TAREA 6

1. Determine el orden de las siguientes ecuaciones diferenciales y diga si son lineales o no-lineales

$$a)\quad \frac{d^4y}{dx^4}+\frac{d^3y}{dx^3}+\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{dy}{dx}+y=1 \qquad b)\quad \frac{dy}{dx}+xy^2=0$$

$$c)\quad \frac{d^2y}{dx^2}+\sin(x+y)=\sin x \qquad d)\quad \frac{d^3y}{dx^3}+x\frac{dy}{dx}+(\cos^2 x)y=x^3$$

2. Verifique que las funciones y_n's que se dan son soluciones de la ecuaciónes diferencial dada

   (a) $y''+2y'-3y=0 \qquad y_1(x)=e^{-3x} \quad y_2(x)=e^x$
   (b) $y''+y=\sec x \qquad 0<x<\pi/2 \quad y=(\cos x)\ln\cos x + x\sin x$
   (c) $y''''+4y'''+3y=x \qquad y_1(x)=x/3 \quad y_2(x)=e^{-x}+x/3$
   (d) $y'-2xy=1 \qquad y=e^{x^2}\int_0^x e^{-t^2}dt+e^{x^2}$

3. Dibuje algunas isoclinas y el campo direccional de las siguiente ecuaciones diferenciales

$$a)\quad y'=3-2y \qquad b)\quad y'=2x-3y$$

$$c)\quad y'=x^2+y^2 \qquad d)\quad y'=1-xy$$

4. Encuentre la solución general de las siguientes ecuaciones diferenciales

$$(a)\quad y'=x^2/y \qquad (b)\quad xy'=\sqrt{1-y^2}$$

$$(c)\quad dy/dx=(x-e^{-x})/(y+e^y) \qquad (d)\quad y'=1+x+y^2+xy^2$$

5. Encuentre la solución explícita del problema de valor inicial y determine (o al menos aproxime) el intervalo en el que la solución está bien definida

   (a) $dr/d\theta=r^2/\theta \qquad r(1)=2$
   (b) $y'=xy^3/\sqrt{1+x^2} \qquad y(0)=1$
   (c) $y'=2(1+x)(1+y^2) \qquad y(0)=0$
   (d) $\sin 2x\ \ dx+\cos 3y\ \ dy=0 \qquad y(\pi/2)=\pi/3$

6. En cada uno de los siguientes incisos, dibuje a dN/dt contra N y determine los puntos críticos (es decir, los puntos de equilibrio), y también diga si estos puntos son estables o inestables (en cada inciso, $N_0=N(0)$)

   (a) $dN/dt=-k(N-1)^2 \qquad k>0 \qquad \infty<N_0<\infty$
   (b) $dN/dt=N(1-N^2) \qquad -\infty<N_0<\infty$

(c) $dN/dt = aN - b\sqrt{N} \qquad a > 0 \qquad b > 0 \qquad N_0 \geq 0$

7. Use el método de fracciones parciales para encontrar la solución de la siguiente ecuación diferencial que modela crecimiento logístico con umbral

$$\frac{dN}{dt} = -r\left(1 - \frac{N}{T}\right)\left(1 - \frac{N}{K}\right)N \tag{1}$$

donde $K > T > 0$, $r > 0$, y que satisface la condición inicial $N(0) = N_0 \geq 0$. Presente un esquema con la gráfica de dN/dt con respecto de N (de la ecuación 1 se ve que ésta gráfica corresponde a una cúbica, asi que indique tanto los ceros como los puntos máximos y mínimos). También presente un esquema con las soluciones, indicando las soluciones de equilibrio, tanto estables como inestables.

8. Encuentre la solución general de las siguientes ecuaciones diferenciales

a) $y' + 3y = x + e^{-2x}$ *b*) $y' + \frac{1}{x}y = 3\cos 2x \qquad x > 0$

c) $y' + 2xy = 2xe^{-x^2}$ *d*) $(1 + x^2)y' + 4xy = (1 + x^2)^{-2}$

9. Encuentre la solución de la ecuaciones diferencial que satisface la condición inicial dada

(a) $y' + \frac{2}{x}y = \frac{\cos x}{x^2} \qquad y(\pi) = 0 \quad x > 0$
(b) $x^3y' + 4x^2y = e^{-x} \qquad y(-1) = 0$
(c) $xy' + 2y = \sin x \qquad y(\pi/2) = 1$
(d) $xy' + (x + 1)y = x \qquad y(\ln 2) = 1$

10. Encuentre la solución al problema de valor inicial y determine el intervalo en el que la solución es válida

(a) $y' + (\cot x)y = 4\sin x \qquad y(-\pi/2) = 0$
(b) $x(2 + x)y' + 2(1 + x)y = 1 + 3x^2 \qquad y(-1) = 1$
(c) $(1 - x^2)y' - xy = x(1 - x^2) \qquad y(0) = 2$
(d) $xy' + y = e^x \qquad y(1) = 1$

11. Muestre que las funciones y_1 y y_2 que se dan son soluciones de la ecuación diferencial correspondiente, y que además forman un conjunto fundamental de soluciones mediante el cálculo del Wronskiano. De ser el caso, determine la solución que satisface la condición inicial dada.

(a) $y'' + \lambda^2 y = 0 \qquad y_1(x) = \text{sen}\, \lambda x \qquad y_2(x) = \cos \lambda x \qquad \lambda \in \mathbb{R}$
(b) $y'' - y' - 2y = 0 \qquad y_1(x) = e^{-x} \qquad y_2(x) = e^{2x}$
(c) $x^2y'' - x(x + 2)y' + (x + 2)y = 0 \qquad y_1(x) = x \qquad y_2(x) = xe^x$
(d) $y'' - y = 0 \quad y(0) = 0 \quad y'(0) = 0 \qquad y_1(x) = \text{senh}\ x \quad y_2(x) = \cosh x$
(e) $y'' + 5y' + 6y = 0 \quad y(0) = 1 \quad y'(0) = 1 \qquad y_1(x) = e^{-2x} \quad y_2(x) = e^{-3x}$

(f) $y'' - 2y' + y = 0 \quad y(0) = 3 \quad y'(0) = 3 \qquad y_1(x) = e^x \quad y_2(x) = xe^x$

12. Encuentre la solución general de la ecuación diferencial dada, verificando que la función y_1 que se da es solución y luego usando el método de reducción de orden.

    (a) $y'' - 4y' - 12y = 0 \qquad y_1(x) = e^{6x}$

    (b) $y'' + 2y' + y = 0 \qquad y_1(x) = e^{-x}$

    (c) $x^2y'' + 2xy' = 0 \qquad y_1(x) = 1$

13. Encuentre la solución general de la ecuación diferencial dada. Si hay condición inicial, determine la solución que la satisface.

    (a) $6y'' - y' - y = 0$

    (b) $y'' + 6y' + 13y = 0$

    (c) $y'' + y' - 2y = 0$

    (d) $9y'' - 6y' + y = 0$

    (e) $y'' - 9y' + 9y = 0$

    (f) $y'' - y = 0$

    (g) $y'' - 6y' + 9y = 0 \qquad y(0) = 0 \quad y'(0) = 2$

    (h) $y'' + 4y' + 5y = 0 \qquad y(0) = 1 \quad y'(0) = 0$

    (i) $y'' + y' - 2y = 0 \qquad y(0) = 1 \quad y'(0) = 1$

    (j) $y'' + 4y = 0 \qquad y(0) = 0 \quad y'(0) = 1$

14. Encuentre la solución general de las siguientes ecuaciones diferenciales, y de ser el caso, determine la solución que satisface la condición inicial dada.

    (a) $y'' - 2y' + y = xe^x + 4 \qquad y(0) = 1 \quad y'(0) = 1$

    (b) $2y'' + 3y' + y = x^2 + 3\text{sen}\, x$

    (c) $u'' + \omega_0^2 u = \cos \omega t \qquad \omega \neq \omega_0$

    (d) $y'' - y' - 2y = \cosh 2x \qquad Hint: \qquad \cosh x = (e^x + e^{-x})/2$

    (e) $2y'' - 4y' - 6y = 3e^{2x}$

15. Encuentre la solución general de las siguientes ecuaciones diferenciales, resolviendo el sistema homogéneo asociado y encontrando una solución particular por el método de variación de parámetros

    (a) $\mathrm{y}'' - 5y' + 6y = 2e^x$

    (b) $y'' + y = \tan x \qquad 0 < x < \pi/2$

    (c) $y'' + 2y' + y = 3e^{-x}$

    (d) $y'' + 4y' + 4y = e^{-2x/x^2} \qquad x > 0$

    (e) $y'' + 4y = 3 \csc 2x \qquad 0 < x < \pi/2$

16. Use el método de variación de parámetros para encontrar una solución particular de cada una de las siguientes ecuaciones diferenciales

   (a) $y''' + y' = \tan x \qquad 0 < x < \pi/2$
   (b) $y''' - 2y'' - y' + 2y = e^{4x}$
   (c) $y''' - y' = x$

17. Las funciones $y_1 = x$, $y_2 = x^2$ y $y_3 = 1/x$ son soluciones de la ecuación homogénea asociada a la ecuación diferencial

$$x^3 y''' + x^2 y'' - 2xy' + 2y = 2x^4 \qquad x > 0.$$

   Encuentre una solución particular de ésta ecuación.

18. Encuentre la solución general de la ecuación diferencial

$$y''' - 4y' = x + 3\cos x + e^{-2x}.$$

19. Resuelva las siguientes ecuaciones diferenciales:

   (a) $2y''' - 4y'' - 2y' + 4y = 0$
   (b) $y^{vi} + y = 0$
   (c) $y^{viii} + 8y^{iv} + 16y = 0$
   (d) $y^{iv} - 5y'' + 4y = 0$

20. Resuelva los siguientes problemas de valor inicial:

   (a) $y^{iv} - y = 0 \qquad y(0) = 1 \quad y'(0) = 0 \quad y''(0) = -1 \quad y'''(0) = 0$
   (b) $y''' + y' = 0 \qquad y(0) = 0 \quad y'(0) = 1 \quad y''(0) = 2$
   (c) $y''' - y'' + y' - y = 0 \qquad y(\pi/2) = 2 \quad y'(\pi/2) = 1 \quad y''(\pi/2) = 0$