EXAMEN 5

1. Hallar el radio y centro de curvatura de cada una de las siguientes curvas en el punto dado. En cada caso, demostrar que el centro de curvatura está en la normal a la curva en el punto dado y que la distancia desde el punto dado hasta el centro de curvatura es igual al radio de curvatura.

   (a) $y = 2\sin 2x$ en $(\frac{\pi}{4}, 2)$.

   (b) $x + 6^3 + xy^2 = 0$ en $(-3, 3)$.

   (c) $xy = 6$ en $(2, 3)$.

2. Hallar las ecuaciones paramétricas de la evoluta de cada una de las siguientes curvas en función del parámetro t. También trazar la curva, su evoluta y por lo menos un círculo de curvatura.

   (a) $x = a(t + \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$

   (b) $x = 9 - t^2$, $y = 2t$

   (c) $x = a\sec t$, $y = b\tan t$

3. La trayectoria de un punto móvil es la sinusoide $x = at$ y $y = b\sin at$. Demuestre que la componente x de la velocidad es constante y que la aceleración es proporcional a la distancia del móvil con el eje x.

4. Dadas las ecuaciones paramétricas de movimiento $(x, y) = (t^2, (t-1)^2)$.

   (a) Hallar la ecuacioón de la trayectoria en coordenadas rectangulares.

   (b) Trazar la trayectoria con los vectores correspondientes a la velocidad y a la aceleración para $t = \frac{1}{2}$, $t = 1$ y $t = 2$.

   (c) Encuentre el valor del tiempo en el que la magnitud de la velocidad es mínima.

   (d) Determine dónde está el móvil cuando la magnitud de la velocidad es de 10 metros por segundo.

5. La curva $x^2y + 12y = 144$ tiene un máximo y dos puntos de inflexión. Encuentre el área del triángulo formado por las tangentes a la curva en esos tres puntos.

6. Se inscribe un rectángulo en la elipse $\frac{x^2}{400} + \frac{y^2}{225} = 1$ con sus lados paralelos a los ejes de la elipse. Hallar las dimensiones del rectángulo inscrito de (a) área máxima y (b) perímetro maximo.

7. Demostrar que en un punto de inflexión, el radio de curvatura se hace infinito.

8. Dada la ecuación $y = 3x - x^3$.

   (a) Hallar el radio de curvatura en el punto máximo de la curva y trazar el círculo de curvatura.

   (b) Demostrar que el punto máximo de la curva no es el punto de máxima curvatura.

   (c) Hallar, aproximando hasta la centésima, la abscisa del punto de curvatura máxima.

9. Traze la curva y halle el radio de curvatura en un punto cualquiera (r_1, θ_1) sobre cada una de las siguientes curvas.

   (a) La espiral de Arquímedes $r = a\theta$.

   (b) La lemniscata $r^2 = a^2 \cos 2\theta$.

   (c) La trisectriz $r = 2a \cos\theta - a$.

10. Encuentre el n-ésimo polinomio de Taylor de las siguientes funciones en el punto x_0.

    (a) $f(x) = \ln 5x + 3$, con $x_0 = -3/5$ y $n = 8$.

    (b) $f(x) = \text{arccot} 2x$, con $x_0 = 0$ y $n = 8$.

    (c) $f(x) = \tanh x$, con $x_0 = 0$ y $n = 5$.

    (d) $f(x) = \frac{x^k}{1+x}$, con $x_0 = 0$ y n arbitraria.

11. En los siguientes incisos, aproxímese con un error menor que 10^{-3}. Incluya todo el análisis del error para garantizar la exactitud pedida.

    (a) $30^{1/5}$

    (b) $65^{1/6}$

    (c) $\tan(35°)$

    (d) $\sin(1°)$

12. En los siguientes incisos, aproxímese con un error menor que 10^{-5}. Incluya todo el análisis del error para garantizar la exactitud pedida.

    (a) $\sqrt[3]{27.4}$

    (b) $\sin(89°)$

    (c) $\cos(47°)$

13. Hállese una cota superior para el valor absoluto del residuo $R_n(x)$ en cada uno de los siguientes casos.

    (a) $f(x) = x^4$, con $n = 4$, $x_0 = 0$ y $x \in [\frac{1}{2}, 1]$

    (b) $f(x) = \text{arctan} x$, con $n = 3$, $x_0 = 0$ y $x \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$