Examen I

(1) Resolver la desigualdad $|2x-1| > |2-x|$.

Solución
Primero tenemos que $2x-1=0 \Rightarrow x=1/2$ y $2-x=0 \Rightarrow x=2$.
I. Si $x \in [2,\infty)$, entonces $2x-1>0$ y $2-x \leq 0$, en cuyo caso se debe cumplir que $2x-1 > x-2$, lo cual sucede siempre que $x \in (-1,\infty)$.
II. Si $x \in [1/2,2)$, entonces $2x-1 \geq 0$ y $2-x>0$, en cuyo caso se debe cumplir que $2x-1 > 2-x$, lo cual sucede siempre que $x \in (1,\infty)$.
III. Si $x \in (-\infty,1/2)$, entonces $2x-1<0$ y $2-x<0$, en cuyo caso se debe cumplir que $1-2x > 2-x$, lo cual sucede siempre que $x \in (-\infty,-1)$.
Concluimos entonces que para que la desigualdad se satisfaga, se debe cumplir que x esté en

$$([2,\infty)\cap(-1,\infty))\cup([1/2,2)\cap(1,\infty))\cup((-\infty,1/2)\cap(-\infty,-1))$$

$$=[2,\infty)\cup(1,2)\cup(-\infty,-1)$$

$$=(-\infty,-1)\cup(1,\infty)$$

$$=\mathbb{R}-[-1,1].$$

(2) Demostrar por inducción que $1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$.

Solución
I. Para n=1 se cumple porque $1=\frac{1(1+1)}{2}$.
II. Supongamos que $1+2+\cdots+k=\frac{k(k+1)}{2}$.
III. Por demostrar que $1+2+\cdots+k+(k+1)=\frac{(k+1)(k+2)}{2}$. En efecto,

usando la hipótesis de inducción (**II**), tenemos que

$$1+2+\cdots+k+(k+1)=\frac{k(k+1)}{2}+(k+1)=\frac{k(k+1)}{2}+\frac{2(k+1)}{2}$$
$$=\frac{k(k+1)+2(k+1)}{2}=\frac{(k+1)(k+2)}{2}.$$

(3) Encontrar el supremo y el ínfimo del conjunto

$$S=\left\{\frac{1}{x^2+1}\mid x\in\mathbb{R}\right\}$$

y determinar si $inf\,(S)\in S$ o si $inf\,(S)\notin S$ y lo mismo con $sup\,(S)$.

Solución

Ya que $x^2+1\geq 1$, entonces $0<\frac{1}{x^2+1}\leq 1$ (la igualdad se da cuando $x=0$). Esto implica que $\sup(S)=1\in S$. Como $\lim\limits_{x\to\infty} x^2+1=\infty$, concluimos que $\inf(S)=0\notin S$.

(4) Resolver el siguiente límite:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+\sqrt{x}}}.$$

Solución

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+\sqrt{x}}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x(1+\frac{1}{\sqrt{x}})}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{x}}}}=1.$$

(5) Resolver el siguiente límite:

$$\lim_{x\to-\infty}\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}.$$

Solución

$$\lim_{x\to-\infty}\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \left(\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1}\right)\left(\frac{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}}\right)$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2+1-(x^2-1)}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{2}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}} = 0.$$

(6) Resolver el siguiente límite:

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\sqrt{1+x^2}}{x}.$$

Solución

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\sqrt{1+x^2}}{x} = \lim_{x\to 0} \left(\frac{1-\sqrt{1+x^2}}{x}\right)\left(\frac{1+\sqrt{1+x^2}}{1+\sqrt{1+x^2}}\right)$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1-(1+x^2)}{x(1+\sqrt{1+x^2})} = \lim_{x\to 0} \frac{-x^2}{x(1+\sqrt{1+x^2})} = \lim_{x\to 0} \frac{-x}{(1+\sqrt{1+x^2})} = 0.$$

(7) Encontrar $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$ y $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$, donde $f(x) = \frac{|x|}{x}$ para toda $x \neq 0$.

Solución

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = -1 \quad \text{y} \quad \lim_{x\to 0^+} f(x) = 1.$$

(8) Usando la definición de límite, demostrar que si $f(x) = 2x+1$, entonces $\lim\limits_{x\to 4} f(x) = 9$.

Solución

Si $\epsilon > 0$, entonces es fácil ver que si $\delta_\epsilon = \frac{\epsilon}{2}$, entonces $|x-4| < \delta_\epsilon \Rightarrow |f(x)-9| < \epsilon$.

(9) Demuestre que la función

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

no es continua en $x \in \mathbb{R}$.

Solución

Sea $x \in \mathbb{R}$ y $\epsilon = \frac{1}{2} > 0$. Si $x \in \mathbb{Q}$, entonces existe $x_0 \in (x-\epsilon, x+\epsilon) \cap \mathbb{I}$, y entonces $|f(x) - f(x_0)| = |1 - 0| = 1 > \epsilon$, lo que implica que f *no* es continua en $x \in \mathbb{Q}$. Un argumento similar se aplica cuando $x \in \mathbb{I}$. (Recuerde que en clase vimos que tanto $\mathbb{Q}$ como $\mathbb{I}$ son densos en $\mathbb{R}$.)

(10) Recordemos que una sucesión de números reales $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ **converge** a $\ell \in \mathbb{R}$ si para toda $\epsilon > 0$, existe $N_\epsilon \in \mathbb{N}$ tal que si $n > N_\epsilon$, entonces $|s_n - \ell| < \epsilon$, y en este caso escribimos $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \ell$. Demostrar que si $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función continua y $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = 0$, entonces

$$\lim_{n\to\infty} f\left(x + s_n\right) = f\left(x\right).$$

Solución

Sea $x \in \mathbb{R}$ y $\epsilon > 0$. Como f es continua en x, existe $\delta > 0$ tal que si $|x - x_0| < \delta$, entonces $f(x) - f(x_0) < \epsilon$. Como $s_n \to 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n > N$, entonces $|s_n| < \delta$. Asi pues, tenemos que si $n > N$, entonces $|(x + s_n) - x| = |s_n| < \delta$, lo que implica que $|f(x + s_n) - f(x)| < \epsilon$.