2^{o} Examen Parcial

Matemáticas I

(1) Responda *verdadero* ó *falso* (justifique su respuesta [**4 pts. c.u.**]):

(a) Una sucesión contenida en un conjunto cerrado posee una subsucesión convergente.

Solución. Falso: $\mathbb{R}$ es cerrado y $a_n = n$ con $n = 1, 2, \ldots$ no posee una subsucesión convergente.

(b) El conjunto de los puntos límite de un conjunto abierto es abierto.

Solución. Falso: El conjunto de puntos límite del intervalo abierto $(0,1)$ es el intervalo cerrado $[0,1]$.

(c) Una matriz es simétrica si todos sus valores característicos son números reales positivos.

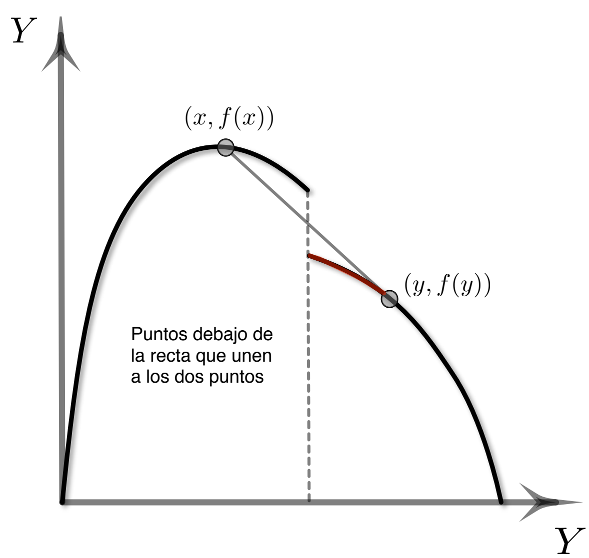
Solución. Falso: La matriz $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ no es simétrica y su único valor característico es $1 > 0$.

(d) Una matriz simétrica es positiva definida si y sólo si todos sus valores característicos son números reales positivos.

Solución. Verdadero: Teorema demostrado en clase.

(e) La función cuya gráfica se describe en la siguiente figura es cóncava.

Solución. Falso:



(2) **[20 pts.]** Maximizar la función $f(x,y) = 6x + 4y - 13 - x^2 - y^2$ sujeta a $x + y \leq 3$ y $x, y \geq 0$.

Solución. Usaremos el Lagrangiano de Kuhn-Tucker

$$\widetilde{L}(x,y,\lambda) = 6x + 4y - 13 - x^2 - y^2 - \lambda(x + y - 3)$$

Las condiciones que se requieren son

(1)

	A	B
1	$\dfrac{\partial \widetilde{L}}{\partial x} = 6 - 2x - \lambda \leq 0$	$x\dfrac{\partial \widetilde{L}}{\partial x} = x(6 - 2x - \lambda) = 0$
2	$\dfrac{\partial \widetilde{L}}{\partial y} = 4 - 2y - \lambda \leq 0$	$y\dfrac{\partial \widetilde{L}}{\partial y} = y(4 - 2y - \lambda) = 0$
3	$\dfrac{\partial \widetilde{L}}{\partial \lambda} = -x - y + 3 \geq 0$	$\lambda\dfrac{\partial \widetilde{L}}{\partial \lambda} = \lambda(-x - y + 3) = 0$

$\boxed{\lambda \neq 0}$

Restricción efectiva. Verificamos que la CRND siempre se satisface:

$\boxed{x, y > 0}$

$$rango\,(1\ \ 1) = 1$$

$\boxed{x > 0, y = 0}$

$$rango(1) = 1$$

$\boxed{x > 0, y = 0}$

$$rango(1) = 1$$

Tenemos entonces que $\Rightarrow x + y = 3 \Rightarrow y = 3 - x$. Sustituimos en 2.B y obtenemos $(3 - x)(4 - 2(3 - x) - \lambda) = (3 - x)(2x - (2 + \lambda)) = 0$ de forma que $x = 3$ ó $x = 1 + \lambda/2$. Si $x = 3$, entonces de 1.B obtenemos $\lambda = 0$ lo cual es imposible pues estamos en el supesto de que $\lambda \neq 0$. Supongamos que $x = 1 + \lambda/2$. Se requiere $\lambda > 0$ para maximizar. Entonces $x \neq 0$ y entonces de 1.B obtenemos que $\lambda = 2$ por lo que $x = 2$ y $y = 1$.
Candidatos: $(2, 1, 2)$

$\boxed{\lambda = 0}$

De 1.B y 2.B obtenemos que $x(6 - 2x) = 0$ y $y(4 - 2y) = 0$. Los posibles valores de x y y son $x = 0$, $x = 3$, $y = 0$ y $y = 2$. Ninguna de las posibles combinaciones de estos valores satisface las condiciones en (1).

El conjunto restricción es el triángulo con vértices $(0,0), (3,0), (0,3)$ junto con su su interior. Éste es un conjunto compacto y la función objetivo es continua, por lo tanto alcanza un máximo global. Como sólo se obtuvo un candidato, concluimos que el máximo de la función se alcanza en el punto $(2,1)$ y dicho máximo es $f(2,1) = 6(2) + 4(1) - 13 - 2^2 - 1^2 = -2$.

(3) **[20 pts.]** Maximizar $f(x,y) = 2y^2 - x$ sujeto a $x^2 + y^2 \leq 1$ y $x, y \geq 0$. Estime el máximo de f sujeto a $x^2 + y^2 \leq 0.9$

Solución. Usaremos el Lagrangiano de Kuhn-Tucker

$$\widetilde{L}(x,y,\lambda) = 2y^2 - x - \lambda(x^2 + y^2 - 1)$$

Las condiciones que se requieren son

(2)

	A	B
1	$\dfrac{\partial \widetilde{L}}{\partial x} = -1 - 2\lambda x \leq 0$	$x\dfrac{\partial \widetilde{L}}{\partial x} = x(-1 - 2\lambda x) = 0$
2	$\dfrac{\partial \widetilde{L}}{\partial y} = 4y - 2\lambda y \leq 0$	$y\dfrac{\partial \widetilde{L}}{\partial y} = y^2(4 - 2\lambda) = 0$
3	$\dfrac{\partial \widetilde{L}}{\partial \lambda} = -x^2 - y^2 + 1 \geq 0$	$\lambda\dfrac{\partial \widetilde{L}}{\partial \lambda} = \lambda(-x^2 - y^2 + 1) = 0$

$\boxed{\lambda \neq 0}$

Restricción efectiva. Verificamos que la CRND se satisface cuando $x^2 + y^2 = 1$:

$\boxed{x, y > 0}$

$$\mathit{rango}\begin{pmatrix} 2x & 2y \end{pmatrix} = 1 \quad \text{si } x^2 + y^2 > 0$$

$\boxed{x > 0, y = 0}$

$$\mathit{rango}\begin{pmatrix} 2x \end{pmatrix} = 1 \quad \text{si } x \neq 0$$

$\boxed{x > 0, y = 0}$

$$\mathit{rango}\begin{pmatrix} 2y \end{pmatrix} = 1 \quad \text{si } y \neq 0$$

Si $x = 0$, entonces $y = 1$ y 2.B $\Rightarrow$ $\lambda = 2$. Si $y = 0$, entonces $x = 1$ y 1.B $\Rightarrow$ $\lambda = -1/2$ (caso descartado pues se quiere maximizar). Si $x, y \neq 0$, entonces no hay candidatos pues 2.B $\Rightarrow$ $\lambda = 2$ y entonces 1.B $\Rightarrow$ $x = -1/4 < 0$.
Candidatos: $(0, 1, 2)$

$\boxed{\lambda = 0}$

1.B $\Rightarrow$ $x = 0$ y 2.B $\Rightarrow$ $y = 0$, fuera del conjunto restricción.

Hay un sólo candidato que satisface las condiciones (2), a saber $(x, y, \lambda) = (0, 1, 2)$. El conjunto restricción lo forman los puntos del disco cerrado unitario en el primer cuadrante, un conjunto compacto. La función objetivo es continua, por lo tanto alcanza un máximo global, a saber, $f(0,1) = 2(1)^2 - 0 = 2$.

El máximo de la función objetivo en caso de que la restricción $x^2 + y^2 \leq 1$ cambie a $x^2 + y^2 \leq 0.9$ es aproximadamente $2 - 2 \times (0.1) = 1.8$.

(4) **[20 pts.]** Una fábrica produce vino blanco y rojo. Sus ingresos son de $100x^2 + 100y^2$ unidades monetarias, siendo x el número de botellas de vino blanco y y el número de botellas de vino rojo. Para producir una botella de vino blanco se requieren de 2 unidades de materia prima y 1 hora de trabajo. Para producir una botella de vino rojo se requiere de 1 unidad de materia prima y 2 horas de trabajo. Se dispone de 40 unidades de materia prima y 50 horas de trabajo.

(a) Encuentre el número botellas de vino blanco y vino rojo que se han de producir para maximizar los ingresos.

(b) ¿Sería mejor para la fábrica aumentar o disminuir las unidades de materia prima?

Solución. Queremos maximizar $f(x, y) = 100x^2+100y^2$ sujeto a $2x+y \leq 40$ y a $x+2y \leq 50$. Usaremos el Lagrangiano de Kuhn Tucker

$$\widetilde{L}(x, y, \mu_1, \mu_2) = 100x^2 + 100y^2 - \lambda_1(2x + y - 40) - \lambda_2(x + 2y - 50).$$

Las condiciones que se requieren son

(3)

	A	B
1	$\dfrac{\partial \widetilde{L}}{\partial x} = 200x - 2\lambda_1 - \lambda_2 \leq 0$	$x\dfrac{\partial \widetilde{L}}{\partial x} = x(200x - 2\lambda_1 - \lambda_2) = 0$
2	$\dfrac{\partial \widetilde{L}}{\partial y} = 200y - \lambda_1 - 2\lambda_2 \leq 0$	$y\dfrac{\partial \widetilde{L}}{\partial y} = y(200y - \lambda_1 - 2\lambda_2) = 0$
3	$\dfrac{\partial \widetilde{L}}{\partial \lambda_1} = -2x - y + 40 \geq 0$	$\lambda_1\dfrac{\partial \widetilde{L}}{\partial \lambda_1} = \lambda_1(-2x - y + 40) = 0$
4	$\dfrac{\partial \widetilde{L}}{\partial \lambda_2} = -x - 2y + 50 \geq 0$	$\lambda_2\dfrac{\partial \widetilde{L}}{\partial \lambda_2} = \lambda_2(-x - 2y + 50) = 0$

$\boxed{\lambda_1, \lambda_2 \neq 0}$

Ambas restricciones efectivas. Verificamos que la CRND se satisface cuando $2x + y = 40$ y $x + 2y = 50$:

$\boxed{x, y > 0}$

$$rango \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = 2$$

$\boxed{x > 0, y = 0}$

$$rango \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 1$$

$\boxed{x > 0, y = 0}$

$$rango \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 1$$

3.B y 4.B $\Rightarrow$ $x = 10$ y $y = 20$. Entonces 1.B y 2.B $\Rightarrow$ $\lambda_1 = 0$ (aquí paramos pues $\lambda_1 \neq 0$).

$\boxed{\lambda_1 = 0 \text{ y } \lambda_2 \neq 0}$
La primera restricción es efectiva. Verificamos que la CRND se satisface cuando $x+2y = 50$:

$\boxed{x, y > 0}$

$$rango \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} = 1$$

$\boxed{x > 0, y = 0}$

$$rango \begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix} = 1$$

$\boxed{x > 0, y = 0}$

$$rango \begin{pmatrix} 2 \end{pmatrix} = 1$$

En este caso 4.B $\Rightarrow$ $x + 2y = 50$. Si $x = 0$, entonces $y = 25$ y 2.B $\Rightarrow$ $\lambda_2 = 2500$. Supongamos $x \neq 0$ de forma que 1.B $\Rightarrow$ $200x - \lambda_2 = 0$ $\Rightarrow$ $\lambda_2 = 200x$. Si $x = 50$, entonces $y = 0$ y no se satisface 3.A. Si $x \neq 50$, entonces $y \neq 0$ y entonces 2.B $\Rightarrow$ $200y - 2\lambda_2 = 0$ $\Rightarrow$ $\lambda_2 = 100y$. Entonces $y = 2x$ y así $x + 4x = 50$ $\Rightarrow$ $x = 10$ $\Rightarrow$ $y = 20$ $\Rightarrow$ $\lambda_2 = 2000$.

Candidatos: $(0, 25, 0, 2000)$, $(10, 20, 0, 2000)$

$\boxed{\lambda_1 \neq 0 \text{ y } \lambda_2 = 0}$
La segunda restricción es efectiva. Verificamos que la CRND se satisface cuando $2x+y = 40$:

$\boxed{x, y > 0}$

$$rango \begin{pmatrix} 2 & 1 \end{pmatrix} = 1$$

$\boxed{x > 0, y = 0}$

$$rango \begin{pmatrix} 2 \end{pmatrix} = 1$$

$\boxed{x > 0, y = 0}$

$$rango \begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix} = 1$$

En este caso 3.B $\Rightarrow$ $2x + y = 40$. Si $x = 0$, entonces $y = 40$ y no se satisface 4.A. Supongamos $x \neq 0$ de forma que 1.B $\Rightarrow$ $200x - 2\lambda_1 = 0$ $\Rightarrow$ $\lambda_1 = 100x$. Si $x = 20$, entonces $y = 0$ y $\lambda_1 = 2000$. Si $x \neq 20$, entonces $y \neq 0$ y entonces 2.B $\Rightarrow$ $200y - \lambda_1 = 0$ $\Rightarrow$ $\lambda_1 = 200y$. Entonces $2y = x$ y así $2(2y) + y = 40$ $\Rightarrow$ $y = 8$ $\Rightarrow$ $x = 16$ $\Rightarrow$ $\lambda_2 = 1600$.

Candidatos: $(20, 0, 2000, 0)$, $(16, 8, 1600, 0)$

La función objetivo es convexa y el conjunto restricción es un conjunto convexo. Entonces, para encontrar el máximo, basta evaluar la función en los candidatos.

(x, y)	$f(x, y)$
$(0, 25)$	$625,000$
$(10, 20)$	$30,000$
$(20, 0)$	$400,000$
$(16, 8)$	$320,000$

La función objetivo se maximiza en el punto $(0, 25)$, al cual le corresponden los multiplicadores $(0, 1000)$. Debido a que $\lambda_1 = 0$, no habría ningún beneficio en términos de aumentar las ganancias óptimas si hubiera un aumento de materias primas.

(5) **[20 pts.]** Sea $A = \{\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n | x_i > 0 \text{ para toda } i = 1, \ldots, n\}$. Considere la función $f\colon A \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i^{-r}$$

con $a_i > 0$ para toda $i = 1, \ldots, n$. Demuestre que f es cóncava si $r \in (-1, 0)$ y convexa si $r \geq 0$.

Solución. Es sencillo ver que $D^2 f$ es una matriz diagonal con

$$(D^2 f)_{ii} = a_i(-r)(-r-1)x_i^{-r-2}.$$

Es claro que si $r \in (-1, 0)$, entonces $-r > 0$ y $-r - 1 < 0$ y si $r \geq 0$, entonces $-r < 0$ y $-r - 1 < 0$. El resultado se sigue entonces de los criterios de definitividad de matrices.