \bigcup \left\{ 3 + \dfrac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N} \right\}$

   (b) $\left\{ \dfrac{n+1}{n} \mid n \in \mathbb{N} \right\}$

   (c) $\left\{ \dfrac{n+(-1)^n}{n} \mid n \in \mathbb{N} \right\}$