TAREA III

1. Determina si el conjunto de vectores dado es linealmente independiente o no.

   (a) $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix}$

   (b) $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 8 \end{pmatrix}$

   (c) $\begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix}$

   (d) $\begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 8 \end{pmatrix}$

   (e) En $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$, el conjunto formado por $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 7 & -5 \end{pmatrix}$

   (f) En $P_2(\mathbb{R})$, el conjunto formado por $2x, x^3 - 3$, $1 + x - 4x^3$, $x^3 + 18x - 9$.

2. Encontrar el rango de las siguientes matrices y en caso de ser posible, calcule la inversa.

   (a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

   (b) $\begin{pmatrix} 0 & -2 & 4 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & -5 \end{pmatrix}$

   (c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

   (d) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

3. Para cada uno de los siguientes pares de bases ordenadas β y β' encuentre la matriz de cambio de coordenadas que transforma coordenadas de β' en β.

   (a) En $\mathbb{R}^2$, $\beta = \{(-1, -3), (2, -1)\}$ y $\beta' = \{(0, 10), (5, 0)\}$

   (b) En $\mathbb{R}^2$, $\beta = \{(2, 5), (-1, -3)\}$ y $\beta' = \{(1, 0), (0, 1)\}$

   (c) En $\mathbb{R}^2$, $\beta = \{(-4, 3), (2, -1)\}$ y $\beta' = \{(2, 1), (-4, 1)\}$

   (d) En $P_2(\mathbb{R})$, $\beta = \{2x^2 - x, 3x^2 + 1, x - 1\}$ y $\beta' = \{1, x, x^2\}$

(e) En $P_2(\mathbb{R})$, $\beta = \{x^2-x, x^2+1, x-1\}$ y $\beta' = \{5x^2-2x-3.-2x^2+5x+5, 2x^2-x-3\}$

4. Sea $T\colon P_1(\mathbb{R}) \to P_1(\mathbb{R})$ definida por $T(p) = p'$, la derivada de $p \in P_1(\mathbb{R})$. Sean $\beta = \{1, x\}$ y $\beta' = \{1+x, 1-x\}$.

   (a) Encontrar la matriz de cambio de coordenadas Q que transforma las coordenadas de β' en coordenadas de β.

   (b) Encontrar Q^{-1}.

   (c) Calcular $A = [T]_\beta$ y $B = [T]_{\beta'}$ y verificar que $B = Q^{-1}AQ$.

5. Determinar si la matriz A es diagonalizable. En caso afirmativo, encuentre una matriz Q tal que $Q^{-1}AQ$.

   (a) $\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}$

   (b) $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$

   (c) $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}$

   (d) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

   (e) $\begin{pmatrix} 7 & -2 & -4 \\ 3 & 0 & -2 \\ 6 & -2 & -3 \end{pmatrix}$

   (f) $\begin{pmatrix} -3 & -7 & -5 \\ 2 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

6. Para cada una de las siguientes matrices $A \in M_{n\times n}(F)$.
   (i) Encontrar los eigenvalores de A.
   (ii) Para cada eigenvalor λ de A, encontrar el conjunto de eigenvectores correspondientes a λ.
   (iii) De ser posible, encuéntrese una base para F^n compuesta por eigenvectores de A.
   (iv) Si se tiene éxito en encontrar la base en (iii), determínese una matriz Q tal que $Q^{-1}AQ$ sea una matriz diagonal y calcúlese $Q^{-1}AQ$.

   (a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ para $F = \mathbb{R}$.

   (b) $\begin{pmatrix} 0 & -2 & -3 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 5 \end{pmatrix}$ para $F = \mathbb{R}$.

   (c) $\begin{pmatrix} i & 1 \\ 2 & -i \end{pmatrix}$ para $F = \mathbb{C}$.

7. Sea $T\colon P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ definida mediante $T(f)(x) = f(x) + xf'(x)$. Encontrar todos los eigenvalores de T y encontrar una base β para $P_2(\mathbb{R})$ tal que $[T]_\beta$ sea una matriz diagonal.