CALCULO I

TAREA II

Resolver los siguientes ejercicios:

(1) En cada uno de los siguientes incisos, determinar si la función que se da es uno a uno, sobre o biyectiva:
   (a) $f(x) = 3$ (c) $f(x) = ax + b$, con $a, b \in \mathbb{R}$ (e) $y = \frac{1}{x-1}$
   (b) $f(x) = 2x - 1$ (d) $y = \frac{1}{x}$ (f) $y = \sqrt{x}$

(2) Una función $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es *par* si $f(x) = f(-x)$ para toda $x \in \mathbb{R}$ y es *impar* si $f(x) = -f(-x)$ para toda $x \in \mathbb{R}$. En cada uno de los siguientes incisos, hacer un dibujo de la gráfica de la función que se da y determinar si es una funciónes par y/o impar:
   (a) $y = -4$ (c) $y = \frac{x^2}{x^2+1}$ (e) $y = \frac{1}{|x|}$
   (b) $y = \frac{x}{x^2+1}$ (d) $y = \frac{1}{x}$ (f) $y = x^n$, con $n = 1, 2, \cdots$

(3) Demuestre que existe una y sólo una función que es tanto par como impar y determine explícitamente cuál es esta función.

(4) Demuestre que el producto de dos funciones con la misma paridad resulta en una función par, mientras que el producto de dos funciones de paridad distinta resulta en una función impar.

(5) Calcule los siguientes límites:
   (a) $\lim\limits_{x\to 0^-} x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}$ (b) $\lim\limits_{x\to 5^+} \frac{1+\sqrt{2x-10}}{x+3}$ (c) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^2-3}}{\sqrt[3]{5x^3+4}}$ (d) $\lim\limits_{x\to 2^-} \frac{\sqrt{4-x^2}}{\sqrt{6-5x+x^2}}$

(6) Usando la definición de continuidad de ϵ's y δ's, demuestre que la función $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$ es continua en $\mathbb{R}$.

(7) Una función $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es *creciente* en el intervalo $(a, b) \subset \mathbb{R}$ si $f(x) \leq f(y)$ para todas $x, y \in (a, b)$ tales que $x \leq y$, y es *decreciente* en el intervalo $(a, b) \subset \mathbb{R}$ si $f(x) \geq f(y)$ para todas $x, y \in (a, b)$ tales que $x \leq y$. Determine los intervalos en donde la función $f(x) = |x+1| + |x-1|$ es creciente y decreciente.

(8) Sea $f(x) = x^2 + 2x + 3$. Encontrar los siguientes límites:
   (a) $\lim\limits_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ (b) $\lim\limits_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h}$ (c) $\lim\limits_{h\to 0} \frac{f\left(x+h^2\right)-f(x)}{h}$ (d) $\lim\limits_{h\to 0} \frac{f\left(x+h^2\right)-f(x)}{h^2}$