Ejercicio de Optimización

Restricciones Mezcladas (Igualdad y Desigualdad)

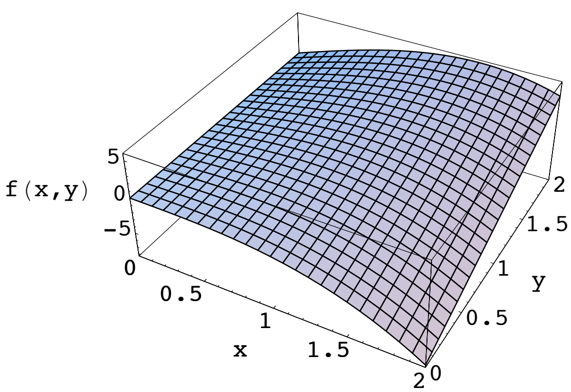
Maximizar

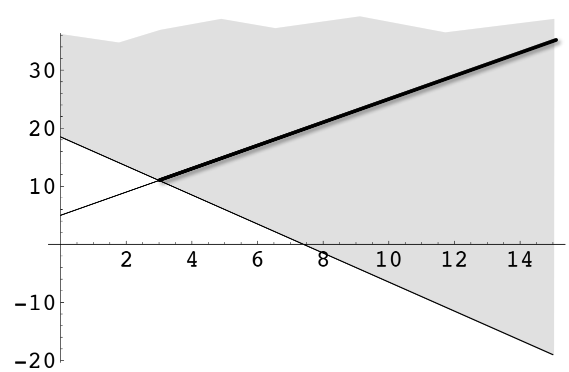
$$f(x,y) = 3xy - x^3$$

sujeto a

$$\begin{cases} 2x - y = -5 \\ 5x + 2y \geq 37 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

Solución. Reconocemos la gráfica de la función y el conjunto restricción:





Observamos que el gradiente de la restricción de igualdad $h(x,y) = 2x - y$ es

$$\nabla h(x,y) = (2,-1) \neq (0,0).$$

Para que se cumpla la restricción de cualificación, a lo más una restricción de desigualdad es efectiva. Vemos cada caso:

$\boxed{\lambda_1 \neq 0}$

$$rango \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -5 & -2 \end{pmatrix} = 2$$

$\boxed{\lambda_2 \neq 0}$

$$rango \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = 2$$

$\boxed{\lambda_3 \neq 0}$

$$rango \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = 2$$

En todos los casos se satisface la condición de restricción no degenerada.

Formamos el Lagrangiano:

$L(x, y, \mu, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = 3xy - x^3 - \mu(2x - y + 5) - \lambda_1(-5x - 2y + 37) + \lambda_2 x + \lambda_3 y$

Escribimos las condiciones de primer orden:

$A.1$	$\dfrac{\partial L}{\partial x} = 3y - 3x^2 - 2\mu + 5\lambda_1 + \lambda_2 = 0$
$A.2$	$\dfrac{\partial L}{\partial y} = 3x + \mu + 2\lambda_1 + \lambda_3 = 0$
$B.1$	$2x - y = -5$
$C.1$	$\lambda_1(-5x - 2y + 37) = 0$
$C.2$	$\lambda_2 x = 0$
$C.3$	$\lambda_3 y = 0$

$D.1$	$\lambda_1 \geq 0$
$D.2$	$\lambda_2 \geq 0$
$D.2$	$\lambda_3 \geq 0$
$E.1$	$-5x - 2y \leq -37$
$E.2$	$-x \leq 0$
$E.3$	$-y \leq 0$

Ahora analizamos casos.

$\boxed{\lambda_1 \neq 0 \text{ y } \lambda_2 = \lambda_3 = 0}$

En este caso la primera restricción es efectiva, es decir que E.1 se transforma en $5x + 2y = 37$. De B.1 llegamos a que $y = 2x + 5$ y entonces

$$5x + 2(2x + 5) = 37 \quad \Rightarrow \quad x = 3 \quad \Rightarrow \quad y = 11$$

Los coeficientes de Lagrange μ y λ_1 los obtenemos del sistema de ecuaciones que resulta al sustituir los valores de x y y en las ecuaciones A.1 y A.2. Entonces

$$3(11) - 3(3^2) - 2\mu + 5\lambda_1 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad 2\mu - 5\lambda_1 = 6$$

$$3(3) + \mu + 2\lambda_1 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \mu + 2\lambda_1 = -9$$

Así, $\mu = -9 - 2\lambda_1$ y entonces

$$2(-9 - 2\lambda_1) - 5\lambda_1 = 6 \quad \Rightarrow \quad -18 - 4\lambda_1 - 5\lambda_1 = 6 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = -8/3$$

Por lo tanto $\mu = -11/3$. Tenemos nuestro primer candidato:

x	y	μ	λ_1	λ_2	λ_3
3	11	$-11/3$	$-8/3$ (< 0)	0	0

$\boxed{\lambda_2 \neq 0 \text{ y } \lambda_1 = \lambda_3 = 0}$

En este caso la segunda restricción es efectiva, es decir que E.2 se transforma en $x = 0$. De B.1 llegamos a que $y = 5$. De A.2 llegamos a que $\mu = 0$ y entonces sustituimos en A.1 para obtener

$$3(5) + \lambda_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_2 = -15.$$

Tenemos nuestro segundo candidato:

x	y	μ	λ_1	λ_2	λ_3
0	5	0	0	-15 (< 0)	0

$\boxed{\lambda_3 \neq 0 \text{ y } \lambda_1 = \lambda_2 = 0}$

En este caso la tercera restricción es efectiva, es decir que E.3 se transforma en $y = 0$. De B.1 llegamos a que $x = -5/2$. Aquí hay que parar puesto que E.2 no se satisface.

$\boxed{\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0}$

En este caso A.1 y A.2 se reducen a

$$3y - 3x^2 - 2\mu = 0$$

y

$$3x + \mu = 0.$$

Multiplicamos por 2 la segunda de estas ecuaciones y la añadimos a la primera para obtener

$$3y - 3x^2 + 6x = 0 \quad \Rightarrow \quad y = x^2 - 2x$$

Sustituimos en B.1 para obtener

$$2x - (x^2 - 2x) = -5 \quad \Rightarrow \quad x^2 - 4x - 5 = 0$$

de donde $x = 5$ y $x = -1$. El segundo de estos valores, $x = -1$, viola la condición E.2. Así, si $x = 5$, entonces $y = 15$ y $\mu = -15$. Obtenemos entonces al último candidato:

x	y	μ	λ_1	λ_2	λ_3
5	15	-15	0	0	0

Nos interesan los máximos, para esto requerimos que los multiplicadores de Lagrange de las desigualdades sean positivos. Esto no ocurre con los primeros dos candidatos pues. El último candidato corresponde al caso en el que ninguna de las restricciones de desigualdad es efectiva. El punto en cuestión, $\mathbf{x}^* = (5, 15)$, es en efecto el punto en el que se maximiza la función objetivo. Una manera de ver esto es despejando y de B.1. Al hacer ésto observamos que el conjunto restricción es la semirecta $(x, 2x + 5)$ con $x \geq 3$, en donde la función objetivo toma los valores $F(x) = 3x(2x + 5) - x^3 = 6x^2 + 15x - x^3$.

Es sencillo ver que esta función es creciente en el intervalo $[3, 5]$ y decreciente en el intervalo $[5, \infty)$. El máximo de la función es entonces

$$\boxed{f(5, 15) = 100}$$