TAREA I

1. Determina la veracidad o falsedad de las siguientes afirmaciones. Justifica tu respuesta.

   (a) Las columnas de una matriz cuadrada A son linealmente independientes si la única solución de la ecuación $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ es la solución trival.

   (b) Si S es un conjunto linealmente dependiente, entonces cada vector es una combinación lineal de los otros vectores en S.

   (c) Las columnas de una matriz de 4×5 son linealmente dependientes.

   (d) Si $\mathbf{x}$ y $\mathbf{y}$ son linealmente independientes y si $\{\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}\}$ es linealmente dependiente, entonces $\mathbf{z} \in \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$.

   (e) Dos vectores de $\mathbb{R}^n$ son linealmente dependientes si y sólo si están sobre una recta a lo largo del origen.

   (f) Si un conjunto contiene menos vectores que la dimensión del espacio, entonces el conjunto es linealmente independientes.

   (g) Si $\mathbf{x}$ y $\mathbf{y}$ son linealmente independientes y si $\mathbf{z} \in \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$, entonces $\{\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}\}$.

   (h) El conjunto $\{\sin x. \cos x, \cos(x + \pi/2)\}$ es linealmente independiente.

2. Sea V un espacio vectorial de dimensión n. Sea $S \subseteq V$ tal que $\langle S \rangle = V$.

   (a) Demostrar que S contiene almenos n elementos.

   (b) Demostrar que existe un subconjunto $\beta \subseteq S$ que es base de V, es decir, β es linealmente independiente y $\beta \hookrightarrow V$.

3. Encontrar bases para los siguientes espacios vectoriales y determina sus dimensiones.

   (a) $W_1 = \{(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5) \in \mathbb{R}^5 : a_1 - a_3 - a_4 = 0\}$.

   (b) $W_2 = \{(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5) \in \mathbb{R}^5 : a_2 = a_3 = a_4, a_1 + a_5 = 0\}$.

   (c) $W_3 = \{A \in M_{n\times n}(\mathbb{R}) : M$ es una matriz *triangular por arriba*$\}$.

   (d) $W_4 = \{A \in M_{n\times n}(\mathbb{R}) : M$ es una matriz *simétrica*$\}$.

4. Sea $\mathcal{K}[a, b] = \{f \colon [a, b] \to \mathbb{R} : f(tx + (1 - t)y) \leq tf(x) + (1 - t)f(y)$ para todos $x, y \in [a, b]$ y $t \in [0, 1]\}$, es decir, $\mathcal{K}[a, b]$ es el conjunto de funciones *convexas* del intervalo $[a, b]$. ¿Es $\mathcal{K}[a, b]$ un espacio vectorial?

5. Sea X un conjunto de *alternativas* de donde un individuo debe elegir. Supongams que el individuo cuenta con una relación de preferencia racional $\preceq$, es decir, si $x, y, z \in X$, entonces (1) $x \preceq y$ ó $y \preceq x$ y (2) si $x \preceq y$ y $y \preceq z$, entonces $x \preceq z$. Sea

   $$\mathcal{U} = \{u \colon X \to \mathbb{R} : x \preceq y \Leftrightarrow u(x) \preceq u(y)\}$$

   el conjunto de funciones de utilidad representando a $\preceq$. ¿Es $\mathcal{U}$ un espacio vectorial?