TAREA II

1. Sea $F \in M_{3\times 2}(\mathbb{R})$ una matriz de 3×2 con entradas reales. Defínase

$$\mathcal{H} = \{A \in M_{2\times 4}(\mathbb{R}) : FA = 0\}.$$

   Determina si $\mathcal{H} \leq M_{2\times 4}(\mathbb{R})$.

2. Proporciona un ejemplo de una transformación lineal $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $NT) = R(T)$.

3. Sea $T\colon M_{n\times n}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ definida para toda $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ por $T(A) = tr(A)$, donde

$$tr(A) = \sum_{i=1}^{n} A_{ii}$$

   Demuestra que T es una transformación lineal. Encuentra bases para $N(T)$ y $R(T)$. Calcula la nulidad y el rango de T. Determina si T es uno-a-uno y/o sobreyectiva.

4. Muestre que existe una transformación lineal $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ tal que $T(1,1) = (1,0,2)$ y $T(2,3) = (1,-1,4)$. ¿Qué es $T(8,11)$?

5. Sea $T\colon V \to W$ una transformación lineal. Sea $\{y_1, \ldots y_k\} \subseteq R(T)$ linealmente independiente. Sea $S = \{x_1, \ldots, x_k\}$ tal que $T(x_i) = y_i$ para toda $i = 1, \ldots, k$. Demuestre que S es linealmente independiente.

6. Calcula la nulidad y el rango de las siguientes matrices:

   (a) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \\ 5 & -1 & 8 \end{pmatrix}$

   (b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -4 & -2 \\ -3 & 6 & 3 \end{pmatrix}$

   (c) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & 3 \\ 1 & 0 & 6 & 5 \end{pmatrix}$

7. Sea

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -5 & -3 \\ 6 & -2 & 0 \\ -8 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

   Sea $T_A\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la transformación lineal definida para todo $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ por la regla

$$(T_A(x,y,z))^T = A(x,y,z)^T.$$

(aquí, X^T denota la transpuesta de X). Por ejemplo, para encontrar la imagen de $(1, 0, -1)$, sustituimos

$$(T_A(1,0,-1))^T = \begin{pmatrix} 3 & -5 & -3 \\ 6 & -2 & 0 \\ -8 & 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ -9 \end{pmatrix}$$

osea que $T_A(1, 0, -1) = (6, 6, -9)$.

- Determina si $(1, 3, -4)$ pertenece a $N(T_A)$.
- Detemina $R(T_A)$ y $N(T_A)$ explícitamente.

8. Sea $I\colon P_1(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ la transformación integral definida para toda $g \in P_1(\mathbb{R})$ por

$$Ig(x) = \int_0^x g(t)dt.$$

Sea $D\colon P_2(\mathbb{R}) \to P_1(\mathbb{R})$ la transformación derivada definida para toda $f \in P_2(\mathbb{R})$ por

$$Df(x) = f'(x).$$

Sea $\beta = \{1, x\}$ la base canónica ordenada de $P_1(\mathbb{R})$ y $\gamma = \{1, x, x^2\}$ la base canónica ordenada de $P_2(\mathbb{R})$. Encuentra las siguientes matrices (obsérvese cómo se exhibe la relación entre la composición de transformaciones lineales y la multiplicación de matrices):

(a) $[I]_\beta^\gamma$

(b) $[D]_\gamma^\beta$

(c) $[D \circ I]_\beta^\beta$

(d) $[I \circ D]_\gamma^\gamma$

(e) $[D]_\gamma^\beta [I]_\beta^\gamma$

(f) $[I]_\beta^\gamma [D]_\gamma^\beta$